Algebra z geometrią, zestaw 8

8.1. Niech macierz kwadratowa $A \neq \lambda\mathbf{1}$ spełnia równanie $A^2 + \alpha A + \beta\mathbf{1} = 0$. Proszę wykazać (bez użycia pojęcia wyznacznika), że macierz A^{-1} istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\beta \neq 0$ i wyliczyć ją w tym przypadku.

8.2. Zakładamy, że dla macierzy $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ i $B \in \mathbb{K}^{n\times m}$ istnieje macierz $C = (\mathbf{1}_m + AB)^{-1}$ Proszę wykazać, że przy tych założeniach istnieje macierz $(\mathbf{1}_n + BA)^{-1}$ i wyrazić ja przy pomocy macierz A, B i C.

8.3. Proszę wykazać, że dla macierzy B uzyskanej z kwadratowej macierzy A przez dodanie do jej kolumny o numerze i kombinacji liniowej pozostałych kolumn (to jest sumy kolumn uprzednio pomnożonych przez dowolne współczynniki liczbowe) zachodzi $\det B = \det A$.

8.4. Proszę obliczyć wyznaczniki

$$a)\ \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 27 & 9 & 9 \\ 62 & 23 & 18 \\ 35 & 14 & 7 \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} x+y & x-y & 1 \\ x+y & x-1 & x+y \\ x+2y-1 & x-y & y \end{vmatrix}.$$

8.5. Niech $\omega = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$. Proszę obliczyć wyznaczniki

$$a)\ \begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix}, \qquad b)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & \omega \\ 1 & 1 & \omega^2 \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}, \qquad c)\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c\omega & a\omega^2 \\ c & a\omega^2 & b\omega \end{vmatrix}.$$

8.6. Niech $X, Y \in \mathbb{K}^m$. Proszę wykazać, że $\det\big(\mathbf{1}_m + XY^{\mathrm{T}}\big) = 1 + X^T Y$.

Leszek Hadasz

hadasz@th.if.uj.edu.pl