Algebra z geometrią, zestaw 7

7.1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proszę obliczyć iloczyny AB oraz BA i sprawdzić, że $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$.

7.2. Niech A, B będą macierzami takimi, że istnieje iloczyn AB. Proszę wykazać, że w takim przypadku istnieje iloczyn $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$ (przypominam, że indeks górny T oznacza transpozycję macierzy) oraz udowodnić równość

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

7.3. Niech A i B będą macierzami kwadratowymi. *Komutatorem* takich macierzy nazywamy macierz

$$[A, B] = AB - BA$$

Proszę obliczyć komutator macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.4. Macierze Pauliego $\sigma_a \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, $a = 1, 2, 3$ mają postać

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proszę udowodnić dla nich tożsamość

$$\mathrm{Tr}\ (\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}$$

oraz sprawdzić równości

$$[\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3, \qquad [\sigma_2, \sigma_3] = 2i\sigma_1, \qquad [\sigma_3, \sigma_1] = 2i\sigma_2.$$

7.5. Proszę zapisać układ równań $x_1 + x_2 - x_3 = b_1$, $x_2 - 2x_3 = b_2$, $x_2 - x_3 = b_3$ (gdzie x_i są niewiadomymi, a b_i traktujemy jako znane) w postaci równania macierzowego $A\,X = B$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ i $X^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, x_3)$, $B^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, b_3)$. Proszę rozwiązać (elementarnymi metodami) ten układ i zaprezentować rozwiązanie w postaci $X = C\,B$, $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Jaka jest postać macierzy $A\,C$?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl