Algebra z geometrią, zestaw 4

4.1. Proszę zapoznać się z przykładami z punktu 9, paragraf 3 podręcznika profesora Andrzeja Herdegena.

4.2. Proszę wykazać, że jeśli dla każdego $g \in G$ mamy $g^2 = e$, to G jest grupą abelową.

4.3. Niech G będzie grupą a h jej ustalonym elementem. Proszę wykazać, że odwzorowania

a) $G \ni g \ \to \ g^{-1} \in G$

b) $G \ni g \ \to \ h^{-1}gh \in G$

są bijekcjami. Czy są one także automorfizmami?

4.4. Na zbiorze $\mathbb{Z}/\mathrm{mod}\ m$ definiujemy działania

$$[x] + [y] = [x + y], \qquad [x] \cdot [y] = [xy].$$

Proszę wykazać, że działania te są poprawnie zdefiniowane (ich wynik nie zależy od wyboru reprezentanta z klasy równoważności) oraz że $\mathbb{Z}/\mathrm{mod}\ m$ z działaniem dodawania jest grupą. Jakiej własności brakuje, aby ten zbiór z działaniem mnożenia tworzył grupę?

4.5. Niech r będzie liczbą niewymierną taką, że $r^2 \in \mathbb{Q}$. Proszę wykazać, że zbiór liczb postaci $a+br,\ a, b \in \mathbb{Q}$ ze standardowo zdefiniowanymi działaniami mnożenia i dodawania jest ciałem.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl