Algebra z geometrią, zestaw 3

3.1. Proszę zapoznać się z przykładami (i), (ii), (iv), (v) oraz (viii) podanymi w paragrafie 3, punt 6 podręcznika prof. Andrzeja Herdegena(przedyskutujemy je w trakcie ćwiczeń).

3.2. Niech zbiór X będzie liniowo uporządkowany relacją $\leq$. Określamy w tym zbiorze działanie $x \circ y = \max\{x, y\}$. Czy działanie to jest łączne? Jaki jest warunek istnienia elementu neutralnego? Czy istnieją wtedy elementy przeciwne?

3.3. W zbiorze X zadajemy działanie formułą $x \circ y = x$. Czy jest ono łączne? Co można wywnioskować o zbiorze X, jeśli to działanie ma w nim element neutralny.

3.4. Rozważmy grupę ilorazową $\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^*$ multiplikatywnych grup liczbowych. Proszę wykazać, że dla każdego $\epsilon > 0$ zachodzi

$$\mathbb{R}^*/\mathbb{Q}^* = \{x\mathbb{Q} \mid x \in (0, \epsilon)\}.$$

3.5. Niech X_r będzie zbiorem złożonym z liczb postaci $a + br$, gdzie r jest ustaloną liczbą niewymierną, a a, b są dowolnymi liczbami wymiernymi.

(a) Kiedy $X_r = X_{r'}$?

(b) Proszę wykazać, że każdy ze zbiorów X_r jest podgrupą grupy addytywnej $\mathbb{R}$.

(c) Proszę znaleźć wszystkie liczby r, dla których $X_r^* = X_r \setminus \{0\}$ są podgrupami grupy multiplikatywnej $\mathbb{R}^*$ i znaleźć zbiór takich liczb r, dla których grupy X_r są parami różne i wyczerpują wszystkie grupy tego typu.

3.6. Proszę wykazać, że zbiór $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ z działaniem $(a, b) \circ (a', b') = (a + ba', bb')$ tworzy grupę.

3.7. Proszę znaleźć podgrupę grupy z poprzedniego zadania generowaną podzbiorem złożonym ze wszystkich elementów (a, b) takich, że $(a, b) \circ (a, b) = (0, 1)$. Czy ta podgrupa jest abelowa (przemienna)?

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl