Algebra z geometrią, zestaw 2

2.1. Proszę zapoznać się z przykładami z części 8 paragrafu 2 podręcznika prof. Andrzeja Herdegena.

2.2. W dziedzinie odwzorowania $f : X \to Y$ określamy relację $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Proszę sprawdzić, że jest to relacja równoważności i zapisać zbiór ilorazowy przy pomocy pojęć obrazu i przeciwobrazu.

2.3. W zbiorze $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0, 0\}$ określamy relację

$$\langle x_1, y_1\rangle \, \mathcal{R} \, \langle x_1, y_2\rangle \;\Leftrightarrow\; x_1 y_2 = x_2 y_1.$$

Proszę udowodnić, że jest to relacja równoważności, otrzymać jej warstwy i przedstawić je graficznie na płaszczyźnie kartezjańskiej.

2.4. Dla funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x$, proszę znaleźć wszystkie zbiory $X \subset \mathbb{R}$ złożone co najwyżej z trzech przedziałów rozłącznych (skończonych lub nie) takie, że zawężenie f do X jest bijekcją $X \to \mathbb{R}$.

2.5. Niech $f : A \to B$ i $g : B \to C$ będą funkcjami. Proszę pokazać, że jeśli $g \circ f$ jest bijekcją, to f jest injekcją a g surjekcją.

2.6. Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją a $A \subset X$ i $B \subset Y$ zbiorami. Proszę wykazać, że

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \qquad \text{i} \qquad f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B.$$

2.7. Proszę wykazać, że zbiory $\mathbb{N}$ i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ są równoliczne. Wskazówka: jawną konstrukcję bijekcji można podać wprowadzając na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ zdefiniowany na wykładzie porządek leksykograficzny.

Leszek Hadasz
hadasz@th.if.uj.edu.pl