

Algebra z geometrią, zestaw 1

1.1. Proszę udowodnić dla symbolu dwumiennego Newtona równość:

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

1.2. Proszę udowodnić (poprzez indukcję względem n) wzór dwumienny Newtona

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.3. Proszę udowodnić (poprzez indukcję względem n) nierówność Bernoulliego: jeśli $n \in \mathbb{N}$ i $a > -1$, to

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

1.4. Proszę udowodnić (metodą tabelki zero-jedynkowych) wszystkie prawa logiki zdaniowej sformułowane na wykładzie.

1.5. Dla $A, B, C \subset X$ proszę udowodnić równości

a) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

c) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$

d) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

1.6. Różnicą symetryczną zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proszę udowodnić, że

$$A \div B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1.7. Niech, $A, B \subset \mathbb{Z}$ (tym symbolem oznaczamy zbiór liczb całkowitych), $A = \{0, 1\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$. Proszę wyznaczyć postać zbioru

$$C = A \times B - B \times A.$$

1.8. Niech $X = \{a, b, c\}$. Proszę podać przykład relacji $\mathcal{R} \subset X \times X$ będącej relacją

a) zwrotną,

b) symetryczną,

c) antysymetryczną,

d) przechodnią,

e) spójną.

1.9. Czy relacja symetryczna i przechodnia jest automatycznie relacją zwrotną? Jeśli tak, proszę ten fakt udowodnić, jeśli nie – proszę podać jawny przykład relacji symetrycznej i przechodniej, nie będącej relacją zwrotną.