

TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

27/11/2018

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 8

2

Modele
danych: grafy

- **Podstawowe pojęcia**
- **Grafy wywołań**
- **Grafy skierowane i nieskierowane**
- **Grafy planarne, kolorowanie grafów**
- **Implementacja grafów**
 - ▣ **Listy sąsiedztwa**
 - ▣ **Macierze sąsiedztwa**
- **Składowe spójne, algorytm Kruskala**
- **Sortowanie topologiczne**
- **Najkrótsze drogi: algorytm Dikstry i Floyda-Warshalla**

Graf

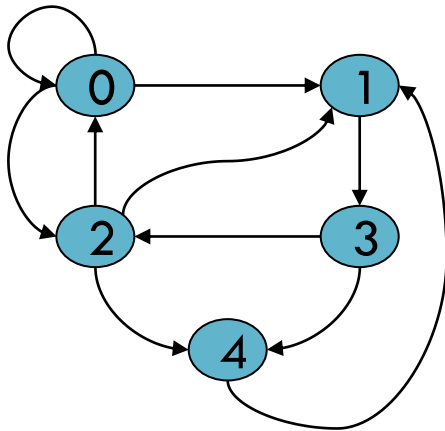
3

- **Graf to jest relacja binarna.**
- **Dla grafów mamy możliwość wizualizacji jako zbiór punktów (zwanymi wierzchołkami) połączonych liniami lub strzałkami (nazwanymi krawędziami). Pod tym względem graf stanowi uogólnienie drzewiastego modelu danych.**
- **Podobnie jak drzewa, grafy występują w różnych postaciach: grafów skierowanych i nieskierowanych lub etykietowanych i nieetykietowanych.**
- **Grafy są przydatne do analizy szerokiego zakresu problemów: obliczanie odległości, znajdowanie cykliczności w relacjach, reprezentacji struktury programów, reprezentacji relacji binarnych, reprezentacji automatów i układów elektronicznych.**

Podstawowe pojęcia

4

- **Graf skierowany** (ang. **directed graph**)
Składa się z następujących elementów:
 - Zbioru **V** wierzchołków (ang. *nodes, vertices*)
 - Relacji binarnej **E** na zbiorze **V**. Relacje **E** nazywa się zbiorem krawędzi (ang. *edges*) grafu skierowanego. Krawędzie stanowią zatem pary wierzchołków (**u,v**).



$$V = \{0,1,2,3,4\}$$

$$E = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1) \}$$

Podstawowe pojęcia

5

□ Etykiety:

- Podobnie jak dla drzew, dla grafów istnieje możliwość przypisania do każdego wierzchołka etykiety (ang. label).
- Nie należy mylić nazwy wierzchołka z jego etykietą. Nazwy wierzchołków muszą być niepowtarzalne, ale kilka wierzchołków może być oznaczonych tą samą etykietą.



□ Drogi:

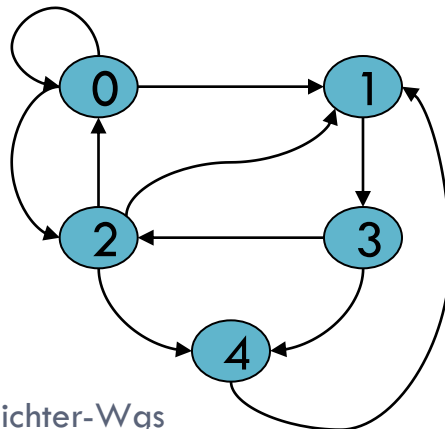
- Droga (ang. path) w grafie skierowanym stanowi listę wierzchołków, (n_1, n_2, \dots, n_k) taką, że występuje krawędź łącząca każdy wierzchołek z następnym, to znaczy $(n_i, n_{i+1}) \in E$ dla $i=1, 2, \dots, k$. Długość (ang. length) drogi wynosi $k-1$, co stanowi liczbę krawędzi należących do tej samej drogi.

Podstawowe pojęcia

6

□ Grafy **cykliczne** i **acykliczne**:

- **Cykl** (ang. cycle) w grafie skierowanym jest drogą o długości 1 lub więcej, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.
- **Długość cyklu** jest długością drogi. **Cykl jest prosty** (ang. simple) jeżeli żaden wierzchołek (oprócz pierwszego) nie pojawia się na nim więcej niż raz.
- Jeżeli istnieje cykl nieprosty zawierający wierzchołek n , to można znaleźć prosty cykl który zawiera n . Jeżeli graf posiada jeden lub więcej cykli to mówimy że jest grafem **cyklicznym** (ang. cyclic). Jeśli cykle nie występują to, graf określa się mianem **acyklicznego** (ang. acyclic).



Przykłady cykli prostych:

$(0,0)$, $(0,2,0)$, $(1,3,2,1)$, $(1,3,2,4,1)$

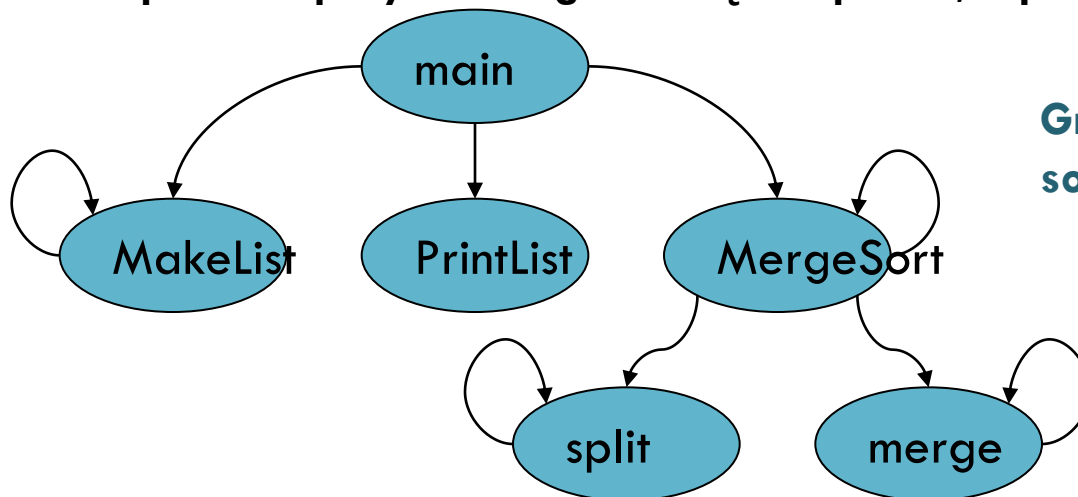
Przykład cyklu nieprostego:

$(0,2,1,3,2,0)$

Grafy wywołań

7

- Wywołania dokonywane przez zestaw funkcji można reprezentować za pomocą grafu skierowanego, zwanego grafem wywołań. Jego wierzchołki stanowią funkcje, a krawędź (P, Q) istnieje wówczas, gdy funkcja P wywołuje funkcję Q .
- Istnienie cyklu w grafie implikuje występowanie w algorytmie rekurencji.
- Rekurencja w której funkcja wywołuje samą siebie nazywamy bezpośrednią (ang. direct).
- Czasem mamy do czynienia z rekurencją pośrednią (ang. indirect) która reprezentuje cykl o długości większej niż 1, np. (P, Q, R, P) .



Graf wywołań dla algorytmu sortowania przez scalanie

Rekurencja bezpośrednia

Grafy nieskierowane

8

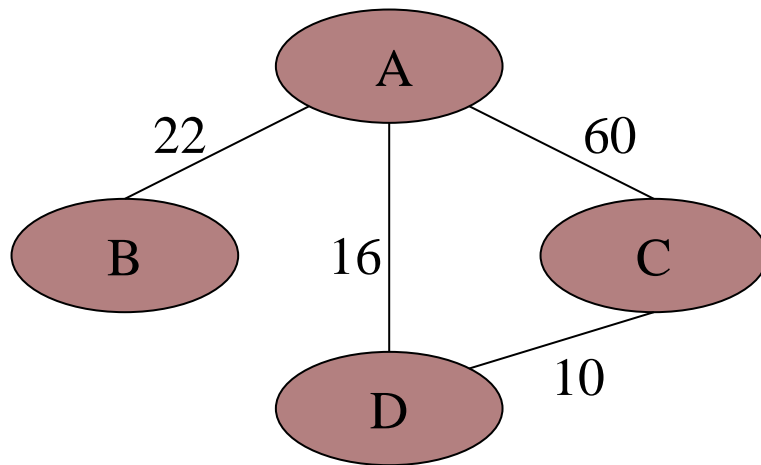
- Czasem zasadne jest połączenie wierzchołków krawędziami, które nie posiadają zaznaczonego kierunku. Z formalnego punktu widzenia taka krawędź jest zbiorem dwóch wierzchołków.
- Zapis $\{u,v\}$ mówi ze wierzchołki u oraz v są połączone w dwóch kierunkach. Jeśli $\{u,v\}$ jest krawędzią nieskierowaną, wierzchołki u i v określa się jako **sąsiednie** (ang. *adjacent*) lub mianem **sąsiadów** (ang. *neighbors*).
- Graf zawierający krawędzie nieskierowane, czyli graf z relacją symetryczności krawędzi, nosi nazwę grafu **nieskierowanego** (ang. *undirected graph*).

Grafy nieskierowane

9

- **Droga to lista wierzchołków. Nieco trudniej jest sprecyzować co to jest cykl, tak aby nie była to każda lista**

$(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1)$

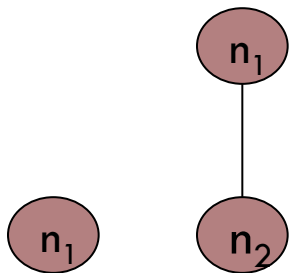


Graf nieskierowany reprezentujący drogi.

Pewne pojęcia z teorii grafów

10

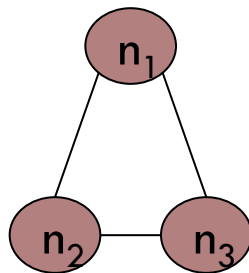
- **Teoria grafów** jest dziedziną matematyki zajmującą się właściwościami grafów.
- **Grafy pełne:**
 - **Nieskierowany graf** posiadający krawędzie pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków nosi nazwę grafu pełnego (ang. *complete graph*). Graf pełny o n wierzchołkach oznacza się przez K_n .
 - Liczba krawędzi w nieskierowanym grafie K_n wynosi $n(n-1)/2$, w skierowanym grafie K_n wynosi n^2 .



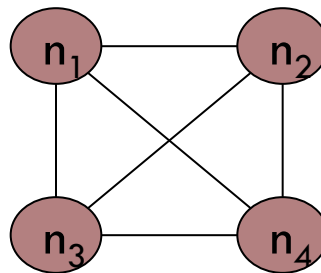
K_1



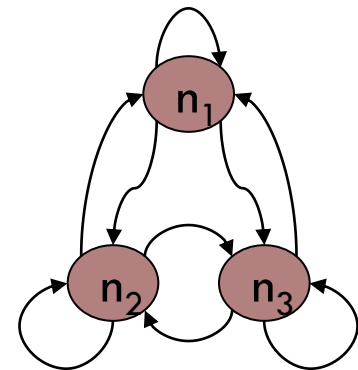
K_2



K_3



K_4



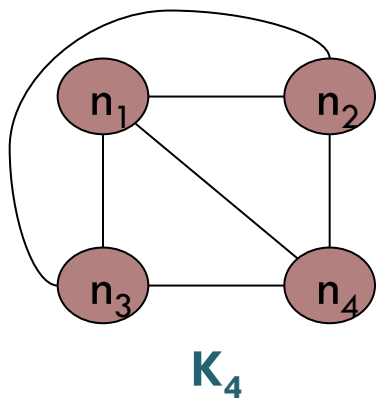
K_3

Grafy planarne i nieplanarne

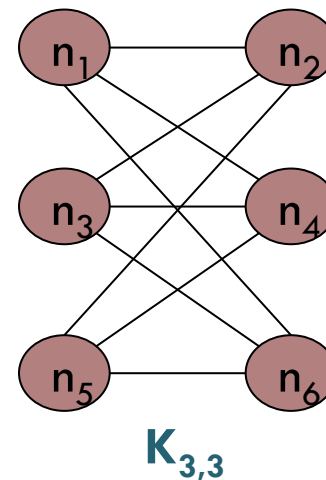
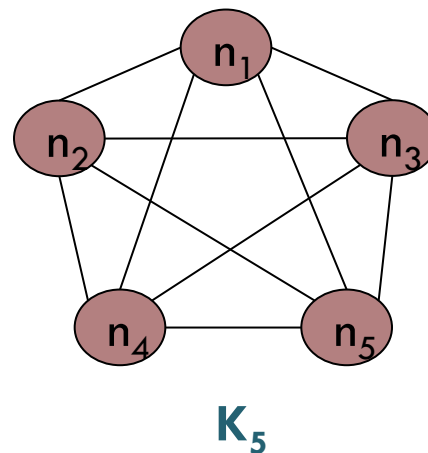
11

- O grafie nieskierowanym mówi się że jest planarny (ang. planar) wówczas, gdy istnieje możliwość rozmieszczenia jego wierzchołków na płaszczyźnie, a następnie narysowania jego krawędzi jako linii ciągłych które się nie przecinają.
- Grafy nieplanarne (ang. nonplanar) to takie które nie posiadają reprezentacji płaskiej.

Reprezentacja planarna:



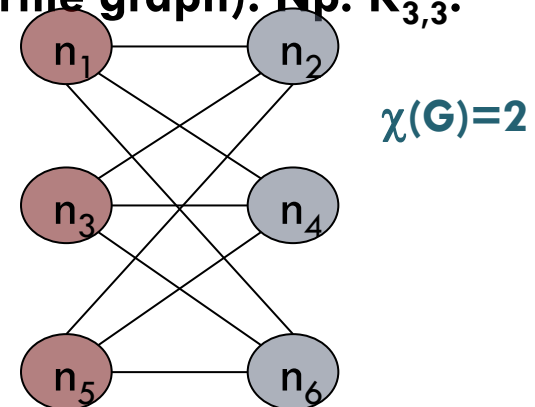
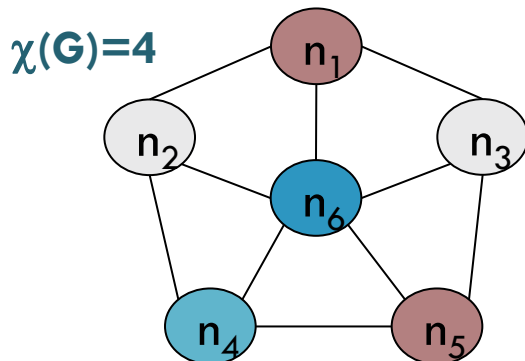
Najprostsze grafy nieplanarne:



Kolorowanie grafów

12

- Kolorowanie grafu (ang. graph coloring) polega na przypisaniu do każdego wierzchołka pewnego koloru, tak aby żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie miały tego samego koloru.
- Minimalna liczba kolorów potrzebna do takiej operacji nazwana jest liczbą chromatyczną grafu (ang. chromatic number), oznaczaną $c(G)$.
 - ▣ Jeżeli graf jest pełny to jego liczba chromatyczna jest równa liczbie wierzchołków
 - ▣ Jeżeli graf możemy pokolorować przy pomocy dwóch kolorów to nazywamy go dwudzielnym (ang. bipartite graph). Np. $K_{3,3}$.



Implementacje grafów

13

- Istnieją dwie standardowe metody reprezentacji grafów:
 - ▣ **Listy sąsiedztwa** (ang. *adjacency lists*), jest, ogólnie rzecz biorąc, podobna do implementacji relacji binarnych.
 - ▣ **Macierze sąsiedztwa** (ang. *adjacency matrices*), to nowy sposób reprezentowania relacji binarnych, który jest bardziej odpowiedni dla relacji, w przypadku którym liczba istniejących par stanowi znaczącą część całkowitej liczby par, jakie mogłyby teoretycznie istnieć w danej dziedzinie.

Listy sąsiedztwa

14

- Wierzchołki są ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi **0,1,....., MAX-1** lub oznaczone za pomocą innego adekwatnego typu wyliczeniowego (używamy poniżej typu **NODE** jako synonimy typu wyliczeniowego).
- Wówczas można skorzystać z podejścia opartego na wektorze własnym.
- Element **successors[u]** zawiera wskaźnik do listy jednokierunkowej wszystkich bezpośrednich następników wierzchołka **u**. Następniki mogą występować w dowolnej kolejności na liście jednokierunkowej.

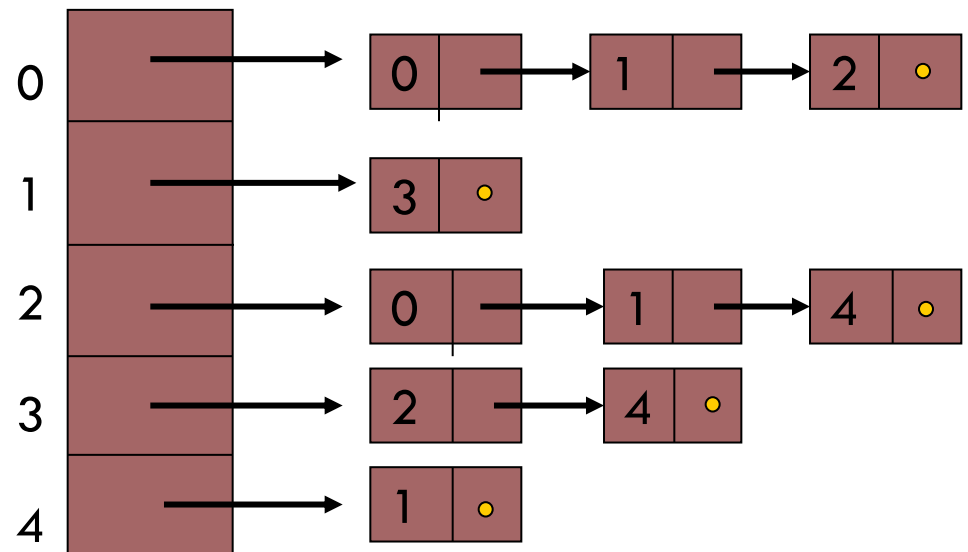
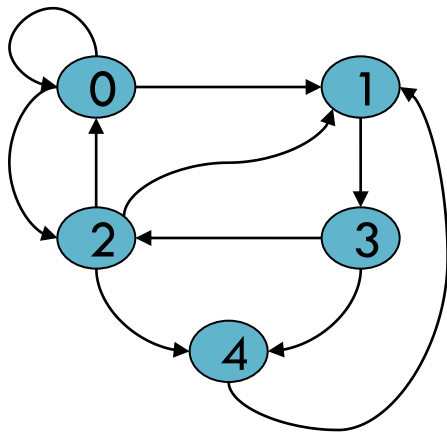
Listy sąsiedztwa:

```
typedef struct CELL *LIST;  
struct CELL {  
    NODE nodeName;  
    LIST next;  
}  
LIST successors[MAX]
```

Listy sąsiedztwa

15

- Listy sąsiedztwa zostały posortowane wg. kolejności, ale następniki mogą występować w **dowolnej kolejności** na odpowiedniej liście sąsiedztwa.



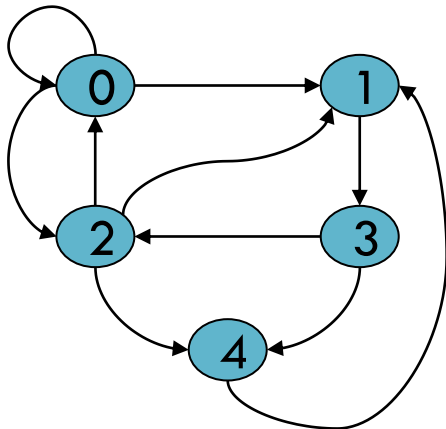
Macierz sąsiedztwa

16

Tworzymy dwuwymiarową tablicę;

BOOLEAN `vertices[MAX][MAX];`

w której element `vertices[u][v]` ma wartość **TRUE** wówczas, gdy istnieje krawędź (u, v) , zaś **FALSE**, w przeciwnym przypadku.



| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Listy sąsiedztwa a macierz sąsiedztwa

17

- **Macierze sąsiedztwa** są preferowanym sposobem reprezentacji grafów wówczas, gdy **grafy są gęste** (ang. dense), to znaczy, kiedy liczba krawędzi jest bliska maksymalnej możliwej ich liczby.
- Dla grafu skierowanego o n wierzchołkach maksymalna liczba krawędzi wynosi n^2 .
- Jeśli **graf jest rzadki** (ang. sparse) to reprezentacja oparta na **listach sąsiedztwa** może pozwolić zaoszczędzić pamięć.
- Istotne różnice między przedstawionymi reprezentacjami grafów są widoczne już przy wykonywaniu prostych operacji.

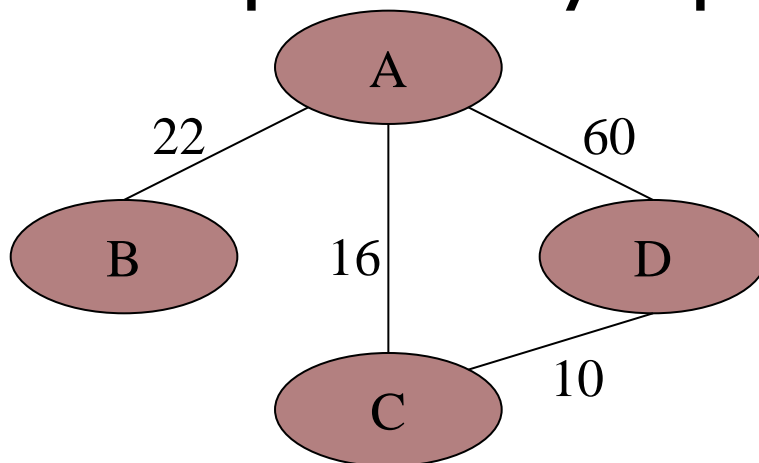
Preferowany sposób reprezentacji:

| OPERACJA | GRAF GĘSTY | GRAF RZADKI |
|--------------------------|--------------------|------------------|
| Wyszukiwanie krawędzi | Macierz sąsiedztwa | Obie |
| Znajdowanie następników | Obie | Lista sąsiedztwa |
| Znajdowanie poprzedników | Macierz sąsiedztwa | Obie |

Składowa spójna grafu nieskierowanego

18

- Każdy graf nieskierowany można podzielić na jedną lub większą liczbę **spójnych składowych** (ang. *connected components*).
- Każda spójna składowa to taki zbiór wierzchołków, że dla każdych dwóch z tych wierzchołków istnieje łącząca je ścieżka. Jeżeli graf składa się z jednej spójnej składowej to mówimy że jest **spójny** (ang. *connected*).



To jest graf spójny

Algorytm wyznaczania spójnych składowych

19

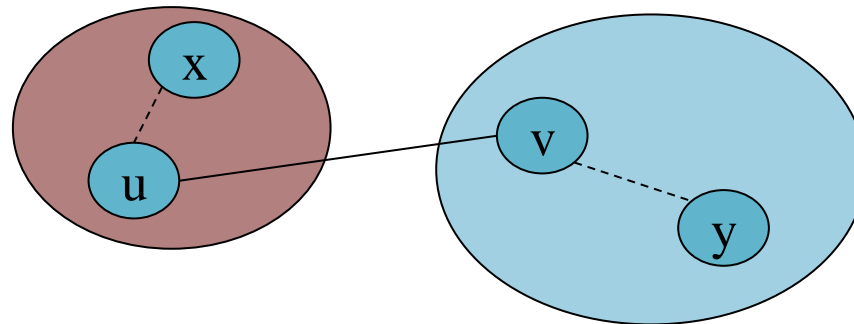
Chcemy określić spójne składowe grafu G . Przeprowadzamy rozumowanie indukcyjne.

□ **Podstawa:**

- Graf G_0 zawiera jedynie wierzchołki grafu G i żadnej jego krawędzi. Każdy wierzchołek stanowi odrębną spójną składową.

□ **Indukcja:**

- Zakładamy, że znamy już spójne składowe grafu G_i po rozpatrzeniu pierwszych i krawędzi, a obecnie rozpatrujemy $(i+1)$ krawędź $\{u, v\}$.
 - jeżeli wierzchołki u, v należą do jednej spójnej składowej to nic się nie zmienia
 - jeżeli do dwóch różnych, to łączymy te dwie spójne składowe w jedną.



Struktura danych dla wyznaczania spójnych składowych

20

- Biorąc pod uwagę przedstawiony algorytm, musimy zapewnić szybką wykonywalność następujących operacji:
 - 1) gdy jest określony wierzchołek to znajdź jego bieżącą spójną składową
 - 2) połącz dwie spójne składowe w jedną
- Dobre wyniki daje ustawienie wierzchołków każdej składowej w strukturze drzewiastej, gdzie spójna składowa jest reprezentowana przez korzeń.
 - aby wykonać operacje (1) należy przejść do korzenia: $O(\log n)$
 - aby wykonać operacje (2) wystarczy korzeń jednej składowej określić jako potomka korzenia składowej drugiej ($O(1)$).
 - Przyjmijmy zasadę ze korzeń drzewa o mniejszej wysokości czynimy potomkiem.
- Wyznaczenie wszystkich spójnych składowych $O(m \log n)$, m -krawędzi i n -wierzchołków.

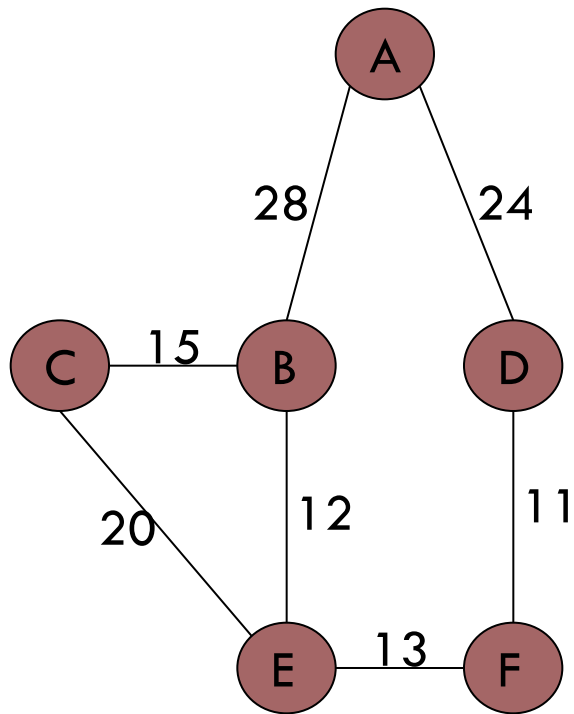
Minimalne drzewa rozpinające

21

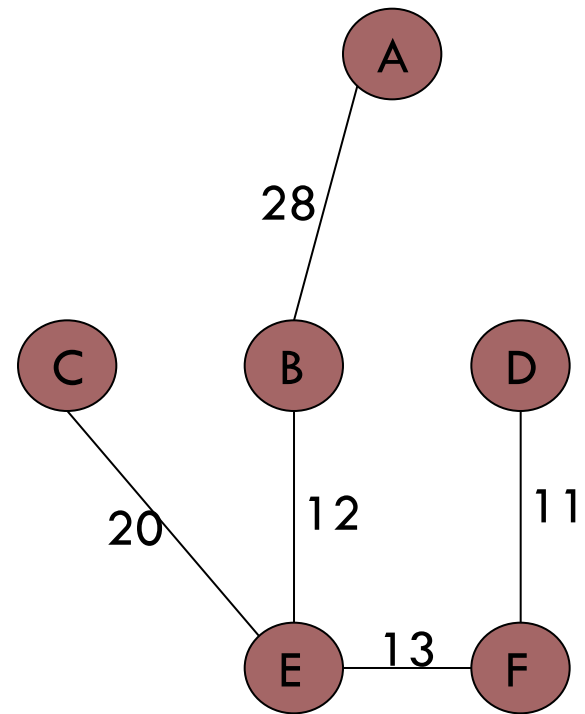
- **Drzewo rozpinające** (ang. *spanning tree*) grafu nieskierowanego G stanowi zbiór wierzchołków tego grafu wraz z podzbiorem jego krawędzi, takich że:
 - łączą one wszystkie wierzchołki, czyli istnieje droga między dwoma dowolnymi wierzchołkami która składa się tylko z krawędzi drzewa rozpinającego.
 - tworzą one drzewo nie posiadające korzenia, nieuporządkowane. Oznacza to że nie istnieją żadne (proste) cykle.
- Jeśli graf G stanowi pojedynczą spójną składową to drzewo rozpinające zawsze istnieje. **Minimalne drzewo rozpinające** (ang. *minimal spanning tree*) to drzewo rozpinające, w którym suma etykiet jego krawędzi jest najmniejsza ze wszystkich możliwych do utworzenia drzew rozpinających tego grafu.

Minimalne drzewa rozpinające

22



Graf nieskierowany



Drzewo rozpinające

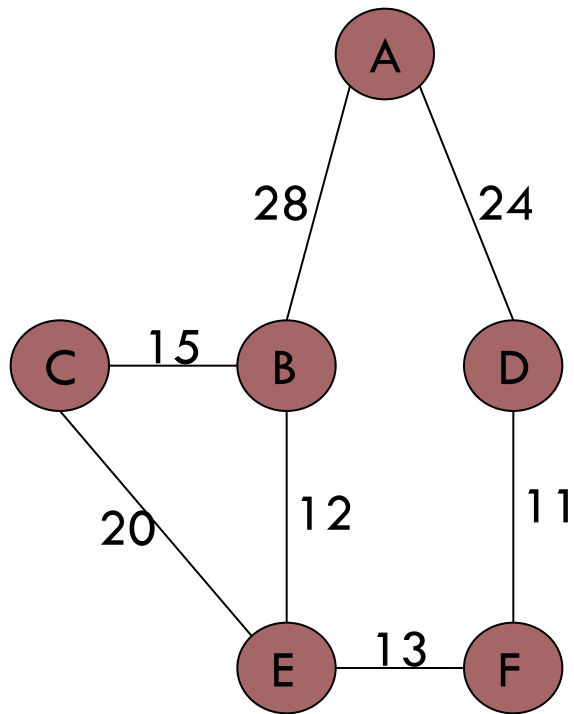
Algorytm Kruskala

23

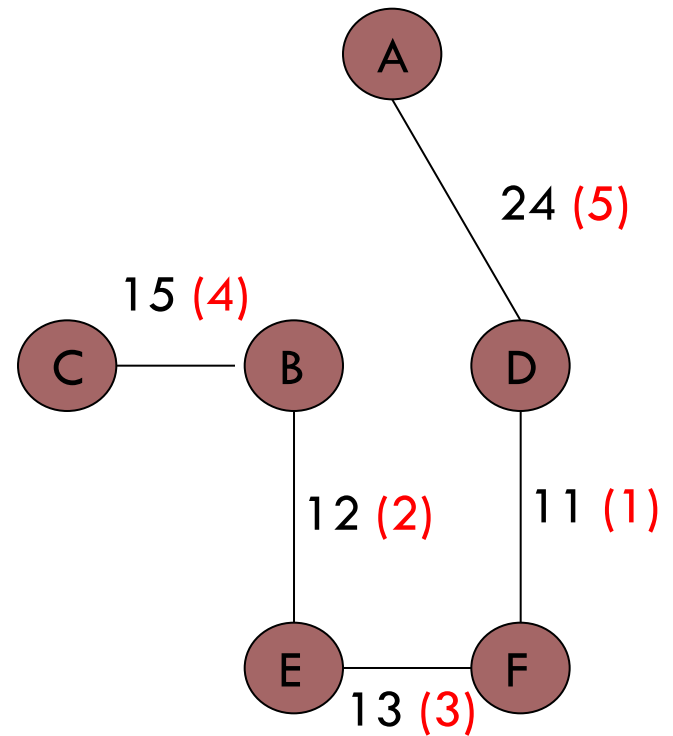
- **Istnieje wiele algorytmów do znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego.**
- **Jeden z nich to algorytm Kruskala, który stanowi proste rozszerzenie algorytmu znajdowania spójnych składowych. Wymagane zmiany to:**
 - ▣ **należy rozpatrywać krawędzie w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet,**
 - ▣ **należy dołączyć krawędź do drzewa rozpinającego tylko w takim wypadku gdy jej końce należą do dwóch różnych spójnych składowych.**

Algorytm Kruskala

24



Graf nieskierowany



Minimalne drzewo rozpinające
(w nawiasach podano kolejność dodawanych krawędzi)

Algorytm Kruskala

25

- Algorytm Kruskala jest dobrym przykładem **algorytmu zachłannego** (ang. greedy algorithm), w przypadku którego podejmowany jest szereg decyzji, z których każdą stanowi wybranie opcji najlepszej w danym momencie.
 - Lokalnie podejmowane decyzje polegają w tym przypadku na wyborze krawędzi dodawanej do formowanego drzewa rozpinającego.
 - Za każdym razem wybierana jest krawędź o najmniejszej wartości etykiety, która nie narusza definicji drzewa rozpinającego, zabraniającej utworzenia cyklu.
- Dla algorytmu Kruskala można wykazać, że jego rezultat jest optymalny globalnie, to znaczy że daje on w wyniku drzewo rozpinające o minimalnej wadze.
- Czas wykonania algorytmu jest $O(m \log m)$ gdzie m to jest większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

26

- **Niech G będzie nieskierowanym grafem spójnym.**
(Dla niektórych etykiet dopuszczamy dodanie nieskończenie malej wartości tak aby wszystkie etykiety były różne, graf G będzie miał wobec tego unikatowe minimalne drzewo rozpinające, które będzie jednym spośród minimalnych drzew rozpinających grafu G_0 oryginalnych wagach).
- **Niech ciąg e_1, e_2, \dots, e_m oznacza wszystkie krawędzie grafu G w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet, rozpoczynając od najmniejszej.**
- **Niech K będzie drzewem rozpinającym grafu G_0 odpowiednio zmodyfikowanych etykietach, utworzonym przez zastosowanie algorytmu Kruskala, a T niech będzie unikatowym minimalnym drzewem rozpinającym grafu G .**

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

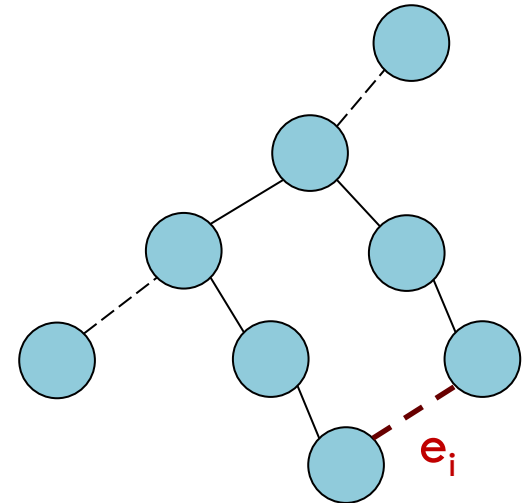
27

- Należy udowodnić że K i T stanowią to samo drzewo. Jeśli są różne musi istnieć co najmniej jedna krawędź, która należy do jednego z nich a nie należy do drugiego.
- Niech e_i oznacza pierwsza taka krawędź spośród uporządkowanych krawędzi, to znaczy każda z krawędzi e_1, e_2, \dots, e_{i-1} albo należy do obu drzew K i T albo nie należy do żadnego z nich.
- Istnieją dwa przypadki w zależności czy krawędź e_i należy do drzewa K czy do drzewa T . W każdym z tych przypadków wykażemy sprzeczność, co będzie stanowić dowód, że e_i nie może istnieć, a stąd że $K=T$, oraz że K stanowi minimalne drzewo rozpinające grafu G .

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

28

- **Przypadek 1:**
 - krawędź e_i należy do T , ale nie należy do K .
 - Jeżeli algorytm Kruskala odrzuca e_i , oznacza to że e_i formuje cykl z pewną drogą P , utworzoną z uprzednio wybranych krawędzi drzewa K .
 - Jeżeli krawędzie drogi P należą do K to należą także do T .
 - A więc $P + e_i$ utworzyłoby cykl w T co jest sprzeczne z definicją drzewa rozpinającego. Stąd **niemożliwe jest** aby e_i należała do T a nie należała do K .



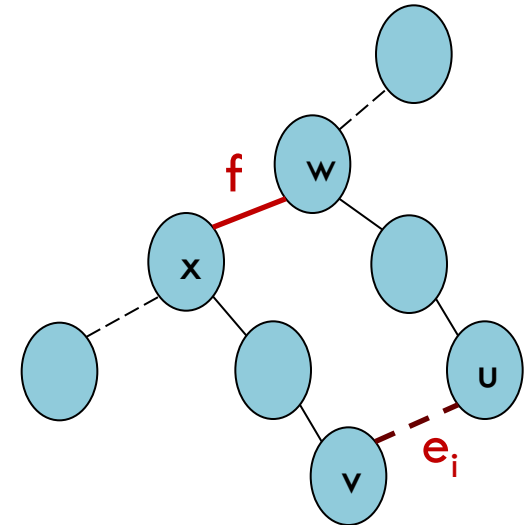
Droga P (linia ciągła) należy zarówno do drzewa T jak i K , krawędź e_i należy tylko do T .

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

29

Przypadek 2:

- krawędź e_i należy do K , ale nie należy do T . Niech krawędź e_i łączy wierzchołki u i v . Ponieważ drzewo T jest spójne, musi istnieć w T pewna acykliczna droga z wierzchołka u do v . Niech nosi ona nazwę Q . Ponieważ w skład Q nie wchodzi e_i , $Q + e_i$ tworzy cykl prosty w grafie G . Rozpatrzmy dwie sytuacje:
 - krawędź e_i posiada najwyższą wartość etykiety. Musiałoby to oznaczać że K zawiera cykl co jest niemożliwe.
 - na drodze Q istnieje krawędź f która ma wartość etykiety wyższą niż e_i . Można by więc usunąć f a wprowadzić e_i nie niszcząc spójności. A więc rozpięte drzewo miałoby wartość mniejsza niż wartość dla T co jest w sprzeczności z początkowym twierdzeniem że T jest minimalne.



Droga Q (linia ciągła) należy do drzewa T , można dodać krawędź e_i i usunąć krawędź f

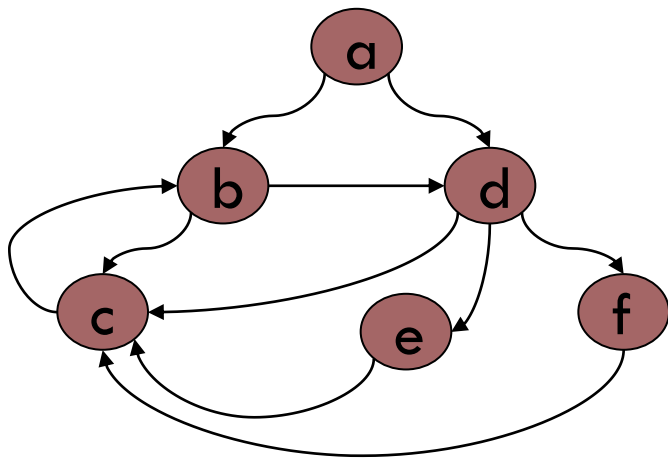
Algorytm przeszukiwania w głąb

30

- Jest to podstawowa metoda badania grafów skierowanych.
- Bardzo podobna do stosowanych dla drzew, w których startuje się od korzenia i rekurencyjnie bada wierzchołki potomne każdego odwiedzonego wierzchołka.
- Trudność polega na tym że w grafie mogą pojawiać się cykle... Należy wobec tego znaczyć wierzchołki już odwiedzone i nie wracać więcej do takich wierzchołków.
 - Z uwagi na fakt, że w celu uniknięcia dwukrotnego odwiedzenia tego samego wierzchołka jest on odpowiednio oznaczany, graf w trakcie jego badania zachowuje się podobnie do drzewa.
- W rzeczywistości można narysować drzewo, którego krawędzie rodzic-potomek będą niektórymi krawędziami przeszukiwanego grafu G .
 - Takie drzewo nosi nazwę **drzewa przeszukiwania w głąb** (ang. depth-first-search) dla danego grafu.

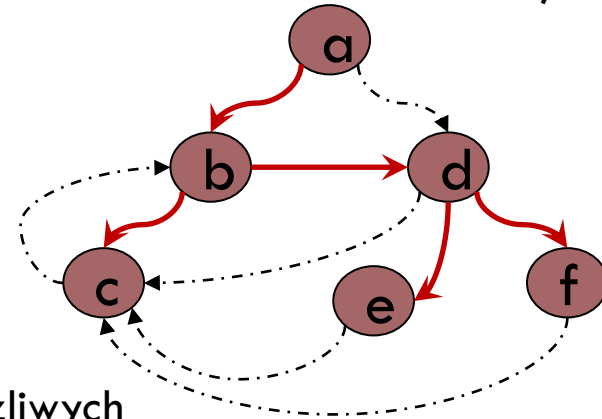
Drzewa przeszukiwania w głąb

31

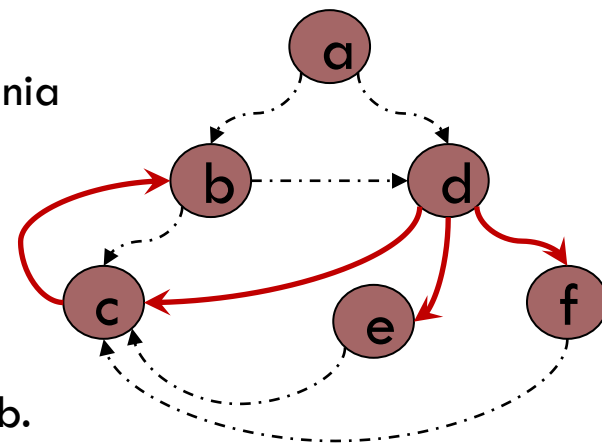


Graf skierowany

Las przeszukiwania:
dwa drzewa o korzeniach a, d



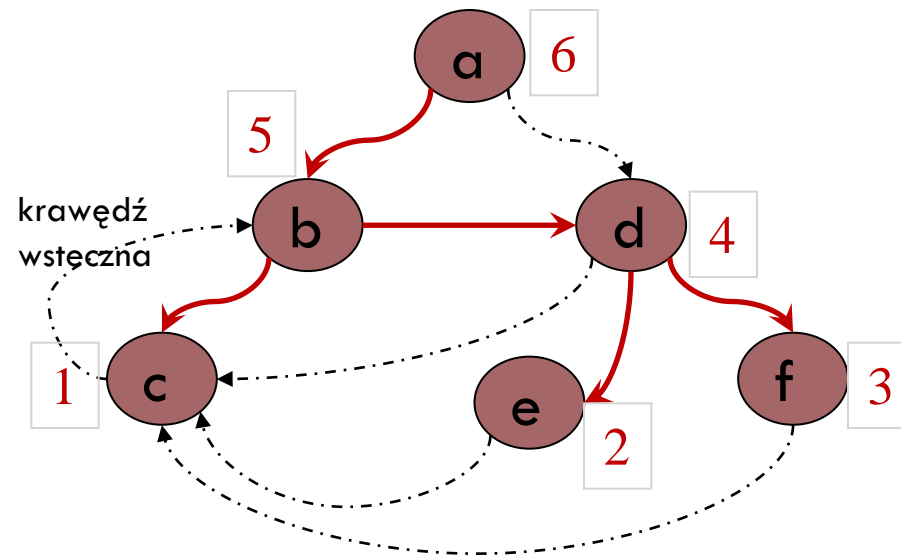
Jedno z możliwych
drzew
przeszukiwania



Las przeszukiwania w głąb.

Drzewo przeszukiwania w głąb

32



- Po (podczas) konstruowaniu drzewa przeszukiwania w głąb można ponumerować jego wierzchołki w **kolejności wstecznej** (ang. *post-order*).

Cykle w grafie skierowanym

33

- Podczas przeszukiwania w głąb grafu skierowanego G można wszystkim wierzchołkom przypisać numery zgodne z **kolejnością wsteczną** w czasie rzędu $O(m)$.
- **Krawędzie wsteczne** to takie dla których początki są równe lub mniejsze końcom ze względu na numerację wsteczną.
Zawsze gdy istnieje krawędź wsteczna w grafie musi istnieć cykl.
- Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Aby stwierdzić czy w grafie występuje cykl należy przeprowadzić numerację wsteczną a następnie sprawdzić wszystkie krawędzie.
- Całkowity czas wykonania **testu cykliczności** to $O(m)$, gdzie m to większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.

Sortowanie topologiczne

34

- Załóżmy, że graf skierowany G jest acykliczny.
- Dla każdego grafu możemy określić las poszukiwania w głąb, określając numerację wsteczną jego wierzchołków.
- Załóżmy, że (n_1, n_2, \dots, n_k) określa listę wierzchołków grafu G w kolejności odwrotnej do numeracji wstecznej. To znaczy: n_1 jest wierzchołkiem opatrzonym numerem n , n_2 wierzchołkiem opatrzonym numerem $n-1$ i ogólnie wierzchołek n_i jest opatrzony numerem $n-i+1$.
- Kolejność wierzchołków na tej liście ma tę własność, że wszystkie krawędzie grafu G biegną od początku do końca, tzn. początek poprzedza koniec.

Sortowanie topologiczne

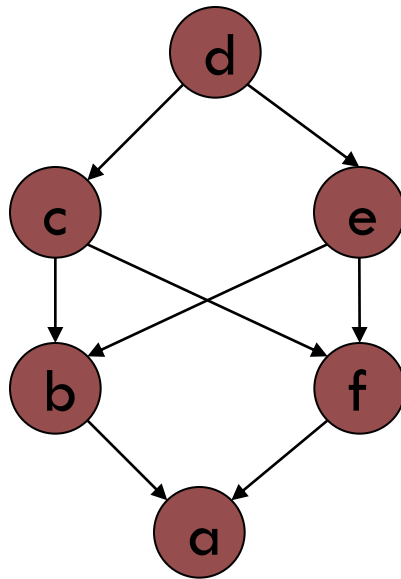
35

- Takie uporządkowanie nazywamy **topologicznym** (ang. *topological order*), a proces znajdowania takiego uporządkowania to **sortowanie topologiczne** (ang. *topological sorting*).
- Jedynie grafy acykliczne posiadają uporządkowanie topologiczne.
- Wykonując poszukiwanie w głąb możemy je określić w czasie $O(m)$.
- Jedną z możliwości: **odkładać kolejno znalezione wierzchołki „na stos”**. Po zakończeniu lista znajdująca się na stosie będzie reprezentować uporządkowanie topologiczne grafu.

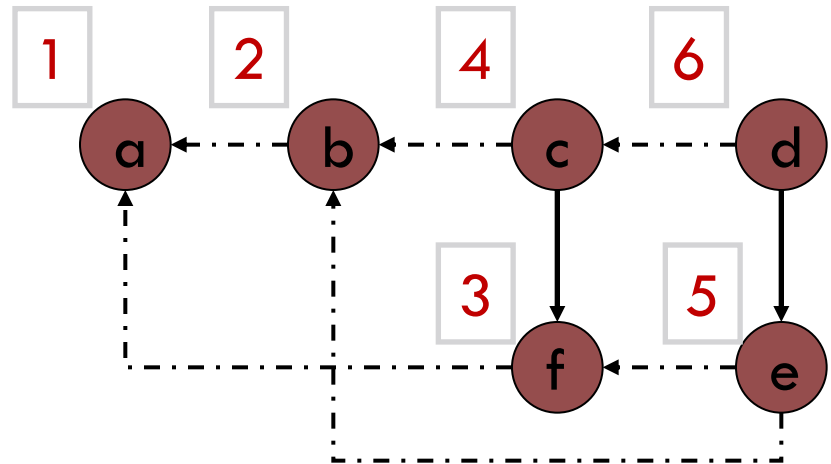
Sortowanie topologiczne

36

Uporządkowanie topologiczne to (d, e, c, f, b, a)



Skierowany graf cykliczny



Las przeszukiwania w głąb

Sortowanie topologiczne

37

- **Uporządkowanie topologiczne** przydaje się **wówczas, gdy istnieją pewne ograniczenia odnośnie kolejności w jakiej mają być wykonywane zadania.**
- **Jeśli krawędź wiodącą od wierzchołka u do wierzchołka v jest rysowana wówczas, gdy zadanie u musi zostać wykonane przed zadaniem v , to uporządkowaniem zapewniającym wykonanie wszystkich zadań jest właśnie uporządkowanie topologiczne.**

Sortowanie topologiczne

38

- Podobny przykład to **graf wywołań** nierekurencyjnego zbioru funkcji, kiedy należy przeanalizować każdą funkcję dopiero po dokonaniu analizy funkcji ją wywołującej.
 - ▣ Jeśli krawędzie wiodą od funkcji wywołujących do wywoływanych, kolejność, w której należy przeprowadzić takie analizy, to odwrócenie porządku topologicznego, czyli **uporządkowanie wsteczne**.
 - ▣ Zapewnia to że każda funkcja zostanie przeanalizowana dopiero po dokonaniu analizy wszystkich innych wywoływanych przez nią funkcji.

Sortowanie topologiczne

39

- **Istnienie cyklu** w grafie reprezentującym priorytety zadań mówi o tym, że nie istnieje takie uporządkowanie, dzięki któremu możliwe byłoby wykonanie wszystkich zadań.
- **Istnienie cyklu** w grafie wywołań pozwala stwierdzić występowanie rekurencji.

Problem osiągalności

40

- **Naturalne pytanie związane z grafem skierowanym jest:**
 - ▣ **które wierzchołki są osiągalne z danego wierzchołka u przy założeniu, że po grafie można się poruszać tylko zgodnie z kierunkiem krawędzi? Taki zbiór wierzchołków określa się mianem **zbioru osiągalności** (ang. *reachable set*) danego wierzchołka u .**
- **Możemy wykorzystać rekurencyjną funkcję poszukiwania w głąb. Całkowity czas wykonania takiego zapytania to $O(m n)$.**

Znajdowanie spójnych składowych

41

- Do znajdowania spójnych składowych możemy użyć algorytmu poszukiwania w głąb.
- Traktujemy graf nieskierowany jako graf skierowany, w którym każda krawędź nieskierowana została zastąpiona dwiema krawędziami skierowanymi wiodącymi w obu kierunkach.
- Do reprezentacji grafu używamy list sąsiedztwa.
- Tworzymy las przeszukiwania w głąb grafu skierowanego. Każde drzewo w tym lesie odpowiada jednej składowej spójności grafu nieskierowanego.
- Czas wykonania algorytmu $O(m)$
 - ▣ przy użyciu struktury drzewiastej czas wykonania wynosi $O(m \log n)$.

Algorytm Dikstry

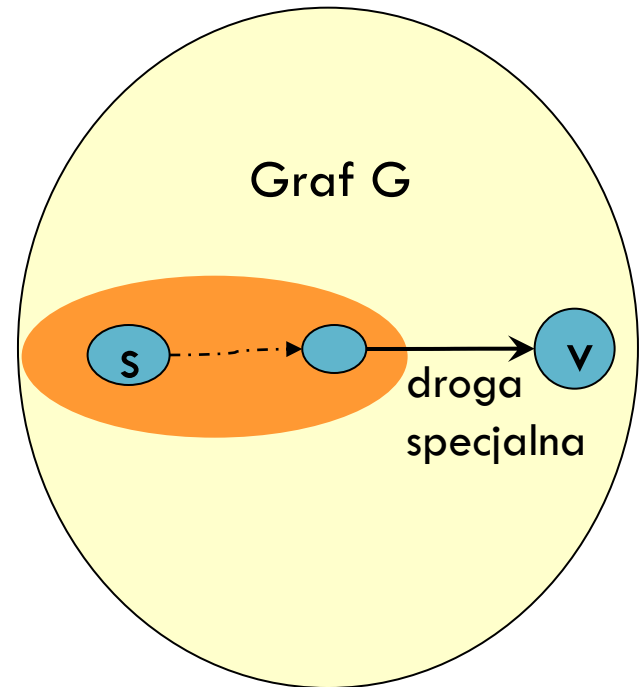
42

- Szukamy najkrótszej drogi pomiędzy dwoma wierzchołkami
 - ▣ Rozpatrujemy graf G (skierowany lub nieskierowany), w którym wszystkie krawędzie zaetykietowano wartościami reprezentującymi ich długości.
 - ▣ **Długość** (ang. distance) danej drogi stanowi wartość sumy etykiet związanych z nią krawędzi. Minimalna odległość z wierzchołka u do wierzchołka v to minimalna długość którejs z dróg od u do v .

Algorytm Dikstry

43

- Traktujemy wierzchołek s jako **wierzchołek źródłowy**. Na etapie pośrednim wykonywania algorytmu w grafie G istnieją tzw. **wierzchołki ustalone** (ang. *settled*), tzn. takie dla których znane są odległości minimalne. W szczególności zbiór takich wierzchołków zawiera również wierzchołek s .
- Dla **nieustalonego wierzchołka** v należy zapamiętać długość najkrótszej **drogi specjalnej** (ang. *special path*) czyli takiej która rozpoczyna się w wierzchołku źródłowym, wiedzie przez ustalone wierzchołki, i na ostatnim etapie przechodzi z obszaru ustalonego do wierzchołka v .



Algorytm Dikstry

44

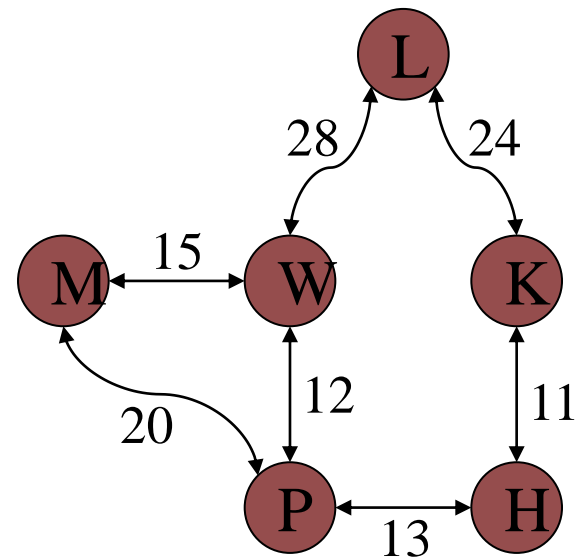
- Dla każdego wierzchołka u zapamiętujemy wartość $\text{dist}(u)$.
- Jeśli u jest wierzchołkiem ustalonym, to $\text{dist}(u)$ jest długością najkrótszej drogi ze źródła do wierzchołka u .
- Jeśli u nie jest wierzchołkiem ustalonym, to $\text{dist}(u)$ jest długością drogi specjalnej ze źródła do u .
- Na czym polega **ustalanie wierzchołków**:
 - znajdujemy wierzchołek v który jest nieustalony ale posiada najmniejszą $\text{dist}(v)$ ze wszystkich wierzchołków nieustalonych
 - przyjmujemy wartość $\text{dist}(v)$ za minimalną odległość z s do v
 - dostosowujemy wartości wszystkich $\text{dist}(u)$ dla innych wierzchołków, które nie są ustalone, wykorzystując fakt, że wierzchołek v jest już ustalony.
 - Czyli porównujemy stare $\text{dist}(u)$ z wartością $\text{dist}(v) + \text{etykieta}(v, u)$ jeżeli taka (v, u) krawędź istnieje.
- Czas wykonania algorytmu jest $O(m \log n)$.

Algorytm Dikstry

45

Etapy wykonania algorytmu

| MIASTO | ETAPY ustalania wierzchołków | | | | |
|--------|------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |
| H | 0* | 0* | 0* | 0* | 0* |
| P | 13 | 13 | 13* | 13* | 13* |
| M | INF | INF | 33 | 33 | 33* |
| W | INF | INF | 25 | 25* | 25* |
| L | INF | 35 | 35 | 35 | 35 |
| K | 11 | 11* | 11* | 11* | 11* |



Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dijkstra

46

- **W celu wykazania poprawności algorytmu Dijkstra należy przyjąć, że etykiety krawędzi są nieujemne.**
- **Indukcyjny dowód poprawności względem k prowadzi do stwierdzenia że:**
 - 1) dla każdego wierzchołka ustalonego u , wartość $\text{dist}(u)$ jest minimalną odległością z s do u , a najkrótsza droga do u składa się tylko z wierzchołków ustalonych.**
 - 2) dla każdego nieustalonego wierzchołka u , wartość $\text{dist}(u)$ jest minimalną długością drogi specjalnej z s do u (jeśli droga nie istnieje wartość wynosi INF).**

□ Podstawa:

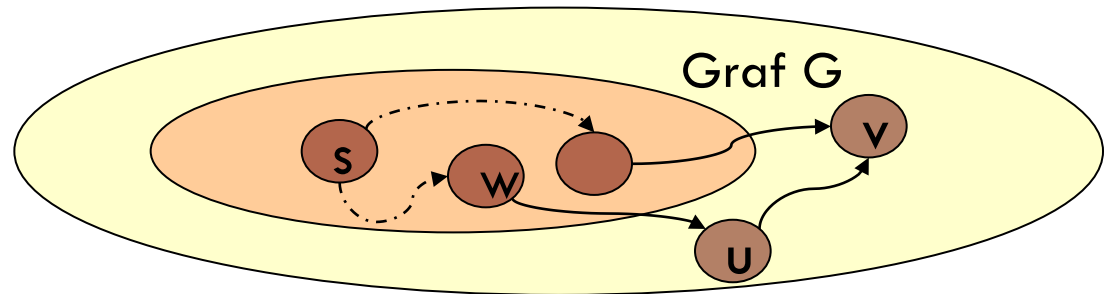
- Dla $k=1$ wierzchołek s jest jedynym wierzchołkiem ustalonym. Inicjalizujemy $\text{dist}(s)$ wartością 0 , co spełnia warunek (1).
- Dla każdego innego wierzchołka u , $\text{dist}(u)$ jest inicjalizowane wartością etykiety krawędzi (s, u) , o ile taka istnieje. Jeżeli nie istnieje, wartością inicjalizacji jest INF . Zatem spełniony jest również warunek (2).

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

48

□ Krok indukcyjny:

- ▣ Załóżmy, że warunki (1) i (2) są spełnione po ustaleniu k wierzchołków oraz niech v będzie $(k+1)$ ustalonym wierzchołkiem.



Hipotetyczna krótsza droga do v
wiodąca przez w i u .

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

49

□ Krok indukcyjny:

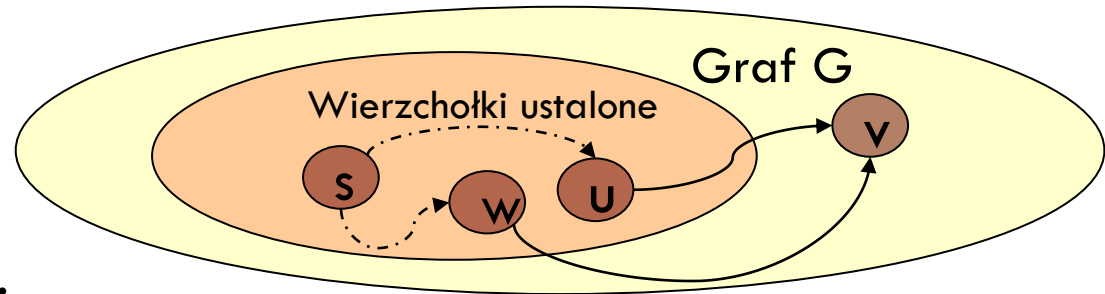
- **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ $\text{dist}(v)$ jest najmniejszą długością drogi z s do v .**
 - Załóżmy, że tak nie jest. Musiała by więc istnieć hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u . Jednakże wierzchołek v został obrany jako $k+1$ ustalony, co oznacza, że w tym momencie $\text{dist}(u)$ nie może być mniejsze od $\text{dist}(v)$, gdyż wówczas jako $(k+1)$ wierzchołek wybrany zostałby wierzchołek u .
 - Na podstawie warunku (2) hipotezy indukcyjnej wiadomo, że $\text{dist}(u)$ jest minimalną długością drogi specjalnej wiodącej do u . Jednak droga z s przez w do u jest drogą specjalną, tak więc jej długość równa jest co najmniej $\text{dist}(u)$. Stąd domniemana krótsza droga z s do v wiodąca przez w i u ma długość równą co najmniej $\text{dist}(v)$, ponieważ pierwsza jej część, - z s do u - ma długość $\text{dist}(u)$, a $\text{dist}(u) \geq \text{dist}(v)$. Stąd warunek (1) jest spełniony dla $k+1$ wierzchołków.

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

50

□ Krok indukcyjny:

- ▣ **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ $\text{dist}(v)$ jest najmniejszą długością drogi z s do v .**



Dwie możliwości określenia przedostatniego wierzchołka w drodze specjalnej do u .

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

51

□ Krok indukcyjny (cd):

- Teraz należy pokazać, że warunek (2) jest spełniony po dodaniu do wierzchołków ustalonych wierzchołka v .
 - Weźmy pod uwagę pewien wierzchołek u , który wciąż pozostaje nieustalony po dodaniu v do wierzchołków ustalonych. W najkrótszej drodze specjalnej do u musi istnieć pewien wierzchołek przedostatni. Wierzchołkiem tym może być zarówno v , jak i pewien inny wierzchołek w .
 - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest v . Długość drogi z s przez v do u wynosi $\text{dist}(v) + \text{wartość etykiety } v \rightarrow u$.
 - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest w . Na podstawie warunku (1) hipotezy indukcyjnej można stwierdzić, że najkrótsza droga z s do w składa się jedynie z wierzchołków, które zostały ustalone przed v , stąd wierzchołek v nie występuje w tej drodze.
 - A więc długość drogi specjalnej do u się nie zmienia po dodaniu v do wierzchołków ustalonych.
 - Ponieważ w momencie ustalania wierzchołka v przeprowadzona jest operacja dostosowywania $\text{dist}(u)$, warunek (2) jest spełniony.

Algorytmy znajdowania najkrótszych dróg

52

- Jeśli potrzebne jest poznanie minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków w grafie o n wierzchołkach, które posiadają etykiety o wartościach nieujemnych, można uruchomić algorytm Dijkstry dla każdego z n wierzchołków jako wierzchołka źródłowego.
- Czas wykonania algorytmu Dijkstry wynosi $O(m \log n)$, gdzie m oznacza większą wartość z liczby wierzchołków i liczby krawędzi. Znalezienie w ten sposób minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków zajmuje czas rzędu $O(m n \log n)$.
- Jeśli m jest bliskie swojej maksymalnej wartości $m \approx n^2$ to można skorzystać z implementacji algorytmu Dijkstry który działa w czasie $O(n^2)$. Wykonanie go n razy daje czas rzędu $O(n^3)$.

Algorytmy znajdowania najkrótszych dróg

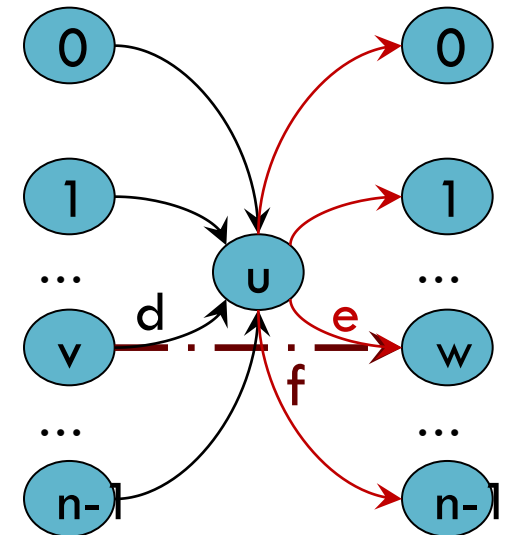
53

- Istnieje inny algorytm znajdowania **minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków**, noszący nazwę algorytmu **Floyda-Warshalla**.
- Jego wykonanie zajmuje czas rzędu **$O(n^3)$** . Operuje na macierzach sąsiedztwa a nie listach sąsiedztwa i jest koncepcyjnie prostszy.

Algorytm Floyda-Warshalla

54

- Podstawa algorytmu jest działanie polegające na rozpatrywaniu po kolei **każdego wierzchołka** grafu jako **elementu centralnego** (ang. *pivot*).
- Kiedy wierzchołek **u** jest elementem centralnym, staramy się wykorzystać fakt, że **u** jest wierzchołkiem pośrednim między wszystkimi parami wierzchołków.
- Dla każdej pary wierzchołków, na przykład **v** i **w**, jeśli suma etykiet krawędzi **(v, u)** oraz **(u, w)** (na rysunku **d+e**), jest mniejsza od bieżąco rozpatrywanej etykiety **f** krawędzi wiodącej od **v** do **w**, to wartość **f** jest zastępowana wartością **d+e**.

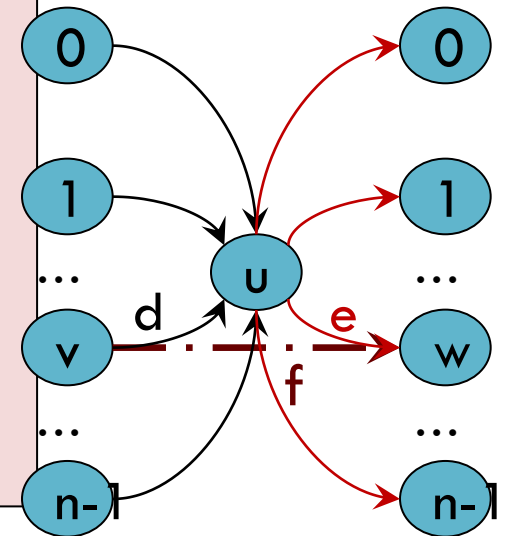


Algorytm Floyda-Warshalla

55

Node u, v, w ;

```
for (v = 0; w < MAX; v++)  
  for (w=0; w < MAX; w++)  
    dist[v][w] = edge[v][w];  
for (u=0; u < MAX; u++)  
  for (v=0; v < MAX; v++)  
    for (w=0; w < MAX; w++)  
      if( dist[v][u]+dist[u][w] < dist[v][w])  
        dist[v][w] = dist [v][u] + dist [u][w];
```

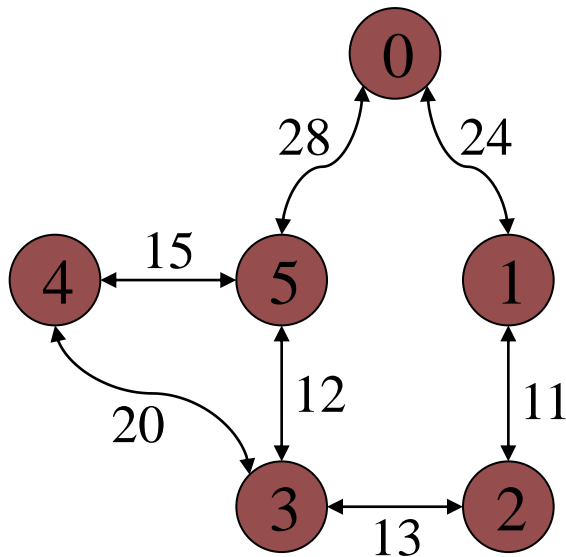


$edge[v][w]$ –etykieta krawędzi, wierzchołki numerowane

Algorytm Floyda-Warshalla

56

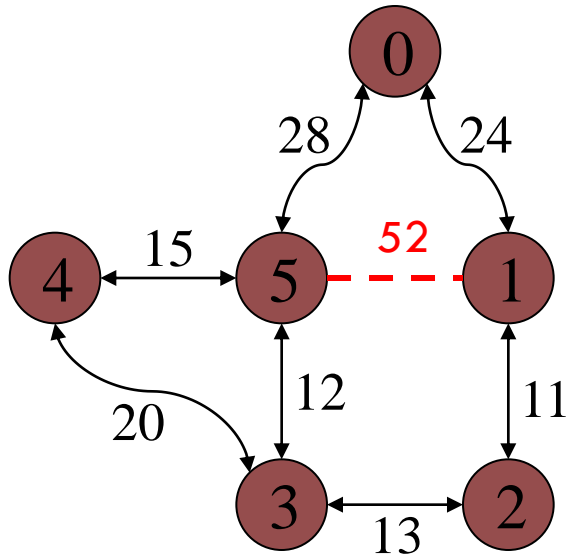
Macierz która odzwierciedla początkową postać macierzy odległości (ang. *dist*)



| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 24 | INF | INF | INF | 28 |
| 1 | 24 | 0 | 11 | INF | INF | INF |
| 2 | INF | 11 | 0 | 13 | INF | INF |
| 3 | INF | INF | 13 | 0 | 20 | 12 |
| 4 | INF | INF | INF | 20 | 0 | 15 |
| 5 | 28 | INF | INF | 12 | 15 | 0 |

Algorytm Floyda-Warshalla

57

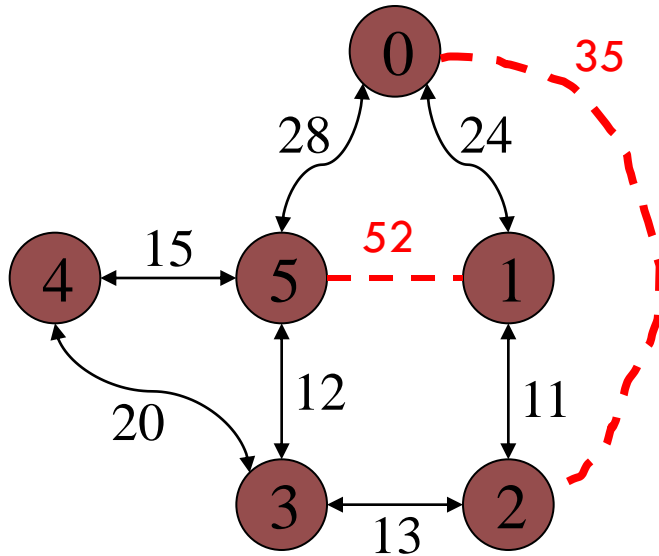


Macierz odległości, po użyciu wierzchołka **0** jako elementu centralnego

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0 | 0 | 24 | INF | INF | INF | 28 |
| 1 | 24 | 0 | 11 | INF | INF | 52 |
| 2 | INF | 11 | 0 | 13 | INF | INF |
| 3 | INF | INF | 13 | 0 | 20 | 12 |
| 4 | INF | INF | INF | 20 | 0 | 15 |
| 5 | 28 | 52 | INF | 12 | 15 | 0 |

Algorytm Floyda-Warshalla

58



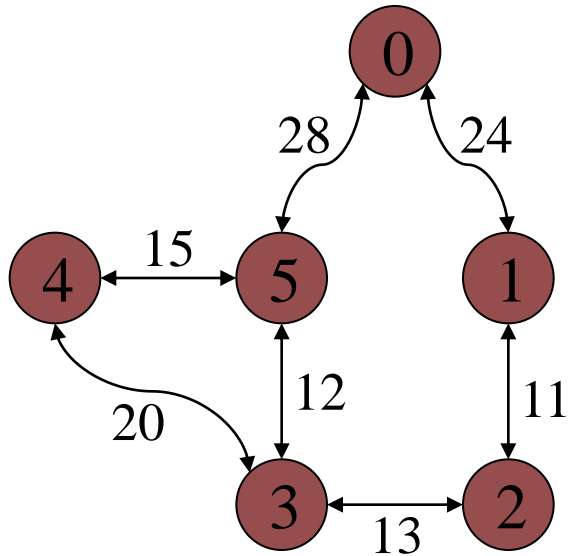
Macierz odległości, po użyciu wierzchołka **1** jako elementu centralnego

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| 0 | 0 | 24 | 35 | INF | INF | 28 |
| 1 | 24 | 0 | 11 | INF | INF | 52 |
| 2 | 35 | 11 | 0 | 13 | INF | 63 |
| 3 | INF | INF | 13 | 0 | 20 | 12 |
| 4 | INF | INF | INF | 20 | 0 | 15 |
| 5 | 28 | 52 | 63 | 12 | 15 | 0 |

itd... itd...

Algorytm Floyda-Warshalla

59



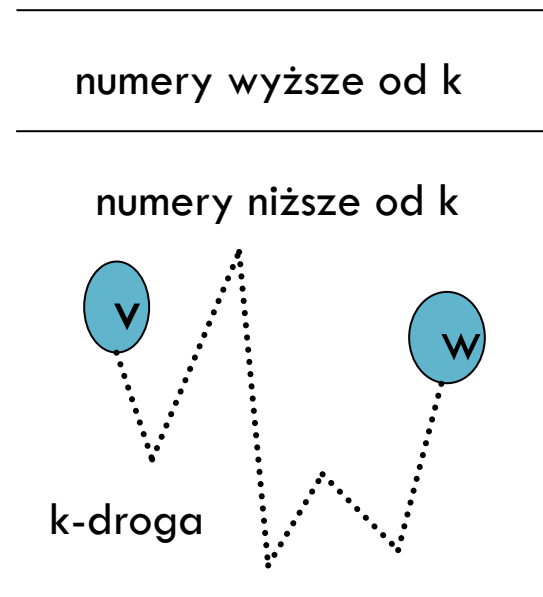
Końcowa postać macierzy odległości

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 0 | 24 | 35 | 40 | 43 | 28 |
| 1 | 24 | 0 | 11 | 24 | 44 | 52 |
| 2 | 35 | 11 | 0 | 13 | 33 | 25 |
| 3 | 40 | 24 | 13 | 0 | 20 | 12 |
| 4 | 43 | 44 | 33 | 20 | 0 | 15 |
| 5 | 28 | 36 | 25 | 12 | 15 | 0 |

Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

60

- Na dowolnym etapie działania algorytmu Floyda-Warshalla odległość z wierzchołka v do wierzchołka w stanowi długość najkrótszej z tych dróg, które wiodą jedynie przez wierzchołki użyte dotąd jako elementy centralne.
- Ponieważ wszystkie wierzchołki zostają w końcu użyte jako elementy centralne, elementy $\text{dist}[v][w]$ zawierają po zakończeniu działań minimalne długości wszystkich możliwych dróg.



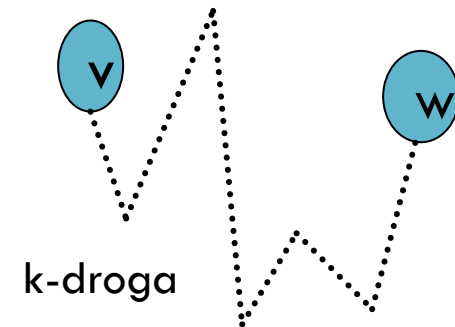
Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

61

- Definiujemy **k-drogę** z wierzchołka **v** do wierzchołka **w** jako drogę z **v** do **w** taką, że żaden jej wierzchołek pośredni nie ma numeru wyższego od **k**.
- Należy zauważyć, że nie ma ograniczenia odnośnie tego, że **v** lub **w** mają mieć wartość **k** lub mniejszą.
- **k=-1** oznacza że droga nie posiada wierzchołków pośrednich.

numery wyższe od k

numery niższe od k



Dowód indukcyjny

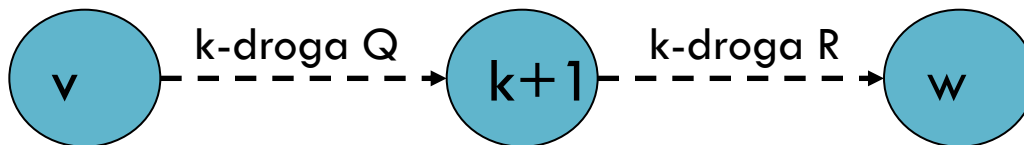
62

□ Teza indukcyjna $S(k)$:

- jeżeli etykiety krawędzi mają wartości nieujemne, to po przebiegu k – pętli, element $\text{dist}[v][w]$ ma wartość najkrótszej k – drogi z v do w lub ma wartość INF , jeżeli taka droga nie istnieje.

□ Podstawa:

- Podstawą jest warunek $k = -1$. Krawędzie i drogi składające się z pojedynczego wierzchołka są jedynymi (-1) drogami.



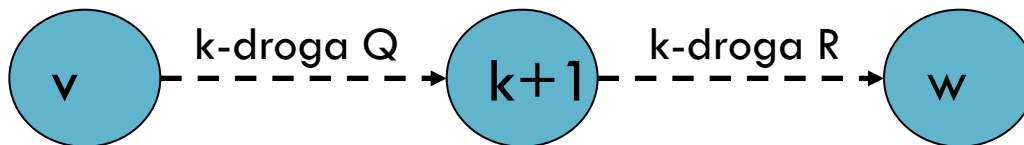
k -drogę P można rozbić na dwie k -drogi, Q oraz R .

Dowód indukcyjny

63

□ Krok indukcyjny:

- Załóżmy że $S(k)$ jest spełnione i rozważmy co się dzieje z elementami $\text{dist}[v][w]$ w czasie $k+1$ przebiegu pętli.
- Załóżmy, że P jest najkrótszą $(k+1)$ – drogą wiodącą z v do w . Mamy do czynienia z dwoma przypadkami, w zależności czy droga P prowadzi przez wierzchołek $k+1$.



k-drogę P można rozbić na dwie k-drogi, Q oraz R .

Dowód indukcyjny

64

□ **Przypadek 1:**

- **Jeżeli P jest k -drogą, to znaczy, kiedy P nie wiedzie przez wierzchołek $k+1$, to na podstawie hipotezy indukcyjnej wartość elementu $\text{dist}[v][w]$ jest równa długości P po zakończeniu k -tej iteracji. Nie można zmienić wartości $\text{dist}[v][w]$ podczas przebiegu wykonywanego dla wierzchołka $k+1$ traktowanego jako element centralny, gdyż nie istnieją żadne krótsze $(k+1)$ -drogi.**

□ **Przypadek 2:**

- **Jeżeli P jest $(k+1)$ -droga, można założyć, że P przechodzi przez wierzchołek $k+1$ tylko raz, gdyż cykl nigdy nie może spowodować zmniejszenia odległości (przy założeniu że wszystkie etykiety mają wartości nieujemne).**
- **Stąd droga P składa się z k -drogi Q , wiodącej od wierzchołka v do $k+1$, oraz k -drogi R , wiodącej od wierzchołka $k+1$ do w . Na podstawie hipotezy indukcyjnej wartości elementów $\text{dist}[v][k+1]$ oraz $\text{dist}[k+1][w]$ będą długościami dróg odpowiednio, Q i R , po zakończeniu k -tej iteracji.**

Dowód indukcyjny

65

- **Ostatecznie wnioskujemy, że w $(k+1)$ przebiegu, wartością elementu $\text{dist}[v][w]$ staje się długość najkrótszej $(k+1)$ -drogi dla wszystkich wierzchołków v oraz w .**
- **Jest to twierdzenie $S(k+1)$, co oznacza koniec kroku indukcyjnego.**
- **Weźmy teraz, że $k=n-1$. Oznacza to, że wiemy iż po zakończeniu wszystkich n przebiegów, wartość $\text{dist}[v][w]$ będzie minimalną odległością dowolnej $(n-1)$ -drogi wiodącej z wierzchołka v do w . Ponieważ każda droga jest $(n-1)$ drogą, więc $\text{dist}[v][w]$ jest minimalną długością drogi wiodącej z wierzchołka v do w .**

Podsumowanie

66

| PROBLEM | ALGORYTM(Y) | CZAS WYKONANIA |
|--|------------------------------|-----------------------------------|
| Minimalne drzewo rozpinające | Algorytm Kruskala | $O(m \log n)$ |
| Znajdowanie cykli | Przeszukiwanie w głąb | $O(m)$ |
| Uporządkowanie topologiczne | Przeszukiwanie w głąb | $O(m)$ |
| Osiągalność w przypadku pojedynczego źródła | Przeszukiwanie w głąb | $O(m)$ |
| Spójne składowe | Przeszukiwanie w głąb | $O(m)$ |
| Najkrótsza droga dla pojedynczego źródła | Algorytm Dijskry | $O(m \log n)$ |
| Najkrótsza droga dla wszystkich par | Algorytm Dijskry | $O(m n \log n)$ |
| | Algorytm Floyd | $O(n^3)$ |

Pytania do egzaminu

67

- 1) **Co to jest grafowy model danych? Omów podstawową terminologię dotyczącą grafów**
- 2) **Co to znaczy implementacja przy pomocy macierzy sąsiedztwa? Zilustruj przykładem.**
- 3) **Co to znaczy implementacja przy pomocy listy sąsiedztwa? Zilustruj przykładem.**
- 4) **Co to jest składowa spójna grafu? Co to jest drzewo rozpinające?**
- 5) **Na czym polega algorytm Kruskala dla znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego?**
- 6) **Na czym polega sortowanie topologiczne grafu?**
- 7) **Na czym polega algorytm Dikstry do znajdowania najkrótszej drogi, jaka jest jego złożoność obliczeniowa?**
- 8) **Na czym polega algorytm Floyda do znajdowania najkrótszej drogi, jak jest jego złożoność obliczeniowa?**