TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

27/11/2017

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 7

Modele danych: grafy

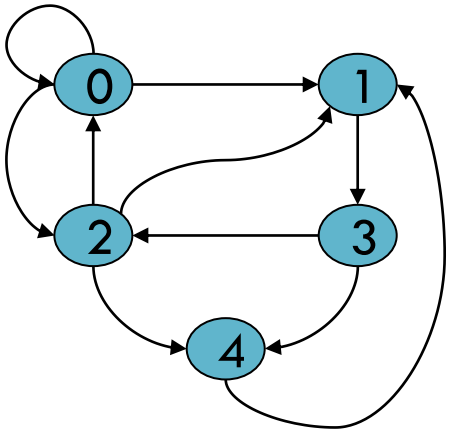
- **Podstawowe pojęcia**
- **Grafy wywołań**
- **Grafy skierowane i nieskierowane**
- **Grafy planarne, kolorowanie grafów**
- **Implementacja grafów**
  - **Listy sąsiedztwa**
  - **Macierze sąsiedztwa**
- **Składowe spójne, algorytm Kruskala**
- **Sortowanie topologiczne**
- **Najkrótsze drogi: algorytm Dikstry i Floyda-Warshalla**

Graf

- Graf to jest relacja binarna.
- Dla grafów mamy możliwość wizualizacji jako zbiór punktów (zwanych wierzchołkami) połączonych liniami lub strzałkami (nazwanych krawędziami). Pod tym względem graf stanowi uogólnienie drzewiastego modelu danych.
- Podobnie jak drzewa, grafy występują w różnych postaciach: grafów skierowanych i nieskierowanych lub etykietowanych i niezaetykietowanych.
- Grafy są przydatne do analizy szerokiego zakresu problemów: obliczanie odległości, znajdowanie cykliczności w relacjach, reprezentacji struktury programów, reprezentacji relacji binarnych, reprezentacji automatów i układów elektronicznych.

Podstawowe pojęcia

- **Graf skierowany (ang. directed graph)**
  Składa się z następujących elementów:
  - ***Zbioru V wierzchołków (ang. nodes, vertices)***
  - **Relacji binarnej E na zbiorze V. Relacje E nazywa się zbiorem krawędzi (ang. edges) grafu skierowanego. Krawędzie stanowią zatem pary wierzchołków (u,v).**

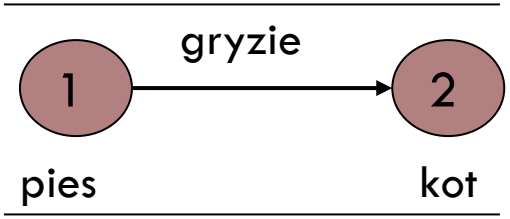


$V = \{0,1,2,3,4\}$

$E = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1) \}$

Podstawowe pojęcia

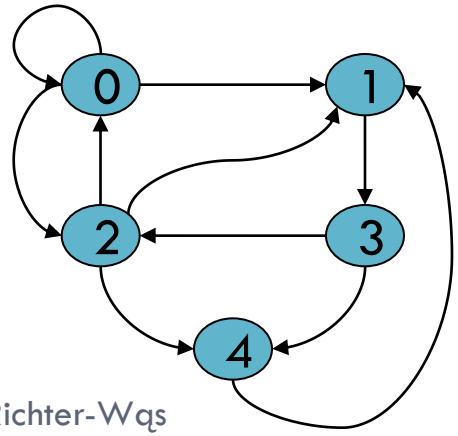
- **Etykiety:**
  - **Podobnie jak dla drzew, dla grafów istnieje możliwość przypisania do każdego wierzchołka etykiety (ang. label).**
  - **Nie należy mylić nazwy wierzchołka z jego etykietą. Nazwy wierzchołków musza być niepowtarzalne, ale kilka wierzchołków może być oznaczonych ta sama etykieta.**



- **Drogi:**
  - **Droga (ang. path) w grafie skierowanym stanowi listę wierzchołków, $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ taka, że występuje krawędź łącząca każdy wierzchołek z następnym, to znaczy $(n_i, n_{i+1}) \in E$ dla i=1, 2, …, k. Długość (ang. lengh) drogi wynosi k-1, co stanowi liczbę krawędzi należących do tej samej drogi.**

Podstawowe pojęcia

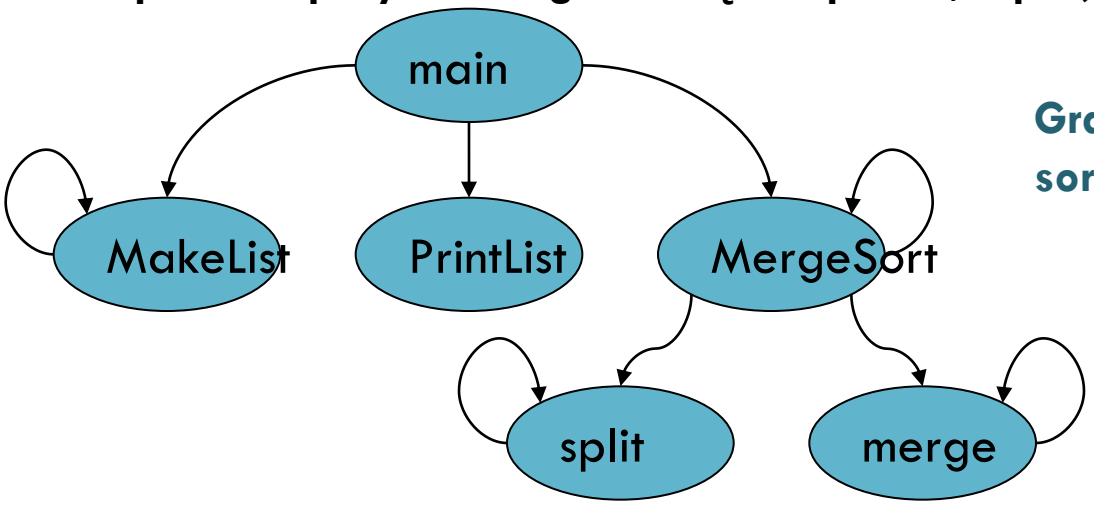
- **Grafy cykliczne i acykliczne:**
  - **Cykl (ang. cycle) w grafie skierowanym jest drogą o długości 1 lub więcej, która zaczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.**
  - **Długość cyklu jest długością drogi. Cykl jest prosty (ang. simple) jeżeli żaden wierzchołek (oprócz pierwszego) nie pojawia się na nim więcej niż raz.**
  - **Jeżeli istnieje cykl nieprosty zawierający wierzchołek n, to można znaleźć prosty cykl który zawiera n. Jeżeli graf posiada jeden lub więcej cykli to mówimy ze jest grafem cyklicznym (ang. cyclic). Jeśli cykle nie występują to, graf określa się mianem acyklicznego (ang. acyclic).**



Przykłady cykli prostych:
(0,0), (0,2,0), (1,3,2,1), (1,3,2,4,1)
Przykład cyklu nieprostego:
(0,2,1,3,2,0)

Grafy wywołań

- **Wywołania dokonywane przez zestaw funkcji można reprezentować za pomocą grafu skierowanego, zwanego grafem wywołań. Jego wierzchołki stanowią funkcje, a krawędź (P, Q) istnieje wówczas, gdy funkcja P wywołuje funkcje Q.**
- **Istnienie cyklu w grafie implikuje występowanie w algorytmie rekurencji.**
- **Rekurencja w której funkcja wywołuje samą siebie nazywamy bezpośrednią (ang. direct).**
- **Czasem mamy do czynienia z rekurencja pośrednia (ang. indirect) która reprezentuje cykl o długości większej niż 1, np. (P, Q, R, P).**



Graf wywołań dla algorytmu sortowania przez scalanie

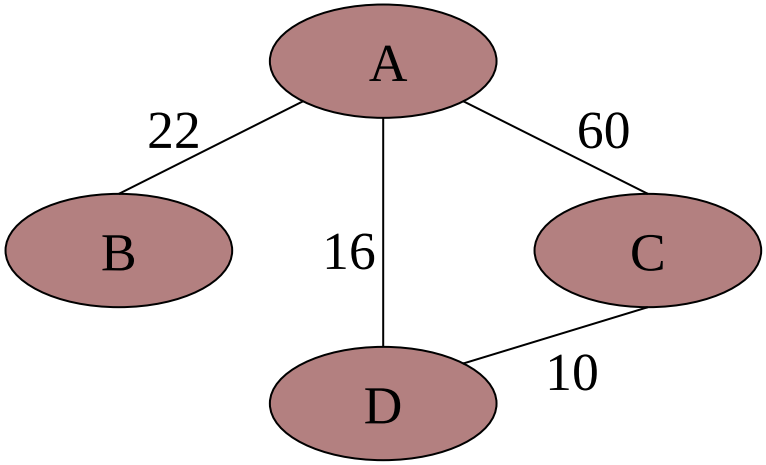
Rekurencja bezpośrednia

Grafy nieskierowane

- **Czasem zasadne jest połączenie wierzchołków krawędziami, które nie posiadają zaznaczonego kierunku. Z formalnego punktu widzenia taka krawędź jest zbiorem dwóch wierzchołków.**
- **Zapis {u,v} mówi ze wierzchołki u oraz v są połączone w dwóch kierunkach. Jeśli {u,v} jest krawędzią nieskierowana, wierzchołki u i v określa się jako sąsiednie (ang. *adjacent*) lub mianem sąsiadów (ang. neighbors).**
- **Graf zawierający krawędzie nieskierowane, czyli graf z relacją symetryczności krawędzi, nosi nazwę grafu nieskierowanego (ang. *undirected graph*).**

Grafy nieskierowane

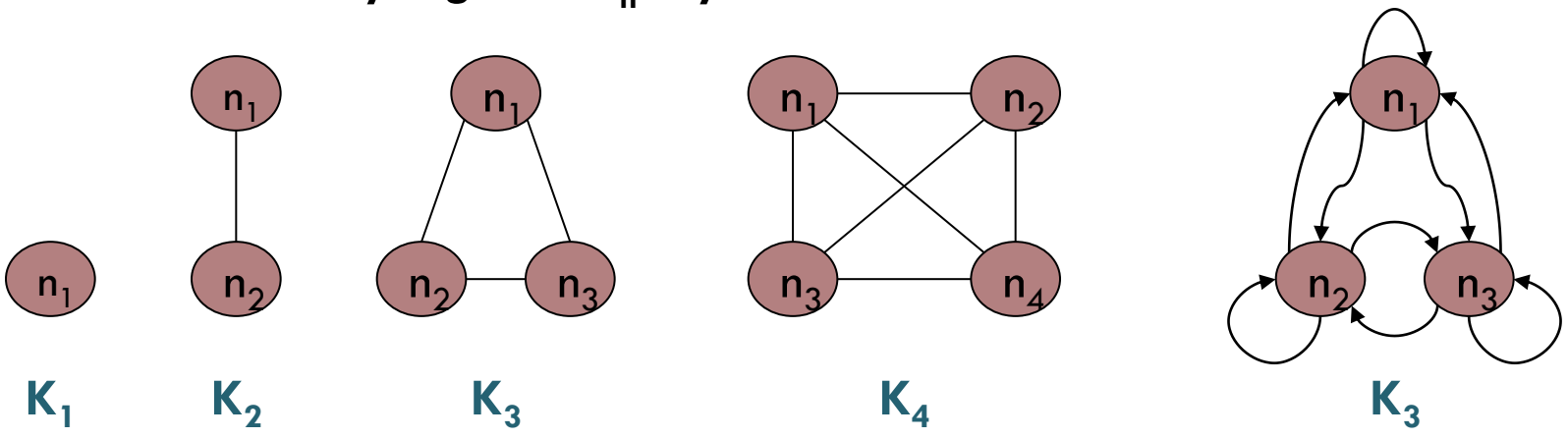
- **Droga to lista wierzchołków. Nieco trudniej jest sprecyzować co to jest cykl, tak aby nie była to każda lista**
  $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k-1}, \ldots, v_2, v_1)$



Graf nieskierowany reprezentujący drogi.

Pewne pojęcia z teorii grafów

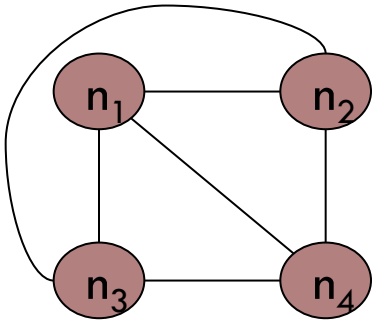
- **Teoria grafów jest dziedziną matematyki zajmującą się właściwościami grafów.**
- **Grafy pełne:**
  - **Nieskierowany graf posiadający krawędzie pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków nosi nazwę grafu pełnego (ang. *complete graph*). Graf pełny o n wierzchołkach oznacza się przez K_n.**
  - **Liczba krawędzi w nieskierowanym grafie K_n wynosi $n(n-1)/2$, w skierowanym grafie K_n wynosi n^2.**



Grafy planarne i nieplanarne

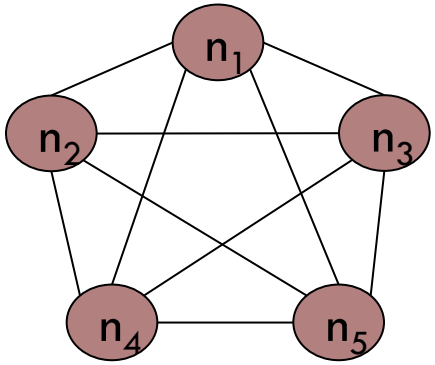
- **O grafie nieskierowanym mówi się że jest planarny (ang. planar) wówczas, gdy istnieje możliwość rozmieszczenia jego wierzchołków na płaszczyźnie, a następnie narysowania jego krawędzi jako lini ciągłych które się nie przecinają.**
- **Grafy nieplanarne (ang. nonplanar) to takie które nie posiadają reprezentacji płaskiej.**

Reprezentacja planarna:

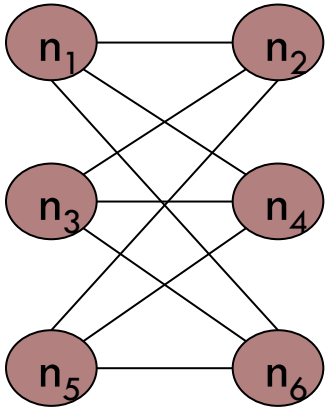


K_4

Najprostsze grafy nieplanarne:



K_5

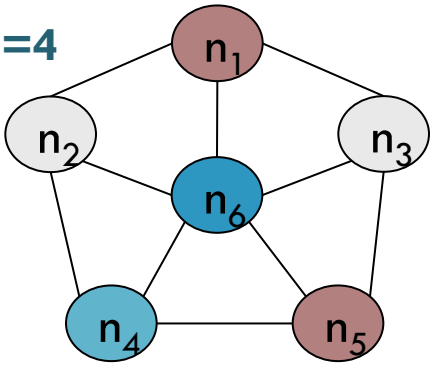


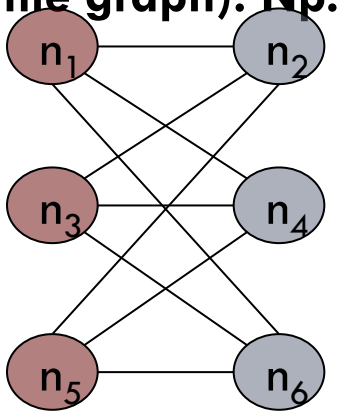
$K_{3,3}$

Kolorowanie grafów

- **Kolorowanie grafu (ang. graph coloring) polega na przypisaniu do każdego wierzchołka pewnego koloru, tak aby żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie miały tego samego koloru.**
- **Minimalna liczba kolorów potrzebna do takiej operacji nazwana jest liczbą chromatyczną grafu (ang. chromatic number), oznaczaną c(G).**
  - **Jeżeli graf jest pełny to jego liczba chromatyczna jest równa liczbie wierzchołków**
  - **Jeżeli graf możemy pokolorować przy pomocy dwóch kolorów to nazywamy go dwudzielnym (ang. bipartite graph). Np. $K_{3,3}$.**

$\chi(G)=4$





$\chi(G)=2$

Implementacje grafów

- **Istnieją dwie standardowe metody reprezentacji grafów:**
  - **Listy sąsiedztwa (ang. *adjacency lists*), jest, ogólnie rzecz biorąc, podobna do implementacji relacji binarnych.**
  - **Macierze sąsiedztwa (ang. adjacency matrices), to nowy sposób reprezentowania relacji binarnych, który jest bardziej odpowiedni dla relacji, w przypadku którym liczba istniejących par stanowi znaczącą część całkowitej liczby par, jakie mogłyby teoretycznie istnieć w danej dziedzinie.**

Listy sąsiedztwa

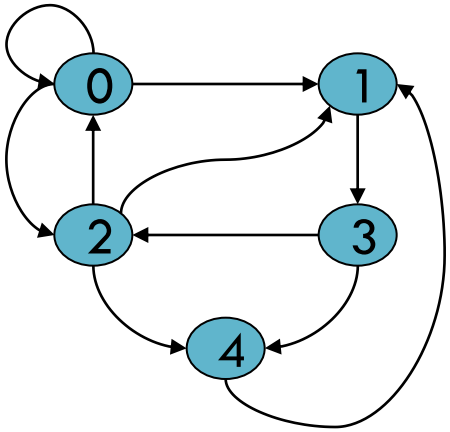
- **Wierzchołki są ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi 0,1,....., MAX-1 lub oznaczone za pomocą innego adekwatnego typu wyliczeniowego (używamy poniżej typu NODE jako synonimy typu wyliczeniowego).**
- **Wówczas można skorzystać z podejścia opartego na wektorze własnym.**
- **Element successors[u] zawiera wskaźnik do listy jednokierunkowej wszystkich bezpośrednich następników wierzchołka u. Następniki mogą występować w dowolnej kolejności na liście jednokierunkowej.**

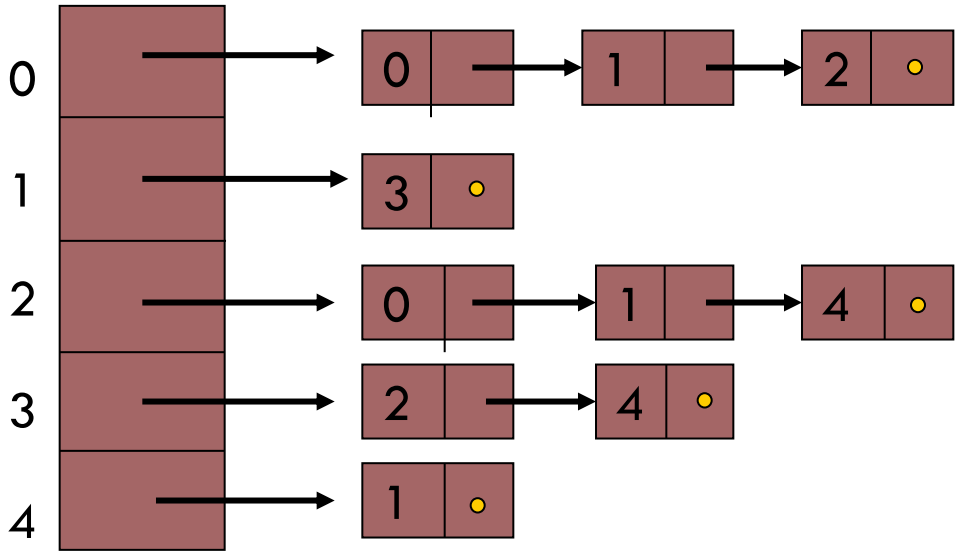
Listy sąsiedztwa:

```
typedef struct CELL *LIST;
struct CELL {
      NODE nodeName;
      LIST   next;
}
LIST successors[MAX]
```

Listy sąsiedztwa

- **Listy sąsiedztwa zostały posortowane wg. kolejności, ale następniki mogą występować w dowolnej kolejności na odpowiedniej liście sąsiedztwa.**



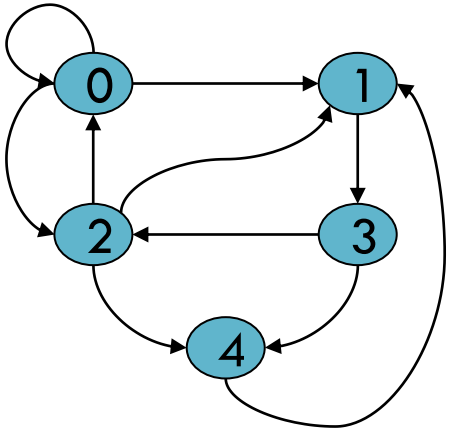


Macierz sąsiedztwa

Tworzymy dwuwymiarową tablicę;

BOOLEAN vertices[MAX][MAX];

w której element vertices[u][v] ma wartość TRUE wówczas, gdy istnieje krawędź (u, v), zaś FALSE, w przeciwnym przypadku.



	0	1	2	3	4
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	0	0

Listy sąsiedztwa a macierz sąsiedztwa

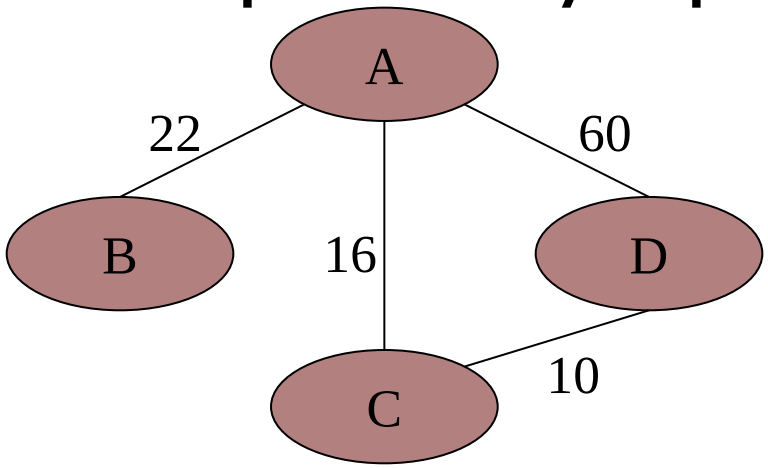
- **Macierze sąsiedztwa są preferowanym sposobem reprezentacji grafów wówczas, gdy grafy są gęste (ang. dense), to znaczy, kiedy liczba krawędzi jest bliska maksymalnej możliwej ich liczby.**
- **Dla grafu skierowanego o n wierzchołkach maksymalna liczba krawędzi wynosi n^2.**
- **Jeśli graf jest rzadki (ang. sparse) to reprezentacja oparta na listach sąsiedztwa może pozwolić zaoszczędzić pamięć.**
- **Istotne różnice miedzy przedstawionymi reprezentacjami grafów są widoczne już przy wykonywaniu prostych operacji.**

Preferowany sposób reprezentacji:

OPERACJA	GRAF GESTY	GRAF RZADKI
Wyszukiwanie krawędzi	Macierz sąsiedztwa	Obie
Znajdowanie następników	Obie	Lista sąsiedztwa
Znajdowanie poprzedników	Macierz sąsiedztwa	Obie

Składowa spójna grafu nieskierowanego

- **Każdy graf nieskierowany można podzielić na jedną lub większą liczbę spójnych składowych (ang. connected components).**
- **Każda spójna składowa to taki zbiór wierzchołków, że dla każdych dwóch z tych wierzchołków istnieje łącząca je ścieżka. Jeżeli graf składa się z jednej spójnej składowej to mówimy że jest spójny (ang. *connected*).**

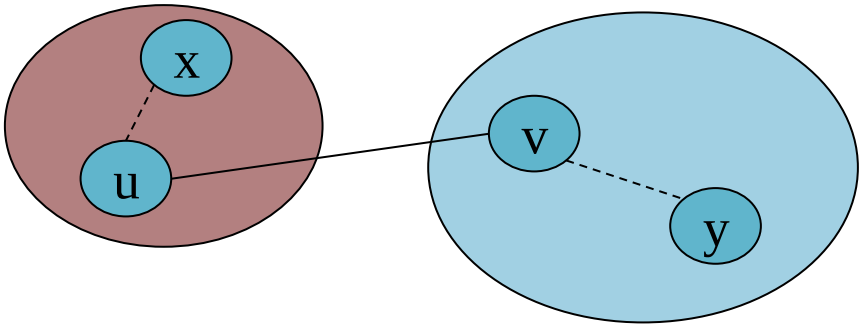


To jest graf spójny

Algorytm wyznaczania spójnych składowych

Chcemy określić spójne składowe grafu G. Przeprowadzamy rozumowanie indukcyjne.

- **Podstawa:**
  - **Graf G_0 zawiera jedynie wierzchołki grafu G i żadnej jego krawędzi. Każdy wierzchołek stanowi odrębną spójną składową .**
- **Indukcja:**
  - **Zakładamy, że znamy już spójne składowe grafu G_i po rozpatrzeniu pierwszych i krawędzi, a obecnie rozpatrujemy (i+1) krawędź {u, v}.**
    - **jeżeli wierzchołki u, v należą do jednej spójnej składowej to nic się nie zmienia**
    - **jeżeli do dwóch różnych, to łączymy te dwie spójne składowe w jedną.**



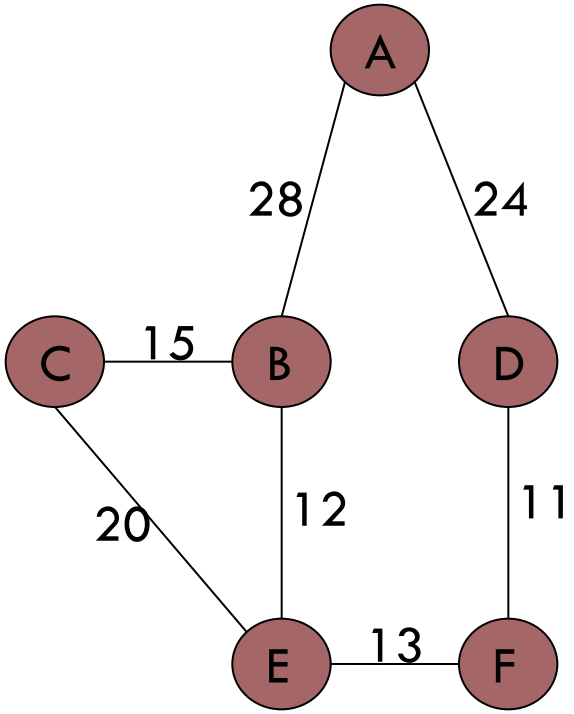
Struktura danych dla wyznaczania spójnych składowych

- **Biorąc pod uwagę przedstawiony algorytm, musimy zapewnić szybką wykonywalność następujących operacji:**
  1) **gdy jest określony wierzchołek to znajdź jego bieżącą spójną składową**
  2) **połącz dwie spójne składowe w jedną**
- **Dobre wyniki daje ustawienie wierzchołków każdej składowej w strukturze drzewiastej, gdzie spójna składowa jest reprezentowana przez korzeń.**
  - **aby wykonać operacje (1) należy przejść do korzenia: O(logn)**
  - **aby wykonać operacje (2) wystarczy korzeń jednej składowej określić jako potomka korzenia składowej drugiej (O(1)) .**
  - **Przyjmijmy zasadę ze korzeń drzewa o mniejszej wysokości czynimy potomkiem.**
- **Wyznaczenie wszystkich spójnych składowych O(m logn), m-krawędzi i n-wierzchołków.**

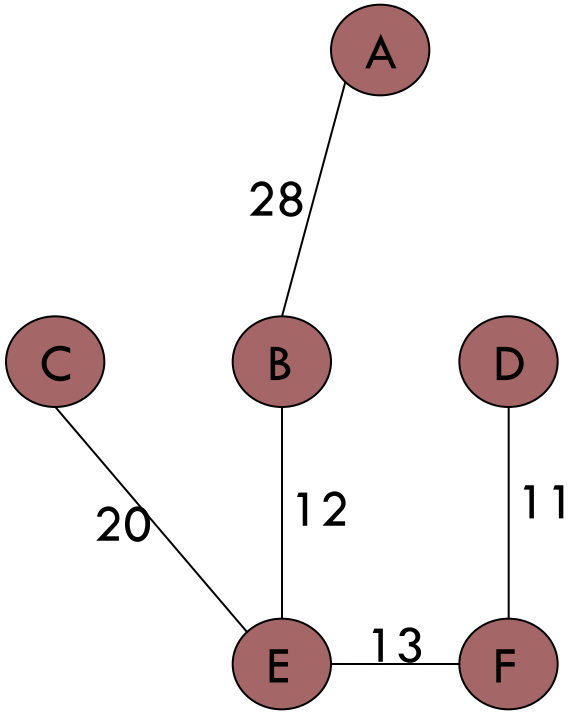
Minimalne drzewa rozpinające

- **Drzewo rozpinające (ang. *spanning tree*) grafu nieskierowanego G stanowi zbiór wierzchołków tego grafu wraz z podzbiorem jego krawędzi, takich że:**
  - **łączą one wszystkie wierzchołki, czyli istnieje droga miedzy dwoma dowolnymi wierzchołkami która składa się tylko z krawędzi drzewa rozpinającego.**
  - **tworzą one drzewo nie posiadające korzenia, nieuporządkowane. Oznacza to że nie istnieją żadne (proste) cykle.**
- **Jeśli graf G stanowi pojedynczą spójną składową to drzewo rozpinające zawsze istnieje. Minimalne drzewo rozpinające (ang. *minimal spanning tree*) to drzewo rozpinające, w którym suma etykiet jego krawędzi jest najmniejsza ze wszystkich możliwych do utworzenia drzew rozpinających tego grafu.**

Minimalne drzewa rozpinające



Graf nieskierowany

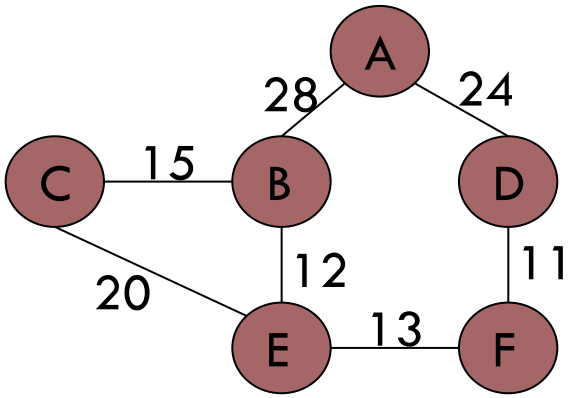


Drzewo rozpinające

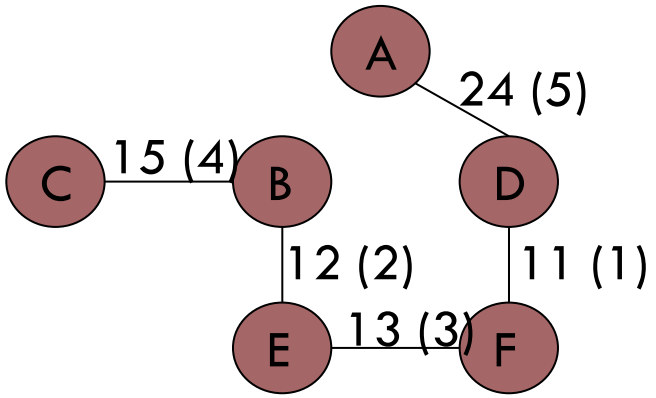
Algorytm Kruskala

- **Istnieje wiele algorytmów do znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego.**
- **Jeden z nich to algorytm Kruskala, który stanowi proste rozszerzenie algorytmu znajdowania spójnych składowych. Wymagane zmiany to:**
  - **należy rozpatrywać krawędzie w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet,**
  - **należy dołączyć krawędź do drzewa rozpinającego tylko w takim wypadku gdy jej końce należą do dwóch różnych spójnych składowych.**

Algorytm Kruskala



Graf nieskierowany



Minimalne drzewo rozpinające

(w nawiasach podano kolejność dodawanych krawędzi)

Algorytm Kruskala

- **Algorytm Kruskala jest dobrym przykładem algorytmu zachłannego (ang. greedy algorithm), w przypadku którego podejmowany jest szereg decyzji, z których każdą stanowi wybranie opcji najlepszej w danym momencie.**
  - **Lokalnie podejmowane decyzje polegają w tym przypadku na wyborze krawędzi dodawanej do formowanego drzewa rozpinającego.**
  - **Za każdym razem wybierana jest krawędź o najmniejsze wartości etykiety, która nie narusza definicji drzewa rozpinającego, zabraniającej utworzenia cyklu.**
- **Dla algorytmu Kruskala można wykazać, ze jego rezultat jest optymalny globalnie, to znaczy że daje on w wyniku drzewo rozpinające o minimalnej wadze.**
- **Czas wykonania algorytmu jest O(m log m) gdzie m to jest większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.**

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

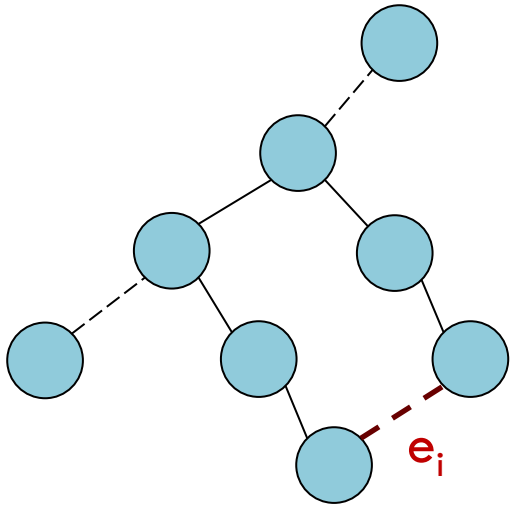
- **Niech G będzie nieskierowanym grafem spójnym.**
  (Dla niektórych etykiet dopuszczamy dodanie nieskończenie malej wartości tak aby wszystkie etykiety były różne, graf G będzie miał wobec tego unikatowe minimalne drzewo rozpinające, które będzie jednym spośród minimalnych drzew rozpinających grafu G_o oryginalnych wagach).
- **Niech ciąg $e_1, e_2, \ldots, e_m$ oznacza wszystkie krawędzie grafu G w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet, rozpoczynając od najmniejszej.**
- **Niech K będzie drzewem rozpinającym grafu G_o odpowiednio zmodyfikowanych etykietach, utworzonym przez zastosowanie algorytmu Kruskala, a T niech będzie unikatowym minimalnym drzewem rozpinającym grafu G.**

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

- **Należy udowodnić ze K i T stanowią to samo drzewo. Jeśli są różne musi istnieć co najmniej jedna krawędź, która należy do jednego z nich a nie należy do drugiego.**
- **Niech e_i oznacza pierwsza taka krawędź spośród uporządkowanych krawędzi, to znaczy każda z krawędzi e_1, e_2, …, e_{i-1} albo należy do obu drzew K i T albo nie należy do żadnego z nich.**
- **Istnieją dwa przypadki w zależności czy krawędź e_i należy do drzewa K czy do drzewa T. W każdym z tych przypadków wykażemy sprzeczność, co będzie stanowić dowód, ze e_i nie może istnieć, a stąd że K=T, oraz że K stanowi minimalne drzewo rozpinające grafu G.**

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

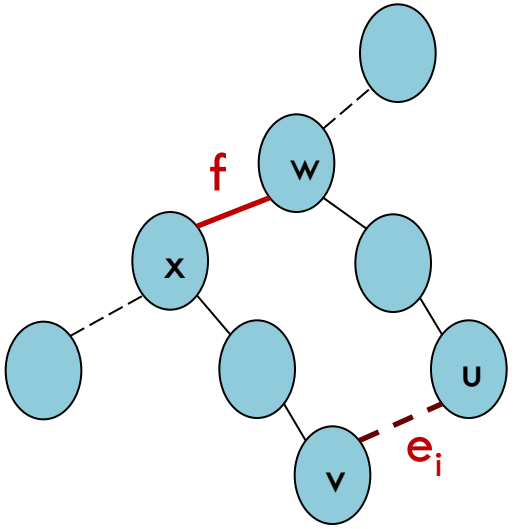
- **Przypadek 1:**
  - **krawędź e_i należy do T, ale nie należy do K.**
  - **Jeżeli algorytm Kruskala odrzuca e_i, oznacza to że e_i formuje cykl z pewna droga P, utworzoną z uprzednio wybranych krawędzi drzewa K.**
  - **Jeżeli krawędzie drogi P należą to K to należą także do T.**
  - **A wiec P + e_i utworzyłoby cykl w T co jest sprzeczne z definicja drzewa rozpinającego. Stąd niemożliwe jest aby e_i należała do T a nie należała do K.**



Droga P (linia ciągła) należy zarówno do drzewa T jak i K, krawędź e_i należy tylko do T.

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

- **Przypadek 2:**
  - **krawędź e_i należy do K, ale nie należy do T. Niech krawędź e_i łączy wierzchołki u i v. Ponieważ drzewo T jest spójne, musi istnieć w T pewna acykliczna droga z wierzchołka u do v. Niech nosi ona nazwę Q. Ponieważ w skład Q nie wchodzi e_i, Q + e_i tworzy cykl prosty w grafie G. Rozpatrzmy dwie sytuacje:**
    - **krawędź e_i posiada najwyższą wartość etykiety. Musiałoby to oznaczać że K zawiera cykl co jest niemożliwe.**
    - **na drodze Q istnieje krawędź f która ma wartość etykiety wyższą niż e_i. Można by wiec usunąć f a wprowadzić e_i nie niszcząc spójności. A wiec rozpięte drzewo miałoby wartość mniejsza niż wartość dla T co jest w sprzeczności z początkowym twierdzeniem że T jest minimalne.**

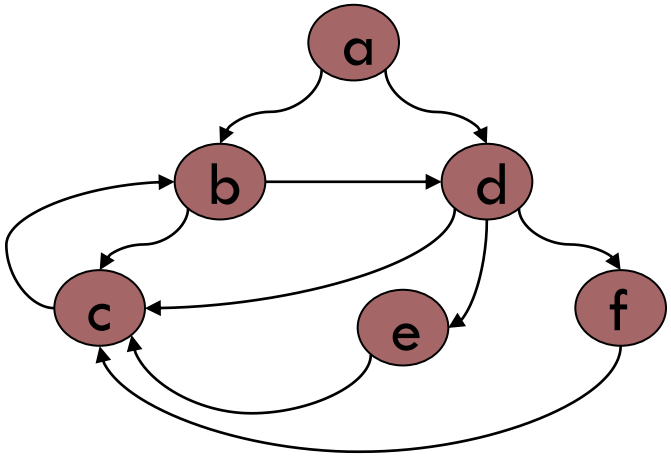


Droga Q (linia ciągła) należy do drzewa T, można dodać krawędź e_i i usunąć krawędź f

Algorytm przeszukiwania w głąb

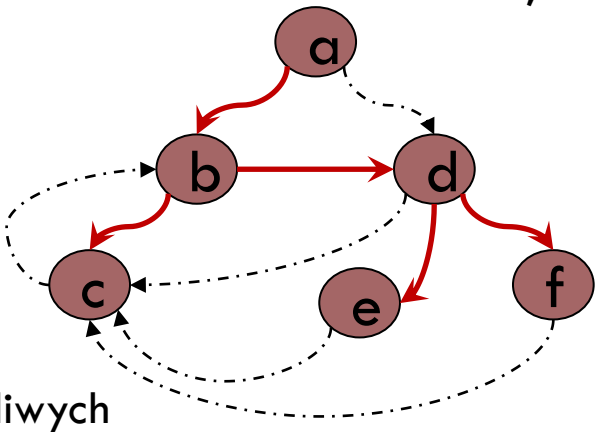
- **Jest to podstawowa metoda badania grafów skierowanych.**
- **Bardzo podobna do stosowanych dla drzew, w których startuje się od korzenia i rekurencyjnie bada wierzchołki potomne każdego odwiedzonego wierzchołka.**
- **Trudność polega na tym ze w grafie mogą pojawiać się cykle… Należy wobec tego znaczyć wierzchołki już odwiedzone i nie wracać więcej do takich wierzchołków.**
  - **Z uwagi na fakt, że w celu uniknięcia dwukrotnego odwiedzenia tego samego wierzchołka jest on odpowiednio oznaczany, graf w trakcie jego badania zachowuje się podobnie do drzewa.**
- **W rzeczywistości można narysować drzewo, którego krawędzie rodzic-potomek będą niektórymi krawędziami przeszukiwanego grafu G.**
  - **Takie drzewo nosi nazwę drzewa przeszukiwania w głąb (ang. depth-first-search) dla danego grafu.**

Drzewa przeszukiwania w głąb

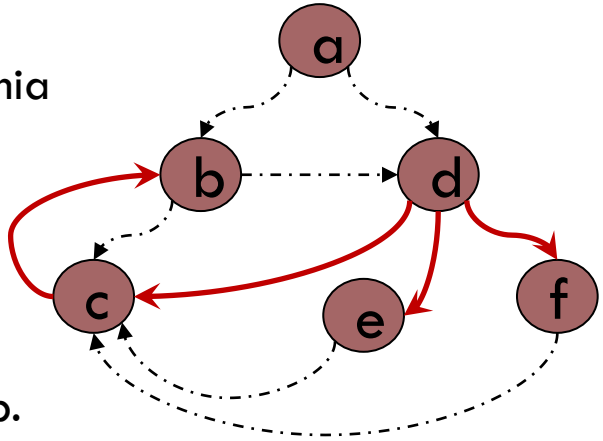


Graf skierowany

Las przeszukiwania:
dwa drzewa o korzeniach a, d

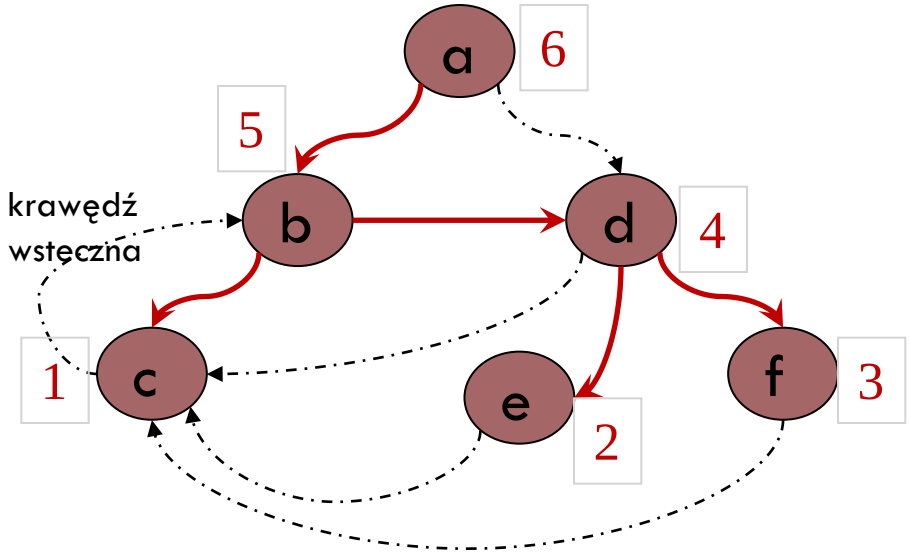


Jedno z możliwych drzew przeszukiwania



Las przeszukiwania w głąb.

Drzewo przeszukiwania w głąb



- Po (podczas) konstruowaniu drzewa przeszukiwania w głąb można ponumerować jego wierzchołki w **kolejności wstecznej** (ang. *post-order*).

Cykle w grafie skierowanym

- **Podczas przeszukiwania w głąb grafu skierowanego G można wszystkim wierzchołkom przypisać numery zgodne z kolejnością wsteczną w czasie rzędu O(m).**
- **Krawędzie wsteczne to takie dla których początki są równe lub mniejsze końcom ze względu na numerację wsteczną.**

  Zawsze gdy istnieje krawędź wsteczna w grafie musi istnieć cykl.
- **Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Aby stwierdzić czy w grafie występuje cykl należy przeprowadzić numerację wsteczną a następnie sprawdzić wszystkie krawędzie.**
- **Całkowity czas wykonania testu cykliczności to O(m), gdzie m to większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.**

Sortowanie topologiczne

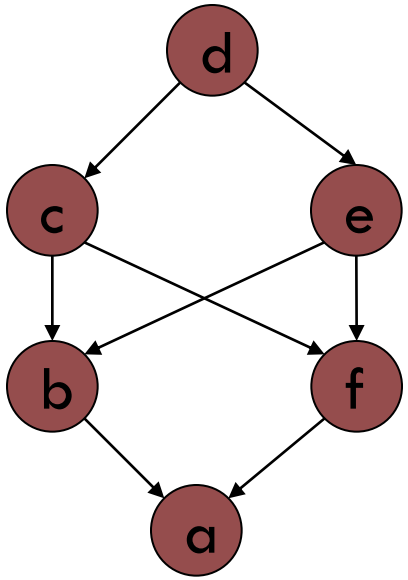
- Załóżmy, że graf skierowany G jest acykliczny.
- Dla każdego grafu możemy określić las poszukiwania w głąb, określając numerację wsteczną jego wierzchołków.
- Załóżmy, że $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ określa listę wierzchołków grafu G w kolejności odwrotnej do numeracji wstecznej. To znaczy: n_1 jest wierzchołkiem opatrzonym numerem n, n_2 wierzchołkiem opatrzonym numerem n-1 i ogólnie wierzchołek n_i jest opatrzony numerem n-i+1.
- Kolejność wierzchołków na tej liście ma ta własność, że wszystkie krawędzie grafu G biegną od początku do końca, tzn. początek poprzedza koniec.

Sortowanie topologiczne

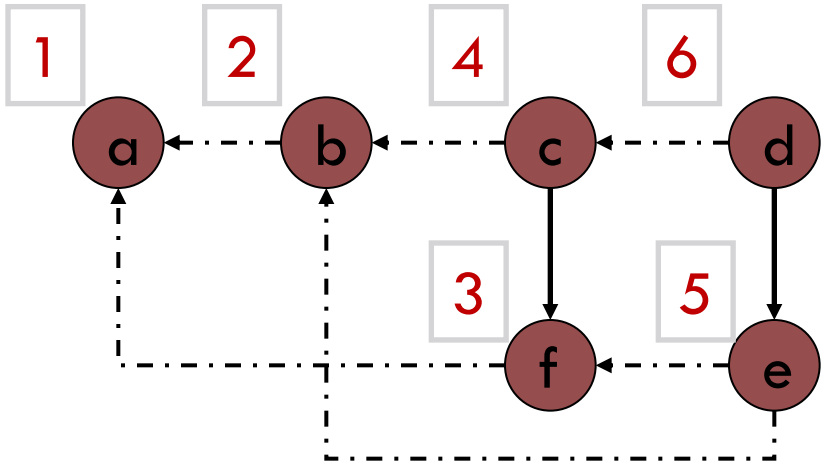
- **Takie uporządkowanie nazywamy topologicznym (ang. *topological order*), a proces znajdowania takiego uporządkowania to sortowanie topologiczne (ang. *topological sorting*).**
- **Jedynie grafy acykliczne posiadają uporządkowanie topologiczne.**
- **Wykonując poszukiwanie w głąb możemy je określić w czasie O(m).**
- **Jedna z możliwości: odkładać kolejno znalezione wierzchołki „na stos". Po zakończeniu lista znajdująca się na stosie będzie reprezentować uporządkowanie topologiczne grafu.**

Sortowanie topologiczne

Uporządkowanie topologiczne to (d,e,c,f,b,a)



Skierowany graf cykliczny



Las przeszukiwania w głąb

Sortowanie topologiczne

- **Uporządkowanie topologiczne przydaje się wówczas, gdy istnieją pewne ograniczenia odnośnie kolejności w jakiej mają być wykonywane zadania.**
  - **Jeśli krawędź wiodącą od wierzchołka u do wierzchołka v jest rysowana wówczas, gdy zadanie u musi zostać wykonane przed zadaniem v, to uporządkowaniem zapewniającym wykonanie wszystkich żądań jest właśnie uporządkowanie topologiczne.**

Sortowanie topologiczne

- **Podobny przykład to graf wywołań nierekurencyjnego zbioru funkcji, kiedy należy przeanalizować każdą funkcje dopiero po dokonaniu analizy funkcji ją wywołującej.**
  - **Jeśli krawędzie wiodą od funkcji wywołujących do wywoływanych, kolejność, w której należy przeprowadzić takie analizy, to odwrócenie porządku topologicznego, czyli uporządkowanie wsteczne.**
  - **Zapewnia to że każda funkcja zostanie przeanalizowana dopiero po dokonaniu analizy wszystkich innych wywoływanych przez nią funkcji.**

Sortowanie topologiczne

- Istnienie cyklu w grafie reprezentującym priorytety zadań mówi o tym, że nie istnieje takie uporządkowanie, dzięki któremu możliwe byłoby wykonanie wszystkich zadań.
- Istnienie cyklu w grafie wywołań pozwala stwierdzić występowanie rekurencji.

Problem osiągalności

- **Naturalne pytanie związane z grafem skierowanym jest:**
  - **które wierzchołki są osiągalne z danego wierzchołka u przy założeniu, że po grafie można się poruszać tylko zgodnie z kierunkiem krawędzi?**
    Taki zbiór wierzchołków określa się mianem zbioru osiągalności (ang. *reachable set*) danego wierzchołka u.
- **Możemy wykorzystać rekurencyjną funkcje poszukiwania w głąb. Całkowity czas wykonania takiego zapytania to O(m n).**

Znajdowanie spójnych składowych

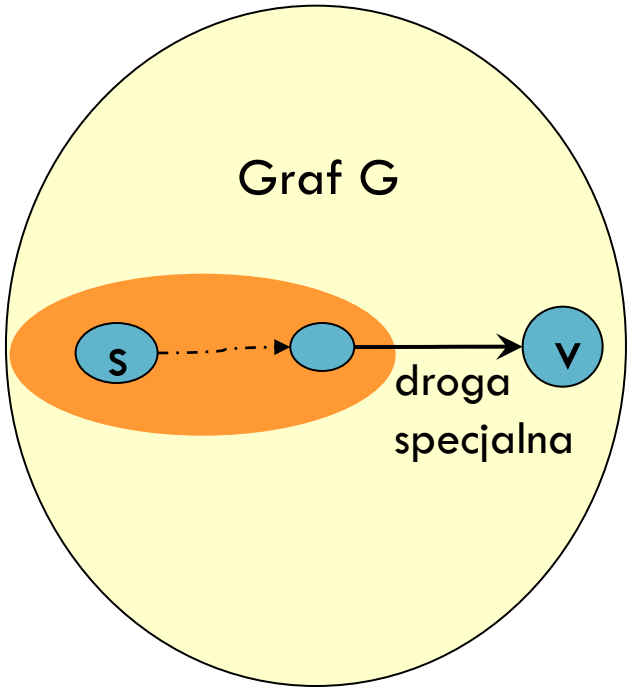
- **Do znajdowania spójnych składowych możemy użyć algorytmu poszukiwania w głąb.**
- **Traktujemy graf nieskierowany jako graf skierowany, w którym każda krawędź nieskierowana została zastąpiona dwiema krawędziami skierowanymi wiodącymi w obu kierunkach.**
- **Do reprezentacji grafu używamy list sąsiedztwa.**
- **Tworzymy las przeszukiwania w głąb grafu skierowanego. Każde drzewo w tym lesie odpowiada jednej składowej spójności grafu nieskierowanego.**
- **Czas wykonania algorytmu O(m)**
  - **przy użyciu struktury drzewiastej czas wykonania wynosi O(m log n).**

Algorytm Dikstry

- **Szukamy najkrótszej drogi pomiędzy dwoma wierzchołkami**
  - **Rozpatrujemy graf G (skierowany lub nieskierowany), w którym wszystkie krawędzie zaetykietowano wartościami reprezentującymi ich długości.**
  - **Długość (ang. distance) danej drogi stanowi wartość sumy etykiet związanych z nią krawędzi. Minimalna odległość z wierzchołka u do wierzchołka v to minimalna długość którejś z dróg od u do v.**

Algorytm Dikstry

- **Traktujemy wierzchołek s jako wierzchołek źródłowy. Na etapie pośrednim wykonywania algorytmu w grafie G istnieją tzw. wierzchołki ustalone (ang. settled), tzn. takie dla których znane są odległości minimalne. W szczególności zbiór takich wierzchołków zawiera również wierzchołek s.**
- **Dla nieustalonego wierzchołka v należy zapamiętać długość najkrótszej drogi specjalnej (ang. *special path*) czyli takiej która rozpoczyna się w wierzchołku źródłowym, wiedzie przez ustalone wierzchołki, i na ostatnim etapie przechodzi z obszaru ustalonego do wierzchołka v.**



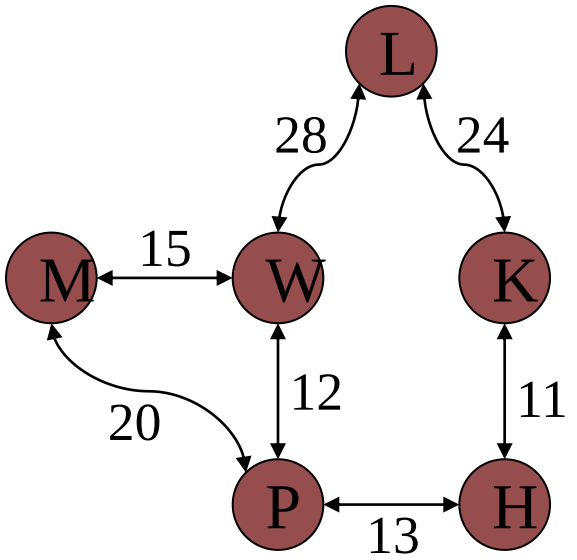
Algorytm Dikstry

- Dla każdego wierzchołka u zapamiętujemy wartość dist(u).
- Jeśli u jest wierzchołkiem ustalonym, to dist(u) jest długością najkrótszej drogi ze źródła do wierzchołka u.
- Jeśli u nie jest wierzchołkiem ustalonym, to dist(u) jest długością drogi specjalnej ze źródła do u.
- Na czym polega ustalanie wierzchołków:
  - znajdujemy wierzchołek v który jest nieustalony ale posiada najmniejszą dist(v) ze wszystkich wierzchołków nieustalonych
  - przyjmujemy wartość dist(v) za minimalną odległość z s do v
  - dostosowujemy wartości wszystkich dist(u) dla innych wierzchołków, które nie są ustalone, wykorzystując fakt, że wierzchołek v jest już ustalony.
  - Czyli porównujemy stare dist(u) z wartością dist(v)+etykieta(v, u) jeżeli taka (v, u) krawędź istnieje.
- Czas wykonania algorytmu jest O(m log n) .

Algorytm Dikstry

Etapy wykonania algorytmu

	ETAPY ustalania wierzchołków				
MIASTO	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
H	0*	0*	0*	0*	0*
P	13	13	13*	13*	13*
M	INF	INF	33	33	33*
W	INF	INF	25	25*	25*
L	INF	35	35	35	35
K	11	11*	11*	11*	11*



Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

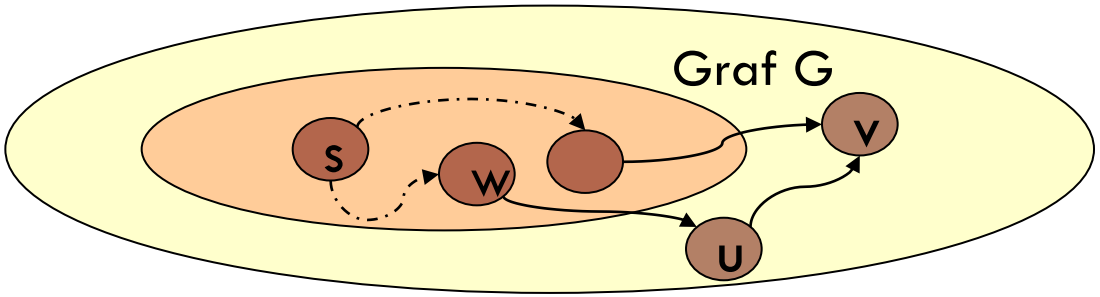
- **W celu wykazania poprawności algorytmu Dijkstry należy przyjąć, że etykiety krawędzi są nieujemne.**
- **Indukcyjny dowód poprawności względem k prowadzi do stwierdzenia że:**
  1) **dla każdego wierzchołka ustalonego u, wartość dist(u) jest minimalną odległością z s do u, a najkrótsza droga do u składa się tylko z wierzchołków ustalonych.**
  2) **dla każdego nieustalonego wierzchołka u, wartość dist(u) jest minimalną długością drogi specjalnej z s do u (jeśli droga nie istnieje wartość wynosi INF).**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Podstawa:**
  - **Dla k=1 wierzchołek s jest jedynym wierzchołkiem ustalonym. Inicjalizujemy dist(s) wartością 0, co spełnia warunek (1).**
  - **Dla każdego innego wierzchołka u, dist(u) jest inicjalizowane wartością etykiety krawędzi (s, u), o ile taka istnieje. Jeżeli nie istnieje, wartością inicjalizacji jest INF. Zatem spełniony jest również warunek (2).**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Załóżmy, ze warunki (1) i (2) za spełnione po ustaleniu k wierzchołków oraz niech v będzie (k+1) ustalonym wierzchołkiem.**



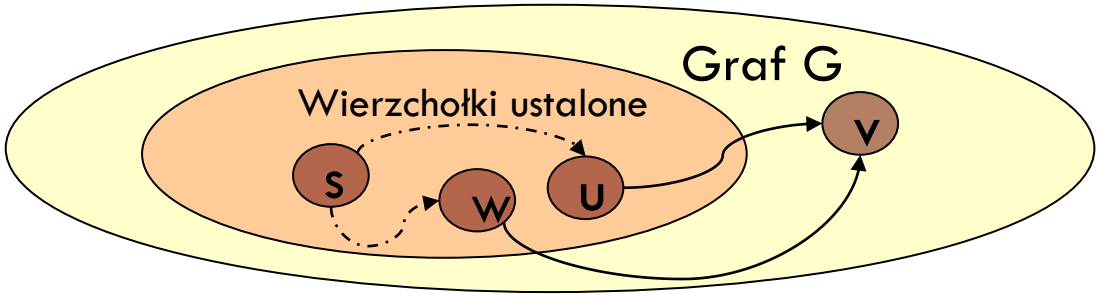
Hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u.

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ dist(v) jest najmniejszą długością drogi z s do v.**
    - **Załóżmy, że tak nie jest. Musiała by więc istnieć hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u. Jednakże wierzchołek v został obrany jako k+1 ustalony, co oznacza, ze w tym momencie dist(u) nie może być mniejsze od dist(v), gdyż wówczas jako (k+1) wierzchołek wybrany zostałby wierzchołek u.**
    - **Na podstawie warunku (2) hipotezy indukcyjnej wiadomo, ze dist(u) jest minimalna długością drogi specjalnej wiodącej do u. Jednak droga z s przez w do u jest drogą specjalną, tak więc jej długość równa jest co najmniej dist(u). Stąd domniemana krótsza droga z s do v wiodąca przez w i u ma długość równą co najmniej dist(v), ponieważ pierwsza jej część, - z s do u – ma długość dist(u), a dist(u) ≥ dist(v). Stąd warunek (1) jest spełniony dla k+1 wierzchołków.**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ dist(v) jest najmniejszą długością drogi z s do v.**



Dwie możliwości określenia przedostatniego wierzchołka w drodze specjalnej do u.

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny (cd)**:
  - Teraz należy pokazać, że warunek (2) jest spełniony po dodaniu do wierzchołków ustalonych wierzchołka v.
    - Weźmy pod uwagę pewien wierzchołek u, który wciąż pozostaje nieustalony po dodaniu v do wierzchołków ustalonych. W najkrótszej drodze specjalnej do u musi istnieć pewien wierzchołek przedostatni. Wierzchołkiem tym może być zarówno v, jak i pewien inny wierzchołek w.
    - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest v. Długość drogi z s przez v do u wynosi dist(v) + wartość etykiety v $\rightarrow$ u.
    - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest w. Na podstawie warunku (1) hipotezy indukcyjnej można stwierdzić, że najkrótsza droga z s do w składa się jedynie z wierzchołków, które zostały ustalone przed v, stąd wierzchołek v nie występuje w tej drodze.
    - A więc długość drogi specjalnej do u się nie zmienia po dodaniu v do wierzchołków ustalonych.
    - Ponieważ w momencie ustalania wierzchołka v przeprowadzona jest operacja dostosowywania dist(u), warunek (2) jest spełniony.

Algorytmy znajdowania najkrótszych dróg

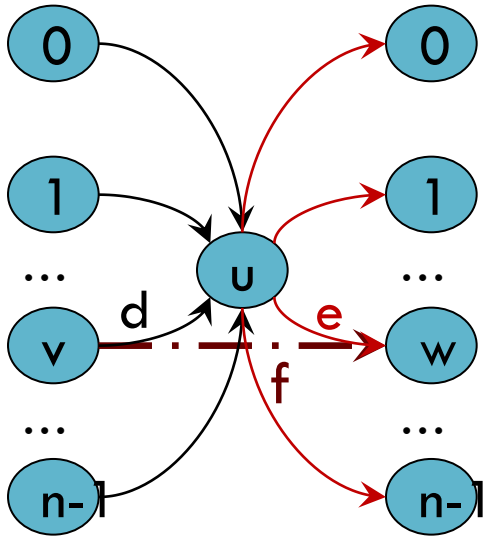
- **Jeśli potrzebne jest poznanie minimalnych odległości miedzy wszystkimi parami wierzchołków w grafie o n wierzchołkach, które posiadają etykiety o wartościach nieujemnych, można uruchomić algorytm Dijkstry dla każdego z n wierzchołków jako wierzchołka źródłowego.**
- **Czas wykonania algorytmu Dijkstry wynosi O(m log n), gdzie m oznacza większą wartość z liczby wierzchołków i liczby krawędzi. Znalezienie w ten sposób minimalnych odległości miedzy wszystkimi parami wierzchołków zajmuje czas rzędu O(m n log n).**
- **Jeśli m jest bliskie swojej maksymalnej wartości $m \approx n^2$ to można skorzystać z implementacji algorytmu Dijkstry który działa w czasie $O(n^2)$. Wykonanie go n razy daje czas rzędu $O(n^3)$.**

Algorytmy znajdowania najkrótszych dróg

- **Istnieje inny algorytm znajdowania minimalnych odległości miedzy wszystkimi parami wierzchołków, noszący nazwę algorytmu Floyda-Warshalla.**
- **Jego wykonanie zajmuje czas rzędu $O(n^3)$. Operuje na macierzach sąsiedztwa a nie listach sąsiedztwa i jest koncepcyjnie prostszy.**

Algorytm Floyda-Warshalla

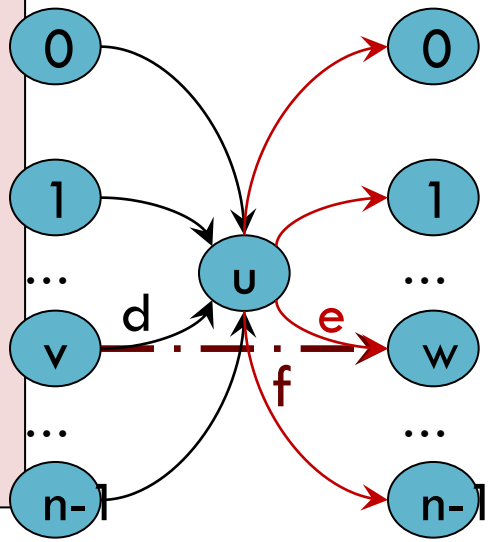
- **Podstawa algorytmu jest działanie polegające na rozpatrywaniu po kolei każdego wierzchołka grafu jako elementu centralnego (ang. *pivot*).**
- **Kiedy wierzchołek u jest elementem centralnym, staramy się wykorzystać fakt, że u jest wierzchołkiem pośrednim między wszystkimi parami wierzchołków.**
- **Dla każdej pary wierzchołków, na przykład v i w, jeśli suma etykiet krawędzi (v, u) oraz (u, w) (na rysunku d+e) , jest mniejsza od bieżąco rozpatrywanej etykiety f krawędzi wiodącej od v do w, to wartość f jest zastępowana wartością d+e.**



Algorytm Floyda-Warshalla

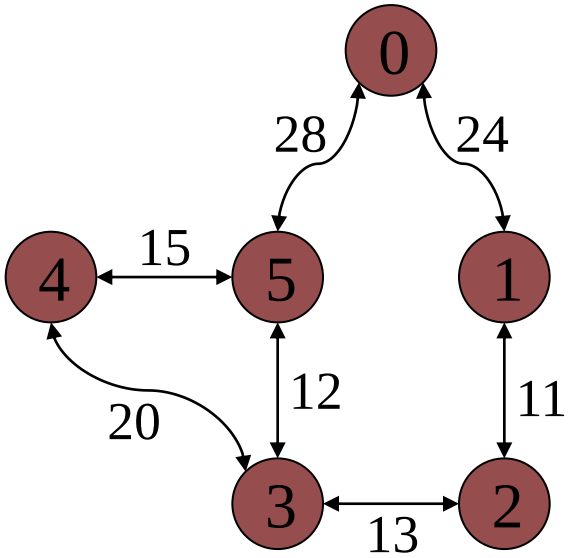

```
Node u, v, w;

for (v = 0; w < MAX; v++)
    for (w=0; w < MAX; w++)
        dist[v][w] = edge[v][w];
for (u=0; u< MAX; u++)
    for (v=0; v< MAX; v++)
        for (w=0; w<MAX; w++)
            if( dist[v][u]+dist[u][w] < dist[v][w])
            dist[v][w] = dist [v][u] + dist [u][w];
```



edge[v][w] –etykieta krawędzi, wierzchołki numerowane

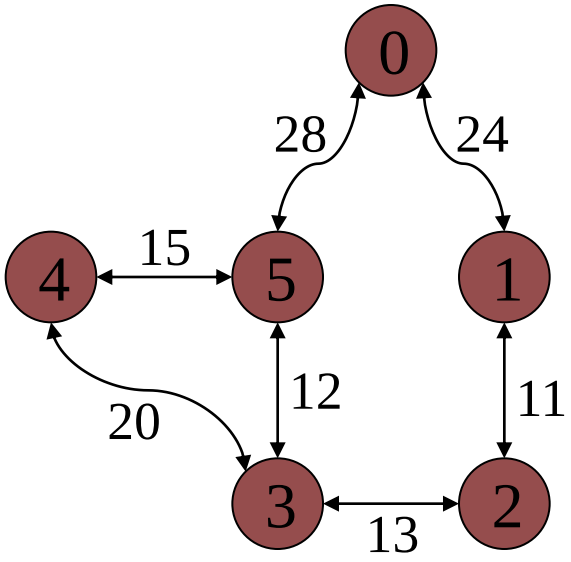
Algorytm Floyda-Warshalla



Macierz która odzwierciedla początkową postać macierzy odległości (ang. *dist*)

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	INF	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	INF
2	INF	11	0	13	INF	INF
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	INF	INF	12	15	0

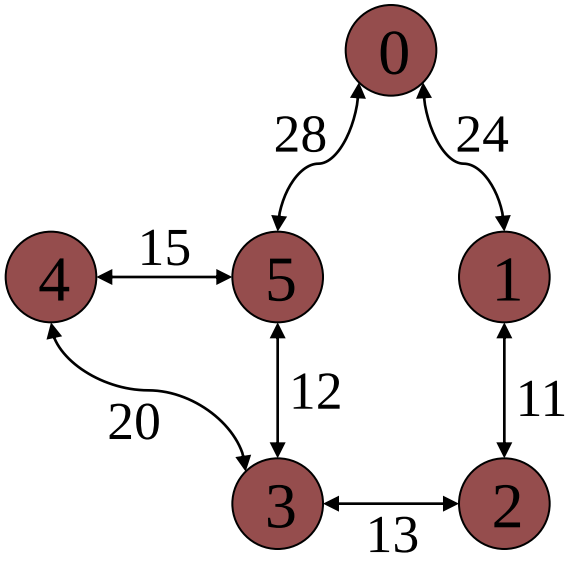
Algorytm Floyda-Warshalla



Macierz odległości, po użyciu wierzchołka **0** jako elementu centralnego

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	INF	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	52
2	INF	11	0	13	INF	INF
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	52	INF	12	15	0

Algorytm Floyda-Warshalla

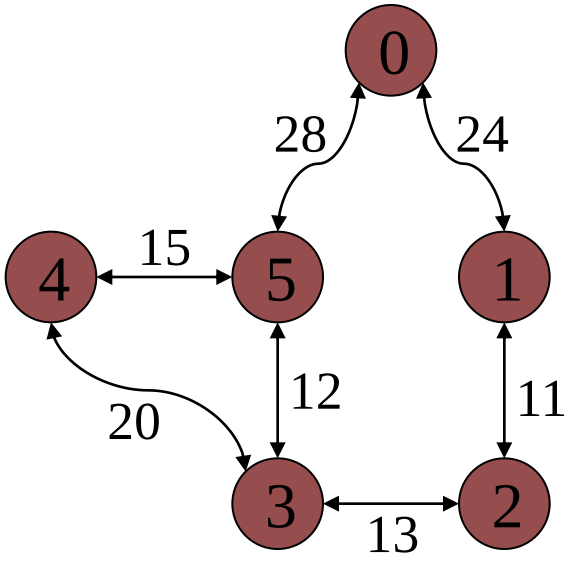


Macierz odległości, po użyciu wierzchołka **1** jako elementu centralnego

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	35	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	52
2	35	11	0	13	INF	63
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	52	63	12	15	0

itd… itd…

Algorytm Floyda-Warshalla

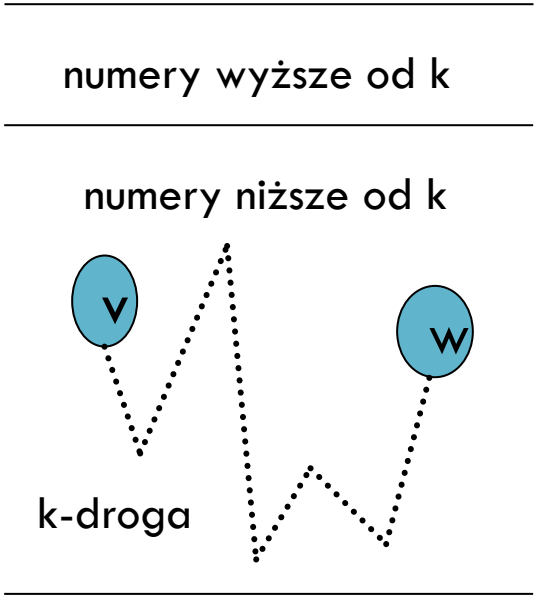


Końcowa postać macierzy odległości

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	35	40	43	28
1	24	0	11	24	44	52
2	35	11	0	13	33	25
3	40	24	13	0	20	12
4	43	44	33	20	0	15
5	28	36	25	12	15	0

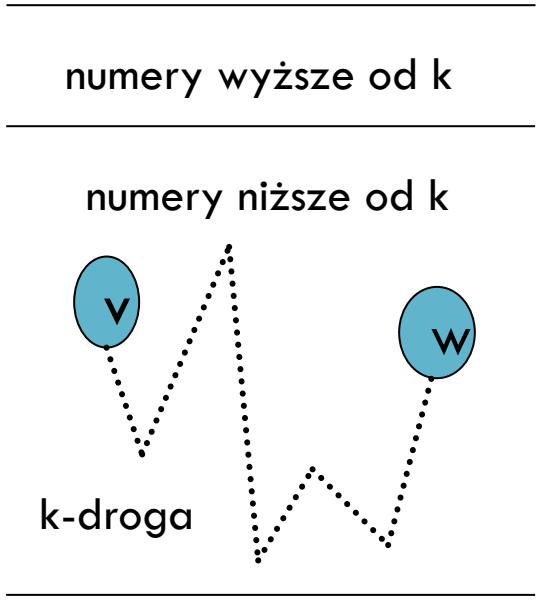
Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

- **Na dowolnym etapie działania algorytmu Floyda-Warshalla odległość z wierzchołka v do wierzchołka w stanowi długość najkrótszej z tych dróg, które wiodą jedynie przez wierzchołki użyte dotąd jako elementy centralne.**
- **Ponieważ wszystkie wierzchołki zostają w końcu użyte jako elementy centralne, elementy dist[v][w] zawierają po zakończeniu działań minimalne długości wszystkich możliwych dróg.**



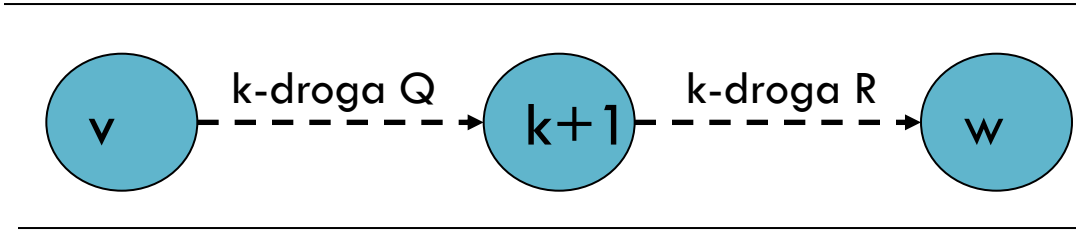
Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

- **Definiujemy k-drogę z wierzchołka v do wierzchołka w jako drogę z v do w taką, że żaden jej wierzchołek pośredni nie ma numeru wyższego od k.**
- **Należy zauważyć, że nie ma ograniczenia odnośnie tego, że v lub w mają mieć wartość k lub mniejszą.**
- **k=-1 oznacza że droga nie posiada wierzchołków pośrednich.**



Dowód indukcyjny

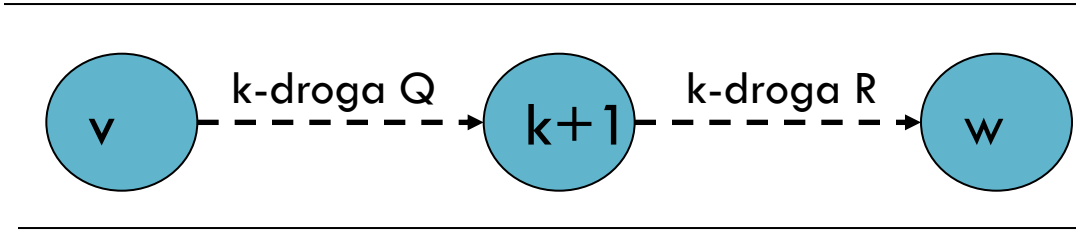
- **Teza indukcyjna S(k):**
  - **jeżeli etykiety krawędzi maja wartości nieujemne, to po przebiegu k – pętli, element dist[v][w] ma wartość najkrótszej k – drogi z v do w lub ma wartość INF, jeżeli taka droga nie istnieje.**
- **Podstawa:**
  - **Podstawą jest warunek k = -1. Krawędzie i drogi składające się z pojedynczego wierzchołka są jedynymi (-1) drogami.**



k-drogę P można rozbić na dwie k-drogi, Q oraz R.

Dowód indukcyjny

- **Krok indukcyjny:**
  - **Załóżmy ze S(k) jest spełnione i rozważmy co się dzieje z elementami dist[v][w] w czasie k+1 przebiegu pętli.**
  - **Załóżmy, że P jest najkrótszą (k+1) – drogą wiodąca z v do w. Mamy do czynienia z dwoma przypadkami, w zależności czy droga P prowadzi przez wierzchołek k+1 .**



k-drogę P można rozbić na dwie k-drogi, Q oraz R.

Dowód indukcyjny

- **Przypadek 1:**
  - **Jeżeli P jest k-drogą, to znaczy, kiedy P nie wiedzie przez wierzchołek k+1, to na podstawie hipotezy indukcyjnej wartość elementu dist[v][w] jest równa długości P po zakończeniu k-tej iteracji. Nie można zmienić wartości dist[v][w] podczas przebiegu wykonywanego dla wierzchołka k+1 traktowanego jako element centralny, gdyż nie istnieją żadne krótsze (k+1)-drogi.**
- **Przypadek 2:**
  - **Jeżeli P jest (k+1)- droga, można założyć, że P przechodzi przez wierzchołek k+1 tylko raz, gdyż cykl nigdy nie może spowodować zmniejszenia odległości (przy założeniu że wszystkie etykiety maja wartości nieujemne).**
  - **Stąd droga P składa się z k-drogi Q, wiodącej od wierzchołka v do k+1, oraz k-drogi R, wiodącej od wierzchołka k+1 do w. Na podstawie hipotezy indukcyjnej wartości elementów dist[v][k+1] oraz dist[k+1][w] będą długościami dróg odpowiednio, Q i R, po zakończeniu k-tej iteracji.**

Dowód indukcyjny

- **Ostatecznie wnioskujemy, że w (k+1) przebiegu, wartością elementu dist[v][w] staje się długość najkrótszej (k+1)-drogi dla wszystkich wierzchołków v oraz w.**
- **Jest to twierdzenie S(k+1), co oznacza koniec kroku indukcyjnego.**
- **Weźmy teraz, że k=n-1. Oznacza to, że wiemy iż po zakończeniu wszystkich n przebiegów, wartość dist[v][w] będzie minimalną odległością dowolnej (n-1)-drogi wiodącej z wierzchołka v do w. Ponieważ każda droga jest (n-1) drogą, więc dist[v][w] jest minimalną długością drogi wiodącej z wierzchołka v do w.**

Podsumowanie

PROBLEM	ALGORYTM(Y)	CZAS WYKONANIA
Minimalne drzewo rozpinające	Algorytm Kruskala	O(m log n)
Znajdowanie cykli	Przeszukiwanie w głąb	O(m)
Uporządkowanie topologiczne	Przeszukiwanie w głąb	O(m)
Osiągalność w przypadku pojedynczego źródła	Przeszukiwanie w głąb	O(m)
Spójne składowe	Przeszukiwanie w głąb	O(m)
Najkrótsza droga dla pojedyncz. źródła	Algorytm Dijskry	O(m log n)
Najkrótsza droga dla wszystkich par	Algorytm Dijskry	O(m n log n)
	Algorytm Floyda	$O(n^3)$

Pytania do egzaminu

1) **Co to jest grafowy model danych? Omów podstawową terminologie dotyczącą grafów**
2) **Co to znaczy implementacja przy pomocy macierzy sąsiedztwa? Zilustruj przykładem.**
3) **Co to znaczy implementacja przy pomocy listy sąsiedztwa? Zilustruj przykładem.**
4) **Co to jest składowa spójna grafu? Co to jest drzewo rozpinające?**
5) **Na czym polega algorytm Kruskala dla znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego?**
6) **Na czym polega sortowanie topologiczne grafu?**
7) **Na czym polega algorytm Dikstry, jaka jest jego złożoność obliczeniowa?**
8) **Na czym polega algorytm Floyda, jak jest jego złożoność obliczeniowa?**