TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

16/01/2017

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 15b

Definicje indukcyjne

Twierdzenia dowodzone przez indukcje

- Definicje indukcyjne
- Definicja drzewa
- Algorytm Dikstry
- Algorytm Floyda

Indukcja

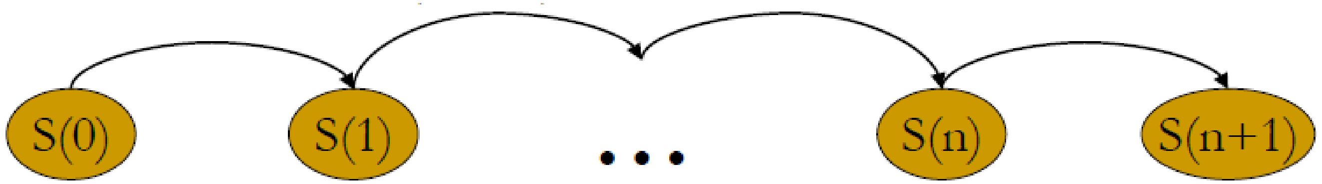
- **Zagadnieniem również związanym z iteracja i rekurencja jest indukcja (ang. induction):**
  - **technika stosowana w matematyce do dowodzenia, że twierdzenie S(n) jest prawdziwe dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych n lub, uogólniając, dla wszystkich liczb całkowitych ≥ od pewnego ograniczenia dolnego.**

Indukcja

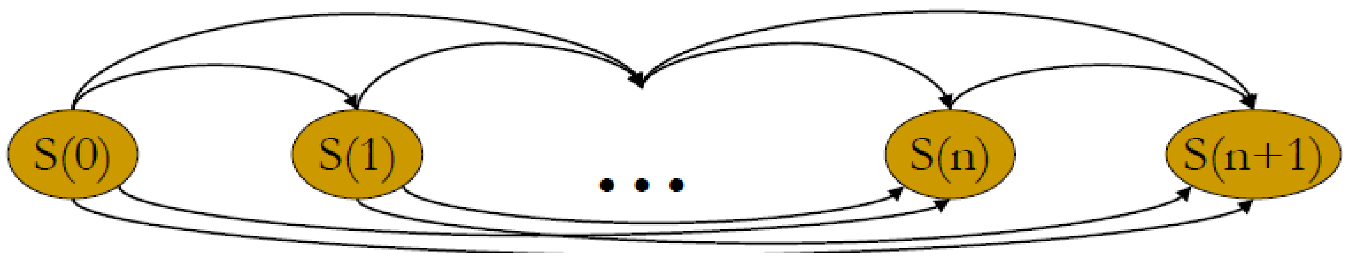
- **Niech $S(n)$ będzie dowolnym twierdzeniem dotyczącym liczby całkowitej n. W najprostszej formie dowodu indukcyjnego (indukcja częściowa) twierdzenia $S(n)$ dowodzi się dwóch faktów:**
  - **Przypadku podstawowego: za który często przyjmuje się twierdzenie $S(0)$. Przypadkiem podstawowym może jednak być równie dobrze $S(k)$ dla dowolnej liczby całkowitej k. Dowodzi się wówczas prawdziwości twierdzenia $S(n)$ dla $n \geq k$.**
  - **Kroku indukcyjnego: gdzie dowodzi się, że dla wszystkich $n \geq 0$ (lub wszystkich $n \geq k$), prawdziwość $S(n)$ implikuje prawdziwość $S(n+1)$.**

Indukcja zupełna i częściowa

- **Indukcja częściowa (słaba): wykorzystujemy wyłącznie hipotezę indukcyjna S(n) do wykazania prawdziwości S(n+1).**



- **Indukcja zupełna (silna): Możemy wykorzystać każdą z wartości S(i), od podstawy aż do n do wykazania prawdziwości S(n+1).**



Indukcja zupełna i częściowa

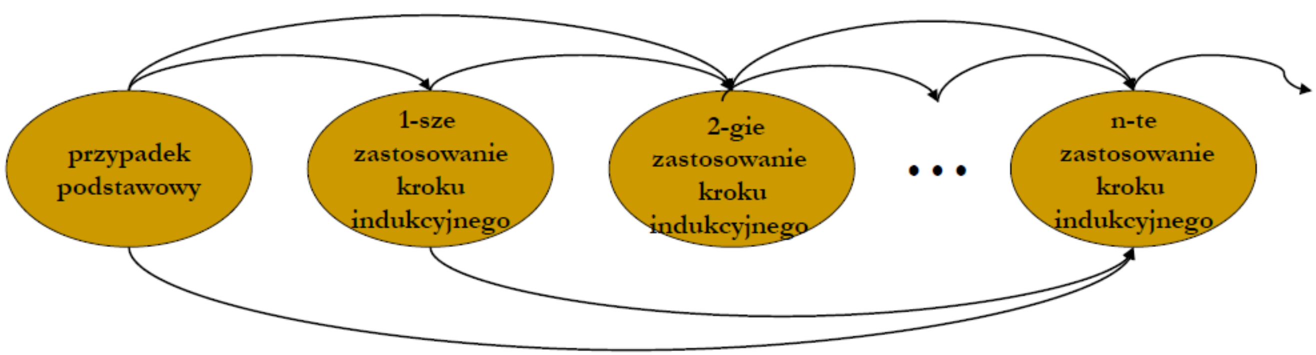
- Dla **indukcji zupełnej** dowodzimy, że twierdzenie $S(n)$, dla wszystkich $n \geq 0$ jest prawdziwe na podstawie dwóch faktów:
  - **Przypadku podstawowego:** dowodzi się prawdziwości $S(0)$ (lub $S(k)$ jeżeli to jest przypadek podstawowy)
  - **Kroku indukcyjnego:** gdzie dowodzi się, że dla wszystkich $n \geq 0$ (lub wszystkich $n \geq k$), że prawdziwość twierdzeń $S(0), S(1), S(2), \ldots, S(n)$ implikuje prawdziwość $S(n+1)$.

Indukcja zupełna i częściowa

- **Indukcje z większą liczba przypadków podstawowych:**
  Niekiedy przydatne jest wykorzystanie więcej niż jednego przypadku podstawowego:
  - **Przypadek podstawowy:** **dowodzi się poprawności wszystkich przypadków podstawowych, czyli $S(i_0)$, $S(i_1)$, $S(i_2)$, …, $S(i_m)$.**
  - **Krok indukcyjny:** **gdzie dowodzi się, że dla wszystkich $n \geq i_m$ (lub wszystkich $n>k$), z prawdziwość twierdzeń $S(i_0)$, $S(i_1)$, $S(i_2)$, …, $S(n)$ dla $n \geq i_m$, implikuje prawdziwość $S(n+1)$.**

Definicje indukcyjne

- **W definicji indukcyjnej definiuje się jedną lub więcej klas reprezentujących ściśle powiązane ze sobą obiekty (lub fakty) na bazie tych samych obiektów.**
- **Definicja indukcyjna powinna zawierać:**
  - **jedną lub więcej reguł podstawowych, z których niektóre definiują pewne obiekty proste,**
  - **jedną lub więcej reguł indukcyjnych, za pomocą których definiuje się większe obiekty na bazie mniejszych z tego samego zbioru.**



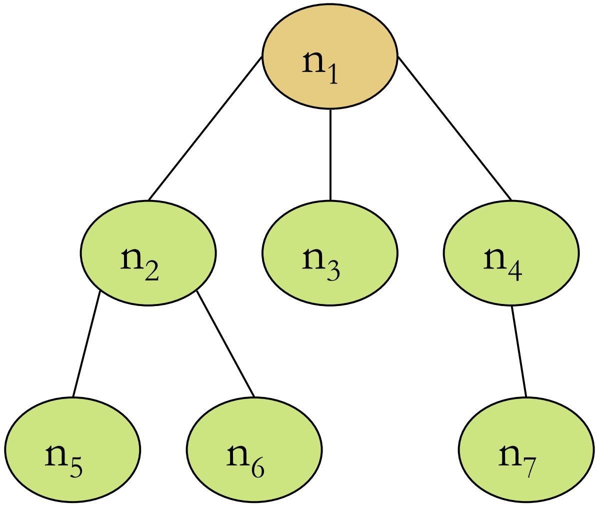
Definicje indukcyjne

- **Istnieje ścisłe powiązanie pojęć dowodów indukcyjnych, definicji indukcyjnych oraz programów rekurencyjnych.**
- **Każde z tych pojęć opiera się na „kroku podstawowym" i „kroku indukcyjnym".**
- **W „zwykłych" („częściowych") indukcjach kolejne kroki zależą wyłącznie od kroków poprzednich.**
- **Często zachodzi konieczność przeprowadzania dowodów za pomocą indukcji zupełnej, w której każdy krok może zależeć od wszystkich kroków wcześniejszych.**

- **Indukcja ma zasadnicze znaczenie w dowodzeniu poprawności programów lub ich fragmentów.**

Drzewa

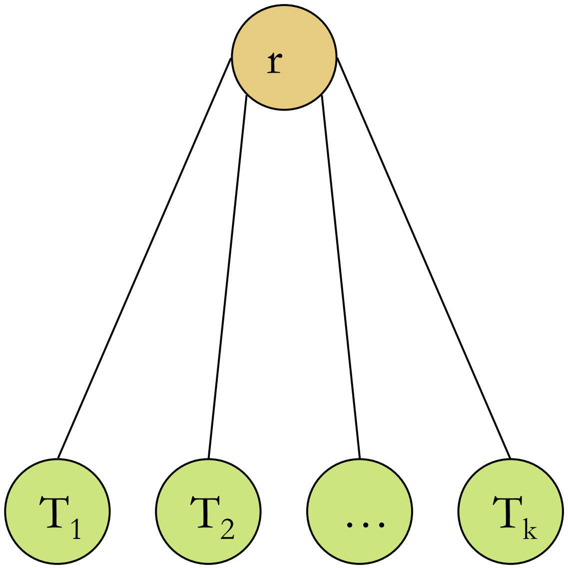
- **Drzewa są zbiorami punktów, zwanych węzłami lub wierzchołkami, oraz połączeń, zwanych krawędziami.**
- **Krawędź łączy dwa różne węzły.**



n_1 = rodzic n_2, n_3, n_4
n_2 = rodzic n_5, n_6
n_6 = dziecko n_2

Indukcyjna definicja drzew

- **Podstawa:** **Pojedynczy węzeł n jest drzewem. Mówimy że n jest korzeniem drzewa złożonego z jednego węzła.**
- **Indukcja:** **Niech r będzie nowym węzłem oraz niech T_1, T_2, …, T_k będą drzewami zawierającymi odpowiednio korzenie c_1, c_2, …, c_k. Załóżmy że żaden węzeł nie występuje więcej niż raz w drzewach T_1, T_2, …, T_k, oraz że r, będący „nowym” węzłem, nie występuje w żadnym z tych drzew. Nowe drzewo T tworzymy z węzła r i drzew T_1, T_2, …, T_k w następujący sposób:**
  - **węzeł r staje się korzeniem drzewa T;**
  - **dodajemy k krawędzi, po jednej łącząc r z każdym z węzłów c_1, c_2, …, c_k, otrzymując w ten sposób strukturę w której każdy z tych węzłów jest dzieckiem korzenia r. Inny sposób interpretacji tego kroku to uczynienie z węzła r rodzica każdego z korzeni drzew T_1, T_2, …, T_k.**

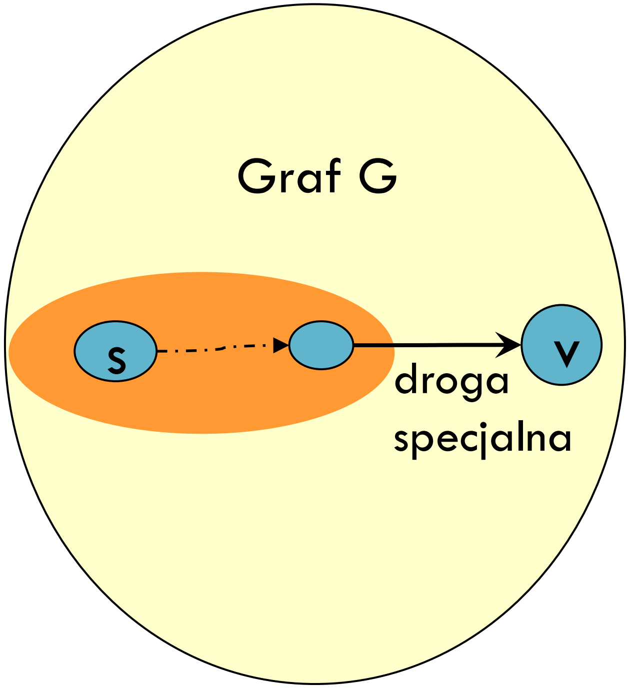


Algorytm Dikstry

- **Szukamy najkrótszej drogi pomiędzy dwoma wierzchołkami**
  - **Rozpatrujemy graf G (skierowany lub nieskierowany), w którym wszystkie krawędzie zaetykietowano wartościami reprezentującymi ich długości.**
  - **Długość (ang. distance) danej drogi stanowi wartość sumy etykiet związanych z nią krawędzi. Minimalna odległość z wierzchołka u do wierzchołka v to minimalna długość którejś z dróg od u do v.**

Algorytm Dikstry

- **Traktujemy wierzchołek s jako wierzchołek źródłowy. Na etapie pośrednim wykonywania algorytmu w grafie G istnieją tzw. wierzchołki ustalone (ang. settled), tzn. takie dla których znane są odległości minimalne. W szczególności zbiór takich wierzchołków zawiera również wierzchołek s.**
- **Dla nieustalonego wierzchołka v należy zapamiętać długość najkrótszej drogi specjalnej (ang. *special path*) czyli takiej która rozpoczyna się w wierzchołku źródłowym, wiedzie przez ustalone wierzchołki, i na ostatnim etapie przechodzi z obszaru ustalonego do wierzchołka v.**



Algorytm Dikstry

- Dla każdego wierzchołka u zapamiętujemy wartość dist(u).
- Jeśli u jest wierzchołkiem ustalonym, to dist(u) jest długością najkrótszej drogi ze źródła do wierzchołka u.
- Jeśli u nie jest wierzchołkiem ustalonym, to dist(u) jest długością drogi specjalnej ze źródła do u.
- Na czym polega ustalanie wierzchołków:
  - znajdujemy wierzchołek v który jest nieustalony ale posiada najmniejszą dist(v) ze wszystkich wierzchołków nieustalonych
  - przyjmujemy wartość dist(v) za minimalną odległość z s do v
  - dostosowujemy wartości wszystkich dist(u) dla innych wierzchołków, które nie są ustalone, wykorzystując fakt, że wierzchołek v jest już ustalony.
  - Czyli porównujemy stare dist(u) z wartością dist(v)+etykieta(v, u) jeżeli taka (v, u) krawędź istnieje.
- Czas wykonania algorytmu jest O(m log n) .

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

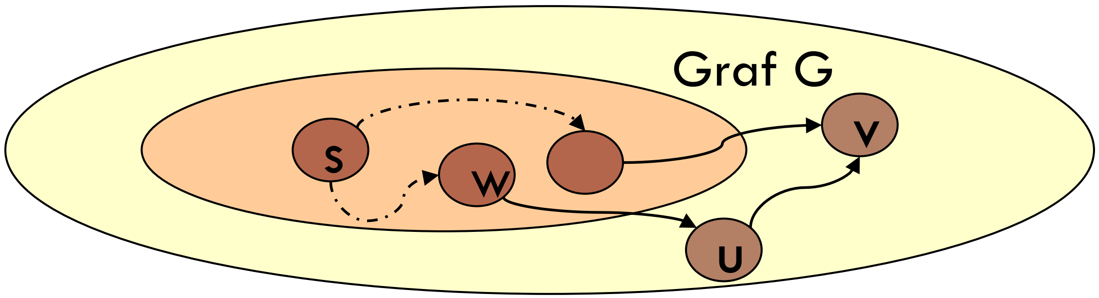
- **W celu wykazania poprawności algorytmu Dijkstry należy przyjąć, że etykiety krawędzi są nieujemne.**
- **Indukcyjny dowód poprawności względem k prowadzi do stwierdzenia że:**
  1) **dla każdego wierzchołka ustalonego u, wartość dist(u) jest minimalną odległością z s do u, a najkrótsza droga do u składa się tylko z wierzchołków ustalonych.**
  2) **dla każdego nieustalonego wierzchołka u, wartość dist(u) jest minimalną długością drogi specjalnej z s do u (jeśli droga nie istnieje wartość wynosi INF).**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Podstawa:**
  - **Dla k=1 wierzchołek s jest jedynym wierzchołkiem ustalonym. Inicjalizujemy dist(s) wartością 0, co spełnia warunek (1).**
  - **Dla każdego innego wierzchołka u, dist(u) jest inicjalizowane wartością etykiety krawędzi (s, u), o ile taka istnieje. Jeżeli nie istnieje, wartością inicjalizacji jest INF. Zatem spełniony jest również warunek (2).**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Załóżmy, ze warunki (1) i (2) za spełnione po ustaleniu k wierzchołków oraz niech v będzie (k+1) ustalonym wierzchołkiem.**



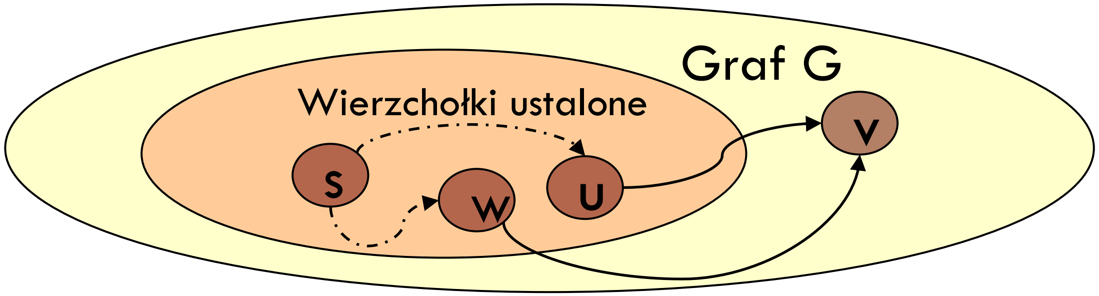
Hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u.

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ dist(v) jest najmniejszą długością drogi z s do v.**
    - **Załóżmy, że tak nie jest. Musiała by więc istnieć hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u. Jednakże wierzchołek v został obrany jako k+1 ustalony, co oznacza, ze w tym momencie dist(u) nie może być mniejsze od dist(v), gdyż wówczas jako (k+1) wierzchołek wybrany zostałby wierzchołek u.**
    - **Na podstawie warunku (2) hipotezy indukcyjnej wiadomo, ze dist(u) jest minimalna długością drogi specjalnej wiodącej do u. Jednak droga z s przez w do u jest drogą specjalną, tak więc jej długość równa jest co najmniej dist(u). Stąd domniemana krótsza droga z s do v wiodąca przez w i u ma długość równą co najmniej dist(v), ponieważ pierwsza jej część, - z s do u – ma długość dist(u), a dist(u) ≥ dist(v). Stąd warunek (1) jest spełniony dla k+1 wierzchołków.**

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny:**
  - **Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ dist(v) jest najmniejszą długością drogi z s do v.**



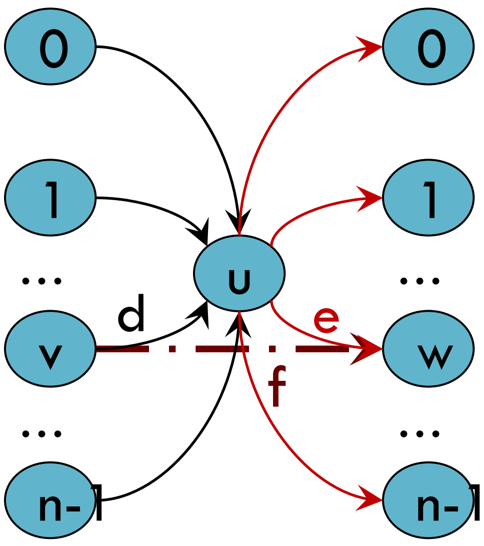
Dwie możliwości określenia przedostatniego wierzchołka w drodze specjalnej do u.

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu Dikstry

- **Krok indukcyjny (cd)**:
  - Teraz należy pokazać, że warunek (2) jest spełniony po dodaniu do wierzchołków ustalonych wierzchołka v.
    - Weźmy pod uwagę pewien wierzchołek u, który wciąż pozostaje nieustalony po dodaniu v do wierzchołków ustalonych. W najkrótszej drodze specjalnej do u musi istnieć pewien wierzchołek przedostatni. Wierzchołkiem tym może być zarówno v, jak i pewien inny wierzchołek w.
    - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest v. Długość drogi z s przez v do u wynosi dist(v) + wartość etykiety v → u.
    - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest w. Na podstawie warunku (1) hipotezy indukcyjnej można stwierdzić, że najkrótsza droga z s do w składa się jedynie z wierzchołków, które zostały ustalone przed v, stąd wierzchołek v nie występuje w tej drodze.
    - A więc długość drogi specjalnej do u się nie zmienia po dodaniu v do wierzchołków ustalonych.
    - Ponieważ w momencie ustalania wierzchołka v przeprowadzona jest operacja dostosowywania dist(u), warunek (2) jest spełniony.

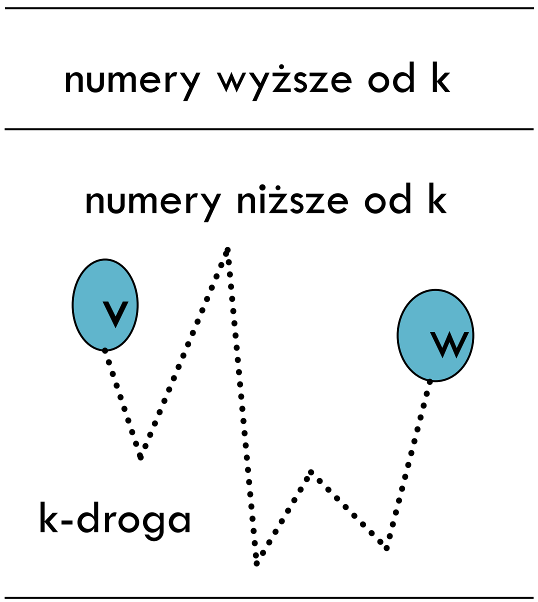
Algorytm Floyda-Warshalla

- **Podstawa algorytmu jest działanie polegające na rozpatrywaniu po kolei każdego wierzchołka grafu jako elementu centralnego (ang. *pivot*).**
- **Kiedy wierzchołek u jest elementem centralnym, staramy się wykorzystać fakt, że u jest wierzchołkiem pośrednim między wszystkimi parami wierzchołków.**
- **Dla każdej pary wierzchołków, na przykład v i w, jeśli suma etykiet krawędzi (v, u) oraz (u, w) (na rysunku d+e) , jest mniejsza od bieżąco rozpatrywanej etykiety f krawędzi wiodącej od v do w, to wartość f jest zastępowana wartością d+e.**



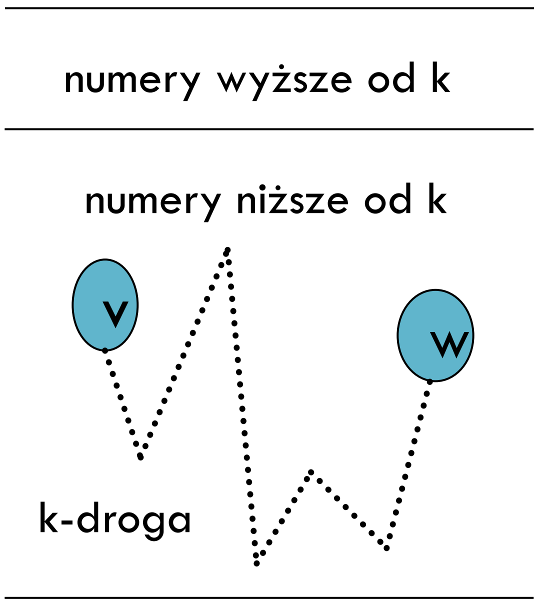
Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

- **Na dowolnym etapie działania algorytmu Floyda-Warshalla odległość z wierzchołka v do wierzchołka w stanowi długość najkrótszej z tych dróg, które wiodą jedynie przez wierzchołki użyte dotąd jako elementy centralne.**
- **Ponieważ wszystkie wierzchołki zostają w końcu użyte jako elementy centralne, elementy dist[v][w] zawierają po zakończeniu działań minimalne długości wszystkich możliwych dróg.**



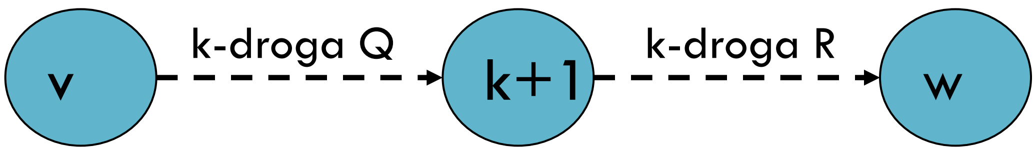
Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

- **Definiujemy k-drogę z wierzchołka v do wierzchołka w jako drogę z v do w taką, że żaden jej wierzchołek pośredni nie ma numeru wyższego od k.**
- **Należy zauważyć, że nie ma ograniczenia odnośnie tego, że v lub w mają mieć wartość k lub mniejszą.**
- **k=-1 oznacza że droga nie posiada wierzchołków pośrednich.**



Dowód indukcyjny

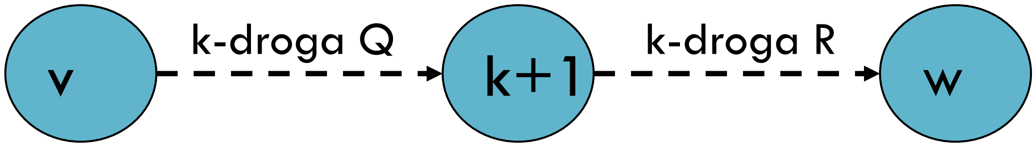
- **Teza indukcyjna S(k):**
  - **jeżeli etykiety krawędzi maja wartości nieujemne, to po przebiegu k – pętli, element dist[v][w] ma wartość najkrótszej k – drogi z v do w lub ma wartość INF, jeżeli taka droga nie istnieje.**
- **Podstawa:**
  - **Podstawą jest warunek k = -1. Krawędzie i drogi składające się z pojedynczego wierzchołka są jedynymi (-1) drogami.**



k-drogę P można rozbić na dwie k-drogi, Q oraz R.

Dowód indukcyjny

- **Krok indukcyjny:**
  - **Załóżmy ze S(k) jest spełnione i rozważmy co się dzieje z elementami dist[v][w] w czasie k+1 przebiegu pętli.**
  - **Załóżmy, że P jest najkrótszą (k+1) – drogą wiodąca z v do w. Mamy do czynienia z dwoma przypadkami, w zależności czy droga P prowadzi przez wierzchołek k+1 .**



k-drogę P można rozbić
na dwie k-drogi, Q oraz R.

Dowód indukcyjny

- **Przypadek 1:**
  - **Jeżeli P jest k-drogą, to znaczy, kiedy P nie wiedzie przez wierzchołek k+1, to na podstawie hipotezy indukcyjnej wartość elementu dist[v][w] jest równa długości P po zakończeniu k-tej iteracji. Nie można zmienić wartości dist[v][w] podczas przebiegu wykonywanego dla wierzchołka k+1 traktowanego jako element centralny, gdyż nie istnieją żadne krótsze (k+1)-drogi.**
- **Przypadek 2:**
  - **Jeżeli P jest (k+1)- droga, można założyć, że P przechodzi przez wierzchołek k+1 tylko raz, gdyż cykl nigdy nie może spowodować zmniejszenia odległości (przy założeniu że wszystkie etykiety maja wartości nieujemne).**
  - **Stąd droga P składa się z k-drogi Q, wiodącej od wierzchołka v do k+1, oraz k-drogi R, wiodącej od wierzchołka k+1 do w. Na podstawie hipotezy indukcyjnej wartości elementów dist[v][k+1] oraz dist[k+1][w] będą długościami dróg odpowiednio, Q i R, po zakończeniu k-tej iteracji.**

Dowód indukcyjny

- **Ostatecznie wnioskujemy, że w (k+1) przebiegu, wartością elementu dist[v][w] staje się długość najkrótszej (k+1)-drogi dla wszystkich wierzchołków v oraz w.**
- **Jest to twierdzenie S(k+1), co oznacza koniec kroku indukcyjnego.**
- **Weźmy teraz, że k=n-1. Oznacza to, że wiemy iż po zakończeniu wszystkich n przebiegów, wartość dist[v][w] będzie minimalną odległością dowolnej (n-1)-drogi wiodącej z wierzchołka v do w. Ponieważ każda droga jest (n-1) drogą, więc dist[v][w] jest minimalną długością drogi wiodącej z wierzchołka v do w.**