TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

16/01/2017

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Repetytorium – złożoność obliczeniowa

Złożoność obliczeniowa

- Notacja „*wielkie 0*”
- Notacja Ω i Θ
- Rozwiązywanie rekurencji
- Złożoność obliczeniowa zamortyzowana

Złożoność obliczeniowa

- **Złożoność obliczeniowa**:
  - Jest to miara służąca do porównywania efektywności algorytmów.
  - Mamy dwa kryteria efektywności:
    - Czas,
    - Pamięć
- Do oceny efektywności stosujemy jednostki logiczne wyrażające związek miedzy rozmiarem danych N (wielkość pliku lub tablicy) a ilością czasu T potrzebną na ich przetworzenie.

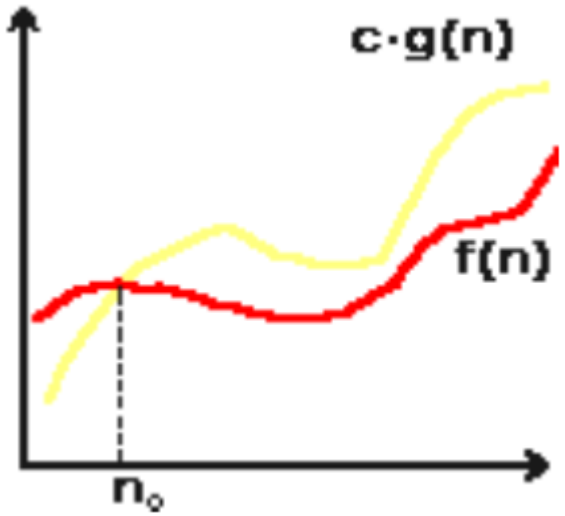
Złożoność asymptotyczna

- Funkcja wyrażająca zależność miedzy N a T jest zwykle bardzo skomplikowana, a jej obliczenie ma znaczenie jedynie w odniesieniu do dużych rozmiarów danych
- Przybliżona miara efektywności to tzw. **złożoność asymptotyczna**.

Notacja „wielkie O ”

Definicja:

f(n) jest O(g(n)), jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że:
$f(n) < c \cdot g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.



Przykład:

- $f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$

możemy przybliżyć jako:

$f(n) \approx n^2 + 100n + O(\log_{10} n)$

albo jako:

$f(n) \approx O(n^2)$

- Notacja **„wielkie O ”** ma kilka pozytywnych własności które możemy wykorzystać przy szacowaniu efektywności algorytmów.

Własności notacji „*wielkie O*”

- **Własność 1** (przechodniość):
  - Jeśli f(n) jest O(*g(n)*) i g(n) jest O(*h(n)*), to f(n) jest O(*h(n)*)
- **Własność 2:**
  - Jeśli f(n) jest O(*h(n)*) i g(n) jest O(*h(n)*), to f(n)+g(n) jest O(*h(n)*)
- **Własność 3:**
  - Funkcja an^k jest $O(n^k)$
- **Własność 4:**
  - Funkcja n^k jest $O(n^{k+i})$ dla dowolnego dodatniego i

Własności notacji „*wielkie O*”

- Z tych wszystkich własności wynika, że dowolny wielomian jest **„*wielkie O*”** dla n podniesionego do najwyższej w nim potęgi, czyli :
  $f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ jest $O(n^k)$

  (jest też oczywiście $O(n^{k+j})$ dla dowolnego dodatniego j)

Własności notacji „wielkie O”

- **Własność 5:**
  - Jeśli f(n) = c g(n), to f(n) jest $O(g(n))$
- **Własność 6:**
  - Funkcja $\log_a n$ jest $O(\log_b n)$ dla dowolnych a i b większych niż 1
- **Własność 7:**
  - $\log_a n$ jest $O(\log_2 n)$ dla dowolnego dodatniego a

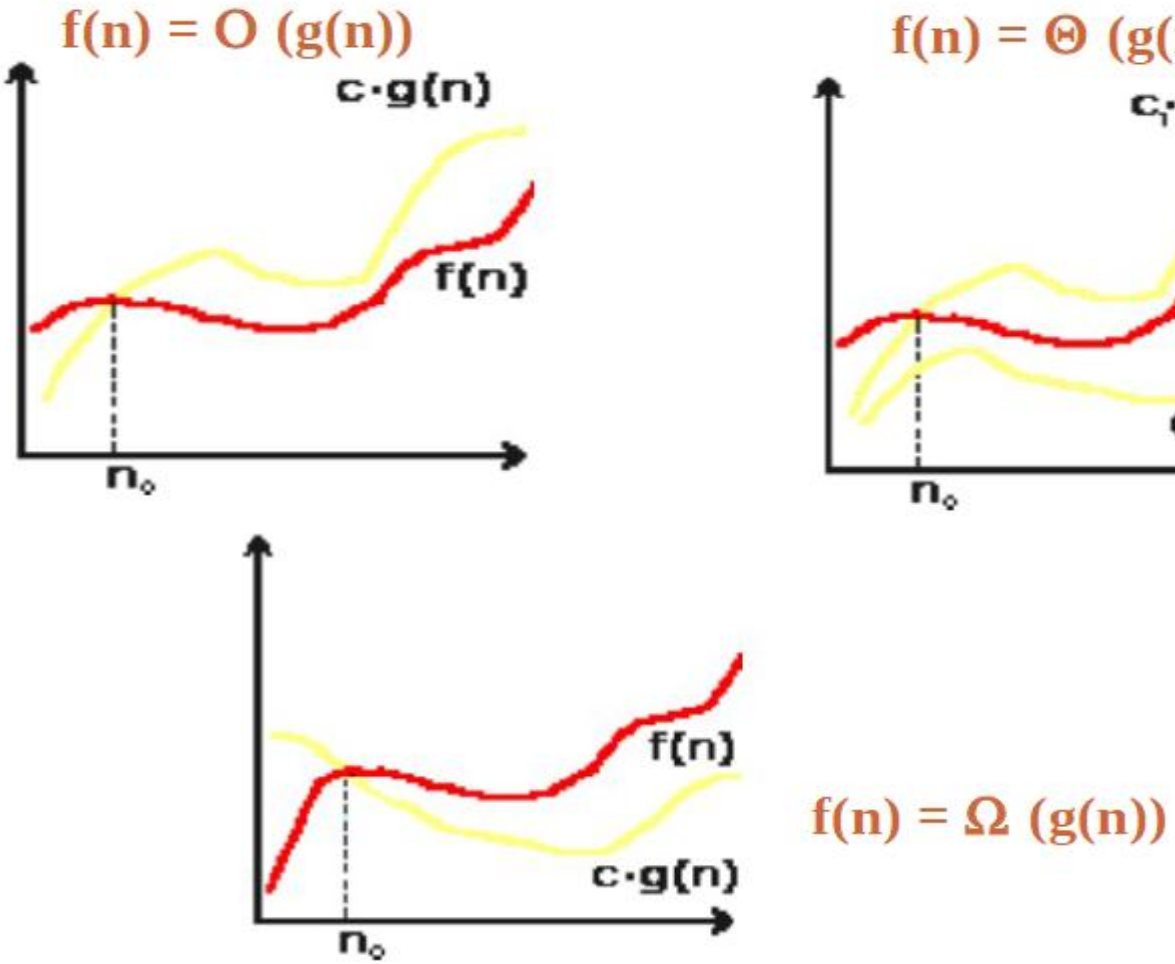
Własności notacji „*wielkie O*”

- Jedną z najważniejszych funkcji przy ocenianiu efektywności algorytmów jest **funkcja logarytmiczna**.
- Jeżeli można wykazać że złożoność algorytmu jest rzędu logarytmicznego, algorytm można traktować jako bardzo dobry.
- Istnieje wiele funkcji lepszych w tym sensie niż logarytmiczna, jednak zaledwie kilka spośród nich, jak $O(\log_2 \log_2 n)$ czy $O(1)$ ma praktyczne znaczenie.

Notacja Ω i Θ

- Notacja *„wielkie O”* odnosi się do górnych ograniczeń funkcji. Istnieje symetryczna definicja dotycząca dolnych ograniczeń
- Definicja
  - f(n) jest **Ω(g(n))**, jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że, $f(n) \geq c\, g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.
- Równoważność
  - f(n) jest **Ω(g(n))** wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) jest $O(f(n))$
- Definicja
  - f(n) jest **Θ(g(n))**, jeśli istnieją takie liczby dodatnie c_1, c_2 i n_0 takie że, $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

Notacja O, Ω i Θ



Czas działania programu

- Mając do dyspozycji definicję ***„wielkie O”*** oraz własności (1)-(7) będziemy mogli, wg. kilku prostych zasad, skutecznie analizować czasy działania większości programów spotykanych w praktyce.
- Efektywność algorytmów ocenia się przez szacowanie ilości czasu i pamięci potrzebnych do wykonania zadania, dla którego algorytm został zaprojektowany.
- Najczęściej jesteśmy zainteresowani **złożonością czasową**, mierzoną zazwyczaj liczbą przypisań i porównań realizowanych podczas wykonywania programu.
- Bardzo często interesuje nas tylko **złożoność asymptotyczna**, czyli czas działania dla dużej ilości analizowanych zmiennych.

Czas działania programu

- **Dla konkretnych danych wejściowych jest wyrażony liczba wykonanych prostych (elementarnych) operacji lub "kroków". Jest dogodne zrobienie założenia że operacja elementarna jest maszynowo niezależna.**
- **Każde wykonanie i-tego wiersza programu jest równe c_i, przy czym c_i jest stałą.**
- **Kiedy algorytm zawiera rekurencyjne wywołanie samego siebie, jego czas działania można często opisać zależnością rekurencyjna (rekurencja) wyrażającą czas dla problemu rozmiaru n za pomocą czasu dla podproblemów mniejszych rozmiarów.**
- **Możemy wiec użyć narzędzi matematycznych aby rozwiązać rekurencje i w ten sposób otrzymać oszacowania czasu działania algorytmu.**

Rekurencja dla algorytmu typu „dziel i zwyciężaj”

- **Rekurencja odpowiadającą czasowi działania algorytmu typu “dziel i zwyciężaj” opiera się na podziale jednego poziomu rekursji na trzy etapy.**
  - **Niech T(n) będzie czasem działania dla jednego problemu rozmiaru n.**
  - **Jeśli rozmiar problemu jest odpowiednio mały, powiedzmy $n \leq c$ dla pewnej stałej c, to jego rozwiązanie zajmuje stały czas, co zapiszemy jako $\Theta(1)$.**
  - **Załóżmy ze dzielimy problem na a podproblemów, każdy rozmiaru n/b. Jeśli D(n) jest czasem dzielenia problemu na podproblemy, a C(n) czasem scalania rozwiązań podproblemow w pełne rozwiązanie dla oryginalnego problemu, to otrzymujemy rekurencje**
  - $T(n) = \Theta(1)$ jeśli $n \leq c$
  - $T(n) = a\,T(n/b) + D(n) + C(n)$ w przeciwnym przypadku

Rekurencja dla algorytmu typu „dziel i zwyciężaj”

- **Przykład: algorytm sortowania przez scalanie**
  - **dziel: znajdujemy środek przedziału, zajmuje to czas stały $D(n)= \theta(1)$,**
  - **zwyciężaj: rozwiązujemy rekurencyjnie dwa podproblemy, każdy rozmiaru n/2, co daje czas działania 2 T(n/2),**
  - **połącz: działa w czasie $\theta(n)$, a wiec $C(n)= \theta(n)$.**
- **Ostatecznie:**
  - **$T(n) = \theta(1)$ jeśli n=1**
  - **$T(n) = 2\,T(n/2) + \theta(1) + \theta(n)$ jeśli n>1**
- **Rozwiązaniem tej rekurencji jest $T(n) = \theta(n \log n)$.**

Metody rozwiązywania rekurencji

- **Metoda podstawiania:**
  - **zgadujemy oszacowanie, a następnie dowodzimy przez indukcję jego poprawność.**
- **Metoda iteracyjna:**
  - **przekształcamy rekurencję na sumę, korzystamy z technik ograniczania sum.**
- **Metoda uniwersalna:**
  - **stosujemy oszacowanie na rekurencję mające postać $T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$, gdzie $a \geq 1$, $b > 1$, a $f(n)$ jest daną funkcją.**

Metoda podstawiania

- **Polega na zgadnięciu postaci rozwiązania, a następnie wykazaniu przez indukcję, że jest ono poprawne.**
- **Trzeba też znaleźć odpowiednie stałe.**
- **Bardzo skuteczna, stosowana tylko w przypadkach kiedy łatwo jest przewidzieć postać rozwiązania.**

Metoda podstawiania

- **Przykład:**
  - **Postać rekurencji:**
    $T(n) = 2T(n/2) + n$
  - **Zgadnięte rozwiązanie:**
    $T(n) = \theta(n \log n)$
  - **Podstawa:**
    $n=2; T(1)=1; T(2)=4;$
  - **Indukcja:**
    $T(n) \leq 2\,(c(n/2)\log(n/2)) + n \leq c\,n \log(n/2) + n$
    $T(n) \leq c\,n \log(n/2) + n = c\,n \log(n) - c\,n \log(2) + n$
    $T(n) \leq c\,n \log(n) - c\,n \log(2) + n = c\,n \log(n) - c\,n + n$
    $T(n) \leq c\,n \log(n) - c\,n + n \leq c\,n \log(n)$

spełnione dla c>=1;

Metoda iteracyjna

- **Polega na rozwijaniu (iterowaniu) rekurencji i wyrażanie jej jako sumy składników zależnych tylko od n warunków brzegowych. Następnie mogą być użyte techniki sumowania do oszacowania rozwiązania.**

Metoda iteracyjna

- **Przykład:**
  - **Postać rekurencji:**
    $T(n) = 3T(n/4) + n$
  - **Iterujemy:**
    $T(n) = n + 3T(n/4) = n + 3((n/4) + 3T(n/16)) = n + 3\,(n/4) + 9T(n/16)$
    $T(n) = n + 3\,(n/4) + 9T(n/16) = n + 3\,n/4 + 9\,n/16 + 27\,T(n/64)$
- **Iterujemy tak długo aż osiągniemy warunki brzegowe.**
  Składnik i-ty w ciągu wynosi $3i\ n/4i$.
  Iterowanie kończymy, gdy $n=1$ lub $n/4i = 1$ (czyli $i > \log4(n)$).
  $T(n) \leq n + 3n/4 + 9n/16 + 27n/64 + \ldots + 3\log4n\ \theta(1)$
  $T(n) \leq 4n + 3\log4n\ \theta(1) = \theta(n)$

Metoda iteracyjna

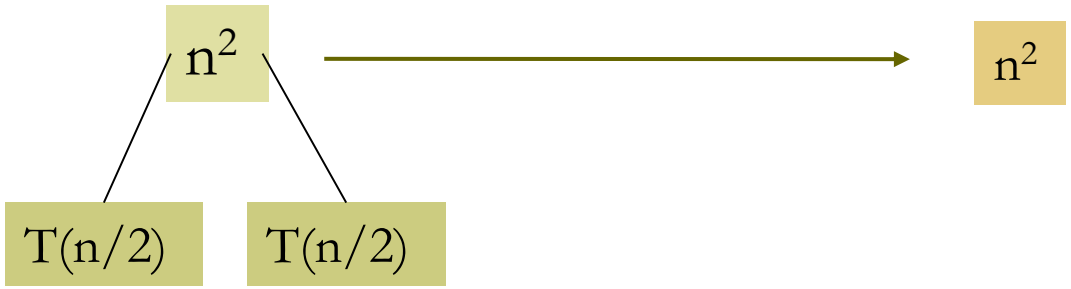
- **Metoda iteracyjna jest zazwyczaj związana z dużą ilością przekształceń algebraicznych, więc zachowanie prostoty nie jest łatwe.**
- **Punkt kluczowy to skoncentrowanie się na dwóch parametrach:**
  - **liczbie iteracji koniecznych do osiągnięcia warunku brzegowego**
  - **oraz sumie składników pojawiających się w każdej iteracji.**

Drzewa rekursji

- **Pozwalają w dogodny sposób zilustrować rozwijanie rekurencji, jak również ułatwiają stosowanie aparatu algebraicznego służącego do rozwiązywania tej rekurencji.**
- **Szczególnie użyteczne gdy rekurencja opisuje algorytm typu “dziel i zwyciężaj”.**

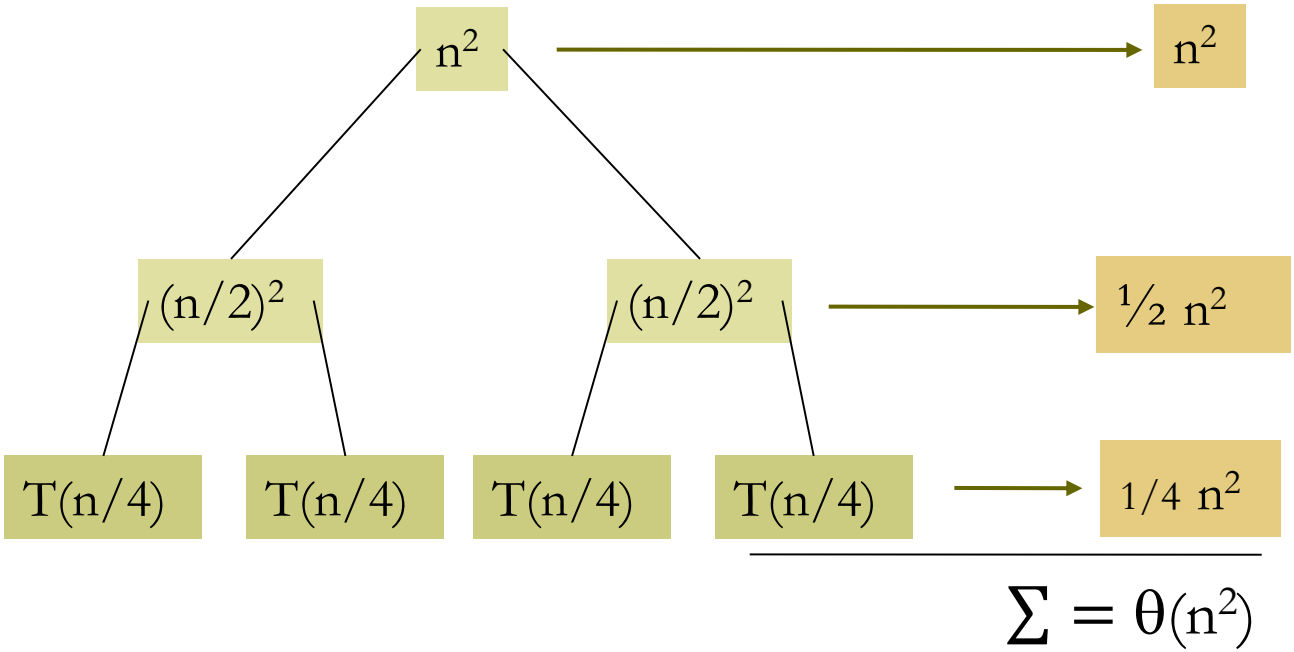
Drzewa rekursji dla algorytmu „dziel i zwyciężaj”

- $T(n) = 2\,T(n/2) + n^2$



Drzewa rekursji dla algorytmu „dziel i zwyciężaj”

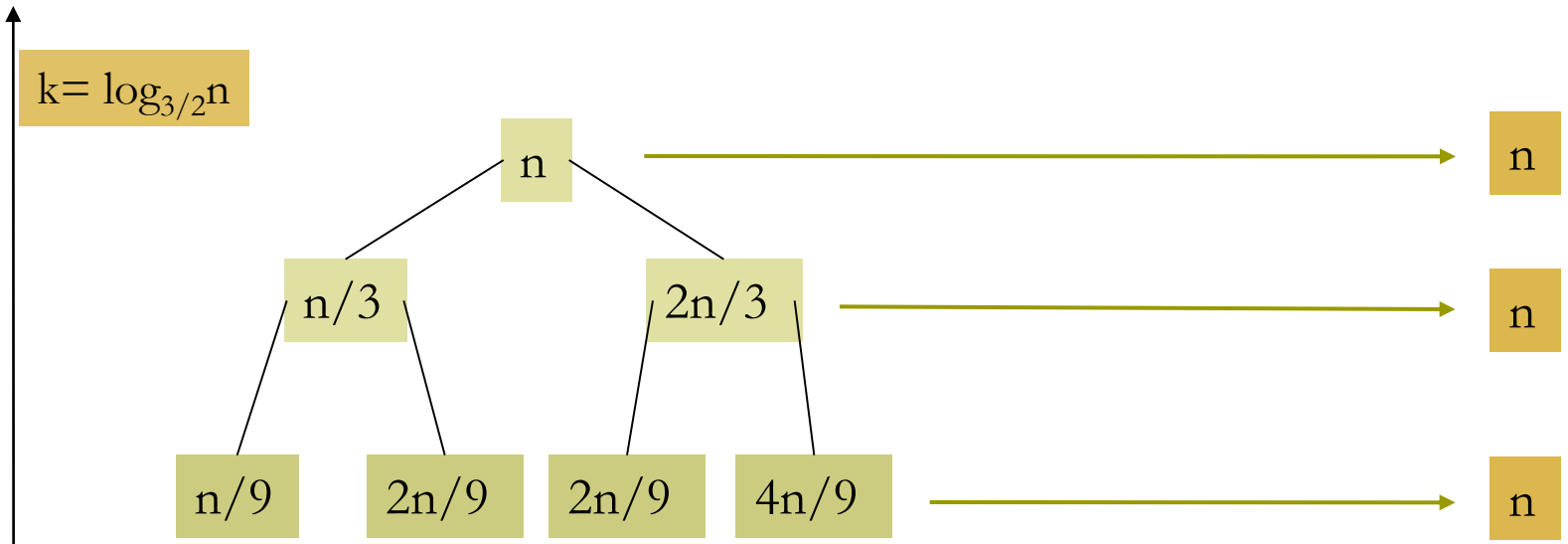
- $T(n) = 2\,T(n/2) + n^2$



- **Rozwiązaniem tego równania jest $T(n) = \theta(n^2)$**

Drzewa rekursji

- $T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + n$



- **Rozwiązaniem tego równania jest $T(n) = \theta(n \log n)$**

Funkcje tworzące

- **Rekurencje były badane już od 1202 roku przez L. Fibonacciego**
- **A. de Moivre w 1730 roku wprowadził pojęcie funkcji tworzących do rozwiązywania rekurencji.**

Metoda rekurencji universalnej

- **Metoda rekurencji uniwersalnej podaje "uniwersalny przepis" rozwiązywania równania rekurencyjnego postaci:**
  - **$T(n) = a\,T(n/b) + f(n)$**

  gdzie $a \geq 1$ i $b > 1$ są stałymi, a $f(n)$ jest funkcja asymptotycznie dodatnia.
- **Za wartość (n/b) przyjmujemy najbliższą liczbę całkowitą (mniejsza lub większą od wartości dokładnej).**

Metoda rekurencji universalnej

- **Rekurencja opisuje czas działania algorytmu, który dzieli problem rozmiaru n na a problemów, każdy rozmiaru n/b, gdzie a i b są dodatnimi stałymi.**
- **Każdy z a problemów jest rozwiązywany rekurencyjnie w czasie T(n/b).**
- **Koszt dzielenia problemu oraz łączenia rezultatów częściowych jest opisany funkcja f(n).**

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

- Niech $\mathbf{a \geq 1}$ i $\mathbf{b > 1}$ będą stałymi, niech $\mathbf{f(n)}$ będzie pewną funkcją i niech $\mathbf{T(n)}$ będzie zdefiniowane dla nieujemnych liczb całkowitych przez rekurencje

$$\mathbf{T(n) = a\,T(n/b) + f(n)}$$

gdzie $\mathbf{(n/b)}$ oznacza najbliższą liczbę całkowitą do wartości dokładnej $\mathbf{n/b}$.

- Wtedy funkcja $\mathbf{T(n)}$ może być ograniczona asymptotycznie w następujący sposób:
  - Jeśli $\mathbf{f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})}$ dla pewnej stałej $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$, to $\mathbf{T(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$.
  - Jeśli $\mathbf{f(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$ to $\mathbf{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)}$.
  - Jeśli $\mathbf{f(n) = n^{\log_b a + \varepsilon}}$ dla pewnej stałej $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ i jeśli $\mathbf{af(n/b) \leq cf(n)}$ dla pewnej stałej $\mathbf{c < 1}$ i wszystkich dostatecznie dużych $\mathbf{n}$, to $\mathbf{T(n) = \Theta(f(n))}$.

Twierdzenie o rekurencji uniwersalnej

- **"Intuicyjnie…":**
  - W każdym z trzech przypadków porównujemy funkcje **f(n)** z funkcją $\mathbf{n^{\log_b a}}$. Rozwiązanie rekurencji zależy od większej z dwóch funkcji.
  - Jeśli funkcja $\mathbf{n^{\log_b a}}$ jest większa, to rozwiązaniem rekurencji jest:
    - $\mathbf{T(n) = \Theta(n^{\log_b a})}$.
  - Jeśli funkcje są tego samego rzędu, to mnożymy przez **log n** i rozwiązaniem jest:
    - $\mathbf{T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n) = T(n) = \Theta(f(n) \log n)}$.
  - Jeśli **f(n)** jest większa, to rozwiązaniem jest:
    - $\mathbf{T(n) = \Theta(f(n))}$.

Przykład

- $T(n) = 9\,T(n/3) + n$

  $a=9,$
  $b=3,$
  $f(n)=n,$

  a zatem $n^{\log_b a} = n^{\log_3 9} = \Theta(n^2)$.

- Ponieważ $f(n)=O(n^{\log_3 9-\varepsilon})$, gdzie $\varepsilon=1$, możemy zastosować przypadek 1 z twierdzeniai wnioskować że rozwiązaniem jest $T(n) = \Theta(n^2)$.

Przykład

- $T(n) = T(2n/3) + 1$

  $a=1,$

  $b=3/2,$

  $f(n)=1,$

  a zatem $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1.$

- Stosujemy przypadek 2, gdyż $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(1)$,
  a zatem rozwiązaniem rekurencji jest $T(n) = \Theta(\log n)$.

Przykład

- $T(n) = 3T(n/4) + n \log n$

  $a=3,$
  $b=4,$
  $f(n)=n \log n,$

  a zatem $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = O(n^{0,793})$.

- Ponieważ $f(n) = \Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon})$, gdzie $\varepsilon \approx 0.2$, wiec stosuje się tutaj przypadek 3, jeśli możemy pokazać ze dla $f(n)$ zachodzi warunek regularności.
  Dla dostatecznie dużych n:

  $$af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \leq (3/4)n\log(n) = c\, f(n)$$

  dla $c=3/4$.

- Warunek jest spełniony i możemy napisać że rozwiązaniem rekurencji jest $T(n) = \Theta(n \log n)$.

Przykład

- $T(n) = 2T(n/2) + n \log n$

  $a=2,$
  $b=2,$
  $f(n)=n \log n,$

  a zatem $n^{\log_b a} = n$.
- Wydaje się że powinien to być przypadek 3, gdyż $f(n)=n \log n$ jest asymptotycznie większe niż $n^{\log_b a} = n$, ale nie wielomianowo większy.
- Stosunek $f(n)/ n^{\log_b a} = (n \log n)/n = \log n$ jest asymptotycznie mniejszy niż n^{ε} dla każdej dodatniej stałej ε.
- W konsekwencji rekurencja ta "wpada" w lukę miedzy przypadkiem 2 i 3.

Złożoność zamortyzowana

- W wielu sytuacjach na strukturach danych działają nie pojedyncze operacje ale ich sekwencje.
- Jedna z operacji takiej sekwencji może wpływać na dane w sposób powodujący modyfikacje czasu wykonania innej operacji.

  Jednym ze sposobów określania czasu wykonania w przypadku pesymistycznym dla całej sekwencji jest dodanie składników odpowiadających wykonywaniu poszczególnych operacji.
- Jednak wynik tak uzyskany może być zbyt duży w stosunku do rzeczywistego czasu wykonania. Analiza amortyzacji pozwala znaleźć bliższą rzeczywistej złożoność średnią.

Złożoność zamortyzowana

- Analiza z amortyzacją polega na analizowaniu kosztów operacji, zaś pojedyncze operacje są analizowane właśnie jako elementy tego ciągu. Koszt wykonania operacji w sekwencji może być różny niż w przypadku pojedynczej operacji, ale ważna jest też częstość wykonywania operacji.
- Jeśli dana jest sekwencja operacji $op_1, op_2, op_3, \ldots$ to analiza złożoności pesymistycznej daje daje złożoność obliczeniowa równa:

$$C(op_1, op_2, op_3, \ldots) = C_{pes}(op_1) + C_{pes}(op_2) + C_{pes}(op_3) + \ldots$$

dla złożoności średniej uzyskujemy

$$C(op_1, op_2, op_3, \ldots) = C_{śre}(op_1) + C_{śre}(op_2) + C_{śre}(op_3) + \ldots$$

- Nie jest analizowana kolejność operacji, "sekwencja" to po prostu "zbiór" operacji.

Złożoność zamortyzowana

- Przy analizie z amortyzacją zmienia się sposób patrzenia, gdyż sprawdza się co się stało w danym momencie sekwencji i dopiero potem wyznacza się złożoność następnej operacji:

  $C(op_1, op_2, op_3, \dots) = C(op_1) + C(op_2) + C(op_3) + \dots$

  gdzie **C** może być złożonością optymistyczna, średnią, pesymistyczna lub jeszcze inną - w zależności od tego co działo się wcześniej.
- Znajdowanie złożoności zamortyzowanej tą metoda może być zanadto skomplikowane.
  Znajomość natury poszczególnych procesów oraz możliwych zmian struktur danych używane są do określenia funkcji **C**, którą można zastosować do każdej operacji w sekwencji. Funkcja jest tak wybierana aby szybkie operacje były traktowane jak wolniejsze niż w rzeczywistości, zaś wolne jako szybsze.
- Sztuka robienia analizy amortyzacji polega na znalezieniu funkcji **C**; takiej która dociąży tanie operacje dostatecznie aby pokryć niedoszacowanie operacji kosztownych.

Przykład

- **Przyklad:**
  - dodawanie elementu do wektora zaimplementowanego jako elastyczna tablica
- **Przypadek optymistyczny:** wielkość wektora jest mniejsza od jego pojemności, dodanie elementu ogranicza się do wstawienia go do pierwszej wolnej komórki.

  Koszt dodania nowego elementu to $O(1)$.
- **Przypadek pesymistyczny:** rozmiar jest równy pojemności, nie ma miejsca na nowe elementy. Konieczne jest zaalokowanie nowego obszaru pamięci, skopiowanie do niego dotychczasowych elementów i dopiero dodanie nowego.

  Koszt wynosi wówczas $O(\text{rozmiar (wektor)})$.

Pojawia się nowy parametr, bo pojemność można zwiększać o więcej niż jedną komórkę wtedy przepełnienie pojawia się tylko "od czasu do czasu".

Przykład

- **Analiza z amortyzacją:** badane jest jaka jest oczekiwana wydajność szeregu kolejnych wstawień. Wiadomo, że we przypadku optymistycznym jest to ***O*(1)**, a w przypadku pesymistycznym ***O*(rozmiar)**, ale przypadek pesymistyczny zdarza się rzadko.
- Należy przyjąć pewna hipotezę:
  a) kosztAmort(push(x)) = 1
  niczego nie zyskujemy, łatwe wstawienia nie wymagają poprawek, nie pojawia się jednak zapas na kosztowne wstawienia
  b) kosztAmort(push(x)) = 2
  zyskujemy zapas na łatwych wstawieniach, ale czy wystarczający…? Zależy to od rozmiaru wektora…

Przykład dla kosztu amortyzacji = 2

Rozmiar	Pojemność	Koszt Amortyzowany	Koszt	Zapas
0	0			
1	1	2	0+1	1
2	2	2	1+1	1
3	4	2	2+1	0
4	4	2	1	1
5	8	2	4+1	-2
6	8	2	1	-1
7	8	2	1	0
8	8	2	1	1
9	16	2	8+1	-6
10	16	2	1	-5
…	…	…	…	…
16	16	2	1	1
17	32	2	16+1	-14
18	32	2	1	-13

Przykład dla kosztu amortyzacji = 3

Rozmiar	Pojemność	Koszt Amortyzowany	Koszt	Zapas
0	0			
1	1	3	0+1	2
2	2	3	1+1	3
3	4	3	2+1	3
4	4	3	1	5
5	8	3	4+1	3
6	8	3	1	5
7	8	3	1	7
…	…	…	…	…
16	16	3	1	17
17	32	3	16+1	3
18	32	3	1	5

c) kosztAmort(push(x)) = 3

- Nigdy nie pojawia się "debet", zaoszczędzone jednostki są niemal w całości zużywane gdy pojawi się kosztowna operacja.

Złożoność zamortyzowana

- W przedstawionym przykładzie wybór funkcji stałej był słuszny, ale zwykle tak nie jest.
- Niech funkcja przypisująca liczbę do konkretnego stanu struktury danych **ds** będzie nazywana **funkcją potencjału**. Koszt amortyzowany definiuje się następująco:

$$\text{koszAmort}(op_i) = \text{koszt}(op_i) + \text{f.potencjału}(ds_i) - \text{f.potencjału}(ds_{i-1})$$

- Jest to faktyczny koszt wykonania operacji op_i powiększony o zmianę potencjału struktury danych **ds** po wykonaniu tej operacji.
Definicja ta obowiązuje dla pojedynczej operacji.

$$\text{koszAmort}(op_1, op_2, op_3, \ldots, op_m) =$$
$$\sum_{i=1}^{m} (\text{koszt}(op_i) + \text{f.potencjału}(ds_i) - \text{f.potencjału}(ds_{i-1}))$$

- W większości przypadków funkcja potencjału początkowo jest zerem, nigdzie nie jest ujemna, tak że czas amortyzowany stanowi kres górny czasu rzeczywistego.

Kontynuacja przykładu

- f.potencjału ($vector_i$) =

  $= 0$ (jeśli $rozmiar_i = pojemność_i$ czyli vector jest pełny)

  $= 2\ rozmiar_i - pojemność_i$ (w każdym innym przypadku)

- Można sprawdzić że przy tak zdefiniowanej **f.potencjału, koszAmort(op_i)** jest faktycznie równy **3** w każdej konfiguracji (tanie wstawianie, kosztowne, tanie po kosztownym)

Dane zewnętrzne

- Podstawowy czynnik rzutujący na różnice między obróbką danych wewnętrznych (czyli przechowywanych w pamięci operacyjnej) a obróbką danych zewnętrznych (czyli przechowywanych w pamięciach masowych) jest specyfika dostępu do informacji.
- Mechaniczna struktura dysków sprawia, że korzystnie jest odczytywać dane nie pojedynczymi bajtami, lecz w większych **blokach**. Zawartość pliku dyskowego można traktować jako listę łączoną poszczególnych bloków, bądź też jako drzewo którego liście reprezentują właściwe dane, a węzły zawierają informację pomocniczą ułatwiającą zarządzanie tymi danymi.

Dane zewnętrzne

- Załóżmy że:

  adres bloku = 4 bajty

  długość bloku = 4096 bajtów
- Czyli w jednym bloku można zapamiętać adresy do 1024 innych bloków.
- Czyli informacja pomocnicza do 4 194 304 bajtów będzie zajmować 1 blok.
- Możemy też budować strukturę wielopoziomową, w strukturze dwupoziomowej blok najwyższy zawiera adresy do 1024 bloków pośrednich, z których każdy zawiera adresy do 1024 bloków danych. Maksymalna wielkość pliku w tej strukturze 1024 * 1024 * 1024 = 4 294 967 296 bajtów = 4GB, informacja pomocnicza zajmuje 1025 bloków.

Dane zewnętrzne

- Nieodłącznym elementem współpracy pamięci zewnętrznej z pamięcią operacyjną są **bufory**, czyli zarezerwowany fragment pamięci operacyjnej, w której system operacyjny umieszcza odczytany z dysku blok danych lub z którego pobiera blok danych do zapisania na dysku.
- **Miara kosztu dla operacji na danych zewnętrznych.**
  - Głównym składnikiem czasu jest czekanie na pojawienie się właściwego sektora pod głowicami. To może być nawet kilkanaście milisekund… Co jest ogromnie długo dla procesora taktowanego kilku-gigahercowym zegarem.
  - Zatem "merytoryczna jakość" algorytmu operującego na danych zewnętrznych będzie zależna od liczby wykonywanych **dostępów blokowych** (odczyt lub zapis pojedynczego bloku nazywamy dostępem blokowym).

Sortowanie

- **Sortowanie zewnętrzne** to sortowanie danych przechowywanych na plikach zewnętrznych.
- Sortowanie przez łączenie pozwoli na posortowanie pliku zawierającego **n** rekordów, przeglądając go jedynie ***O*(log n)** razy.
- Wykorzystanie pewnych mechanizmów systemu operacyjnego – dokonywanie odczytów i zapisów we właściwych momentach – może znacząco usprawnić sortowanie dzięki zrównoleglowieniu obliczeń z transmisją danych.

Sortowanie przez łączenie

- Polega na organizowaniu sortowanego pliku w pewna liczbę serii, czyli uporządkowanych ciągów rekordów. W kolejnych przebiegach rozmiary serii wzrastają a ich liczba maleje, ostatecznie (posortowany) plik staje się pojedynczą serią.
- Podstawowym krokiem sortowania przez łączenie dwóch plików, f_1 i f_2, jest zorganizowanie tych plików w serie o długości **k**, tak że:
  - liczby serii w plikach f_1, f_2, z uwzględnieniem "ogonów" różnią się co najwyżej o jeden
  - co najwyżej w jednym z plików f_1, f_2, może się znajdować ogon
  - plik zawierający "ogon" ma poza nim co najmniej tyle serii ile jego partner.
- Prosty proces polega na odczytywaniu po jednej serii (o długości **k**) z plików f_1, f_2, łączenia tych serii w dwukrotnie dłuższą i zapisywania tak połączonych serii na przemian do plików g_1, g_2.
- Całkowita liczba dostępów blokowych w całym procesie sortowania jest rzędu $O((n \log n)/b)$ gdzie **b** jest liczba rekordów w jednym bloku.

Przykład

Pliki oryginalne:	28	3	93	10	54	65	30	90	10	69	8	22
	31	5	96	40	85	9	39	13	8	77	10	
Pliki zorganizowane w serie o długości 2:	28 31		93 96		54 85		30 39		8 10		8 10	
	3 5		10 40		9 65		13 90		69 77		22	
Pliki zorganizowane w serie o długości 4	3 5 28 31				9 54 65 85				8 10 69 77			
	10 40 93 96				13 30 39 90				8 10 22			
Pliki zorganizowane w serie o długości 8:	3 5 10 28 31 40 93 96								8 8 10 10 22 69 77			
	9 13 30 39 54 65 85 90											
Pliki zorganizowane w serie o długości 16:	3 5 9 10 13 28 30 31 39 40 54 65 85 90 93 96											
	8 8 10 10 22 69 77											
Pliki zorganizowane w serie o długości 32:	3 5 8 8 9 10 10 10 13 22 28 30 31 39 40 54 65 69 77 85 90 93 96											

Podsumowanie

- *„Nie przejmuj się efektywnością algorytmu… wystarczy poczekać kilka lat.”*
- Taki pogląd funkcjonuje w środowisku programistów, nie określono przecież granicy rozwoju mocy obliczeniowych komputerów. Nie należy się jednak z nim zgadzać w ogólności. Należy zdecydowanie przeciwstawiać się przekonaniu o tym, ze ulepszenia sprzętowe uczynią prace nad efektywnymi algorytmami zbyteczna.
- Istnieją problemy których rozwiązanie za pomocą zasobów komputerowych jest teoretycznie możliwe, ale praktycznie przekracza możliwości istniejących technologii. Przykładem takie problemu jest rozumienie języka naturalnego, przetwarzanie obrazów (do pewnego stopnia oczywiście) czy “inteligentna” komunikacja.
- Pomiędzy komputerami a ludźmi na rozmaitych poziomach.
- Kiedy pewne problemy staja się “proste”… Nowa grupa wyzwań, które na razie można sobie tylko próbować wyobrażać, wytyczy nowe granice możliwości wykorzystania komputerów.