TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

9/01/2017

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana

II stopień studiów

Wykład 14: Repetytorium

Algorytmy i ich schematy blokowe

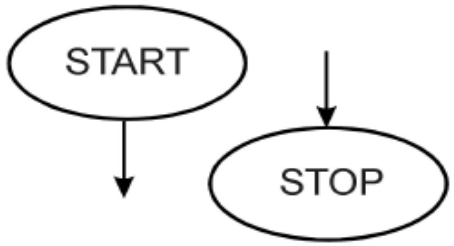
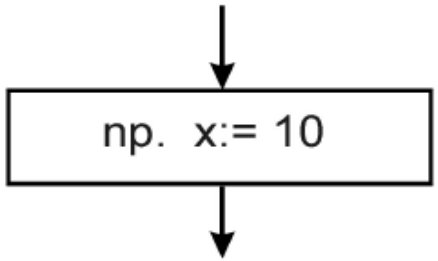
- **Proste algorytmy iteracyjne**
- **Algorytmy z wykorzystaniem rekurencji**
- **Algorytmy sortujące**

Wykład na podstawie skryptu:
D. Nyk, „Algorytmy w przykladach”
http://informatyka.2ap.pl/ftp/3d/algorytmy/podręcznik_algorytmy.pdf

Schemat blokowy

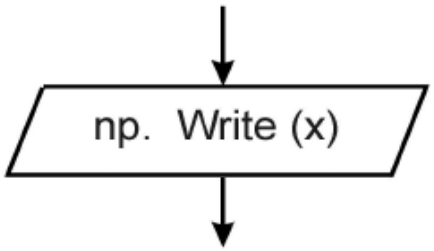
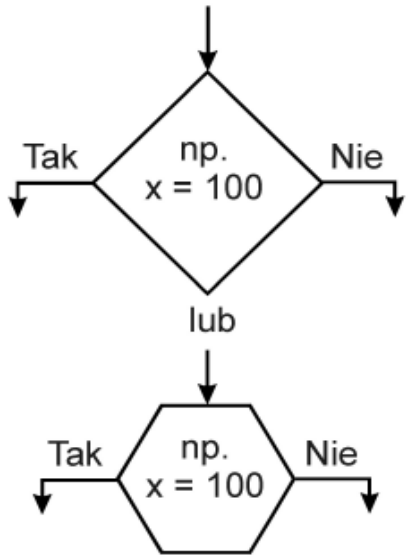
- **Przedstawia algorytm w postaci symboli graficznych, podając szczegółowo wszystkie operacje arytmetyczne, logiczne, przesyłania, pomocnicze wraz z kolejnością ich wykonywania**
- **Składa się z wielu elementów z których podstawowy jest blok**
- **Poniżej przedstawione typowe podstawowe bloki programów, istnieją oczywiście jeszcze inne.**

Schemat blokowy

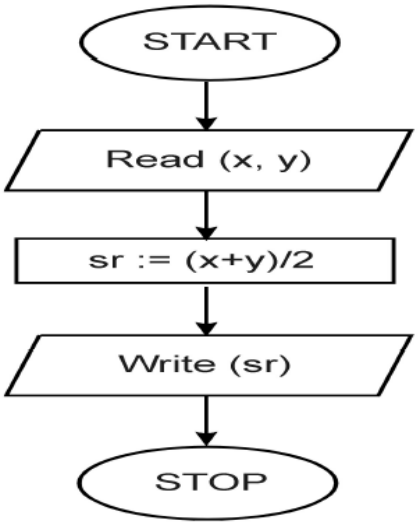
Wygląd bloku	Opis
	**Bloki graniczne** – początek i koniec algorytmu. Mają kształt owalu. Z bloku Start wychodzi tylko jedno połączenie; każdy schemat blokowy musi mieć dokładnie jeden blok START. Każdy schemat blokowy musi mieć co najmniej jeden blok STOP.
	**Łącznik** pomiędzy blokami – określa kierunek przepływu danych lub kolejność wykonywanych działań (ścieżka sterująca)
	**Blok kolekcyjny** – łączy kilka różnych dróg algorytmu
	**Blok operacyjny** – zawiera operację lub grupę operacji, w których wyniku ulega zmianie wartość zmiennej (tu : nadanie zmiennej x wartości 10). Bloki operacyjne mają kształt prostokąta , wchodzi do niego jedno połączenie i wychodzi też jedno.

y

Schemat blokowy

	**Blok wejścia / wyjścia** – blok odpowiedzialny za wykonanie operacji wprowadzania i wyprowadzania danych, wyników, komunikatów. Ma kształt równoległoboku, wchodzi i wychodzi z niego jedno połączenie.
	**Blok decyzyjny** – określa wybór jednej z dwóch możliwych dróg działania. Ma kształt rombu lub sześciokąta. Wchodzi do niego jedno połączenie, a wychodzą dwa : TAK – gdy warunek wpisany wewnątrz jest spełniony oraz NIE – gdy warunek wpisany wewnątrz nie jest spełniony. Wybór kształtu bloku zależy od nas.

Schemat blokowy i specyfikacja programu



Algorytm liczenia średniej

Specyfikacją problemu algorytmicznego nazywamy dokładny opis problemu algorytmicznego, który ma zostać rozwiązany oraz podanie informacji o danych wejściowych i wyjściowych.
Czyli przed naszym algorytmem powinien znaleźć się dodatkowy zapis :

Problem algorytmiczny : obliczenie średniej arytmetycznej dwóch licz rzeczywistych

Dane wejściowe : $x , y \in R$

Dane wyjściowe : $sr \in R$ – średnia liczb x i y

Operandy i operatory

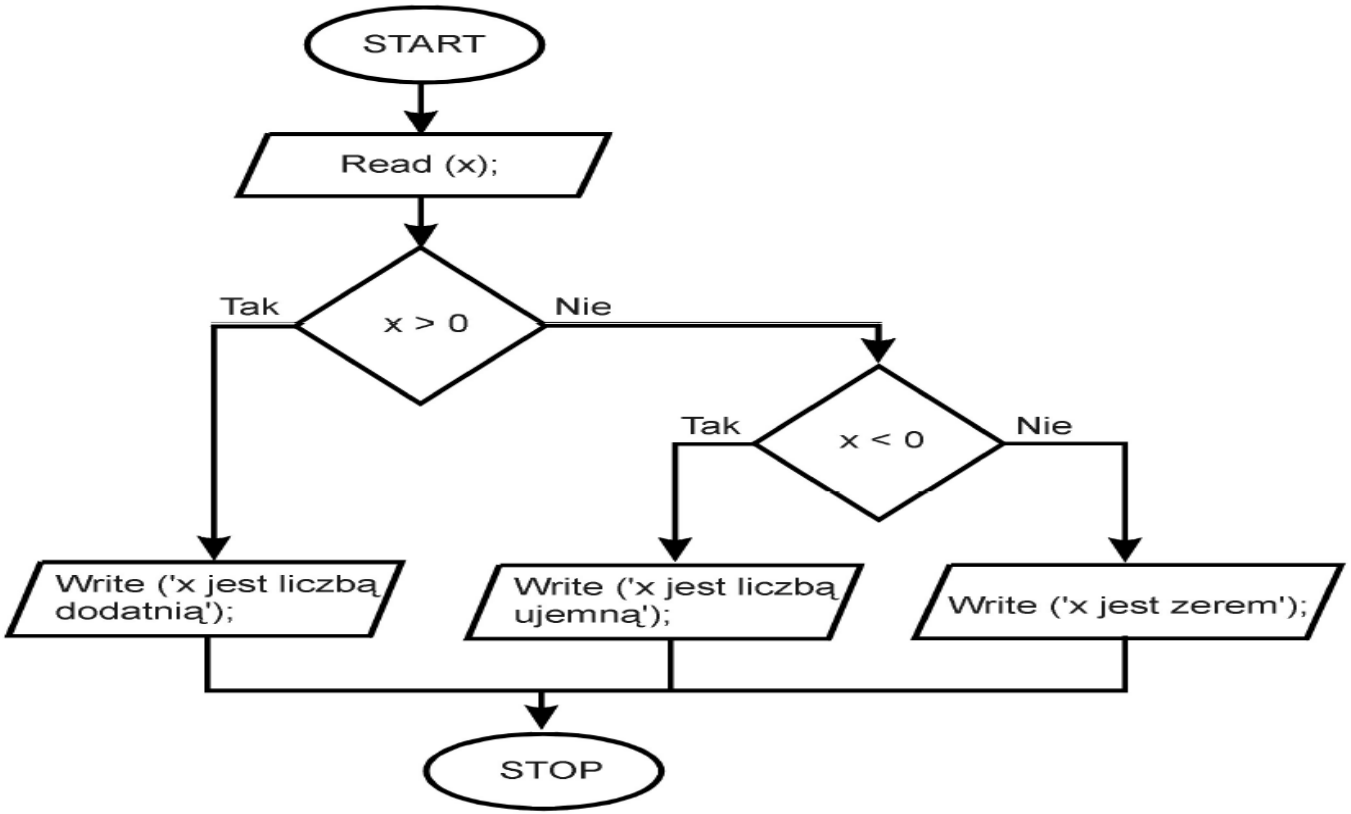
- **Stałe i zmienne łączymy operatorami aby otrzymać wyrażenie. Stałe i zmienne nazywamy operandami.**

Operatory arytmetyczne		Operatory relacji	
Symbol	Znaczenie	Symbol	Znaczenie
+	dodawanie	=	równy
-	odejmowanie	>	większy
*	mnożenie	>=	większy lub równy
/	dzielenie	<	mniejszy
div	dzielenie całkowite (3div2 = 1)	<=	mniejszy lub równy
mod	reszta z dzielenia liczb całkowitych	<>	różny

Operatory logiczne

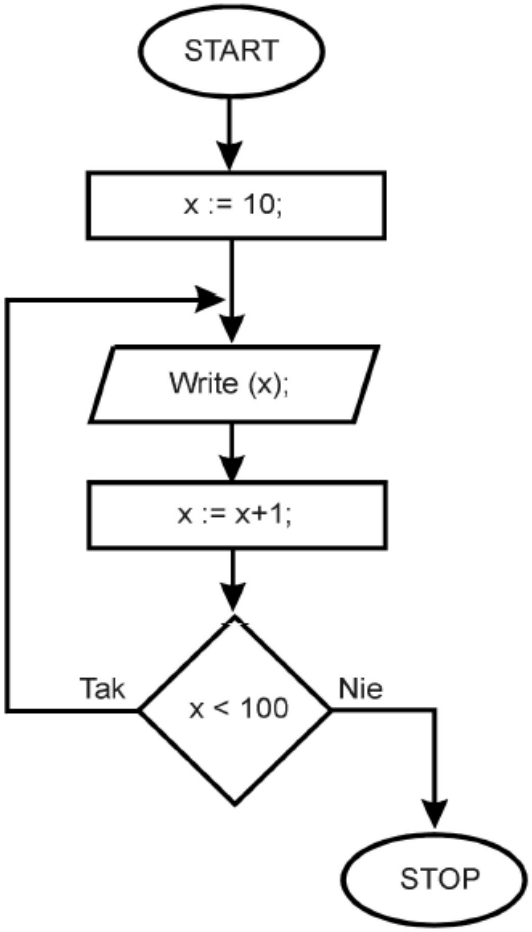
and	- koniunkcja (iloczyn zdań)	$\wedge$
or	- alternatywa (suma zdań)	$\vee$
not	- negacja (zaprzeczenie zdania)	$\sim$

Algorytmy z rozgałęzieniem

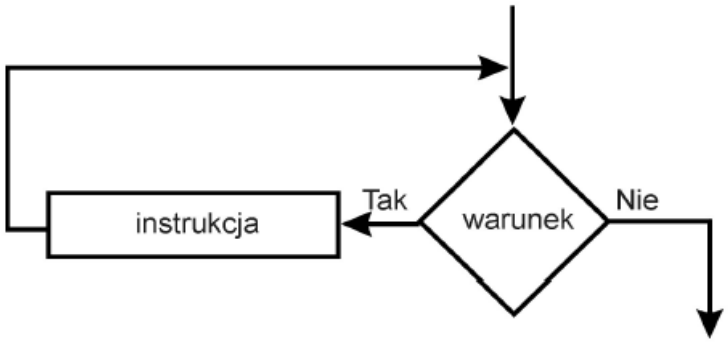


Warunek musi być tak określony, aby jego ocena prawdziwości była jednoznaczna.

Instrukcja iteracji

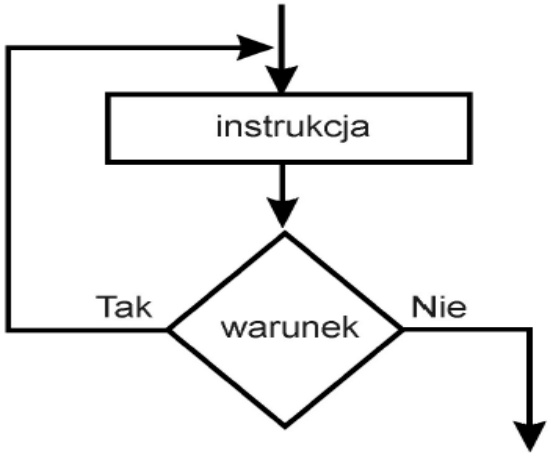


Poniżej przedstawiamy trzy podstawowe przypadki iteracji stosowanych w algorytmach.



Najpierw sprawdzany jest warunek, potem wykonywana jest instrukcja. (dopóki spełniony jest warunek wykonuj instrukcję - w Pascalu : While warunek do instrukcja)

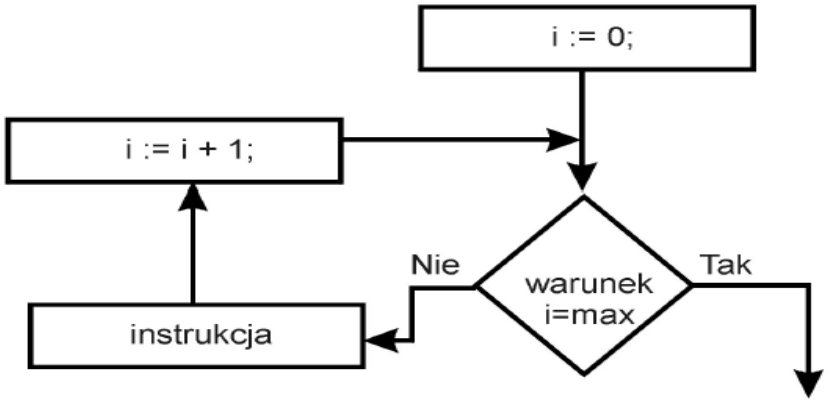
Instrukcja iteracji



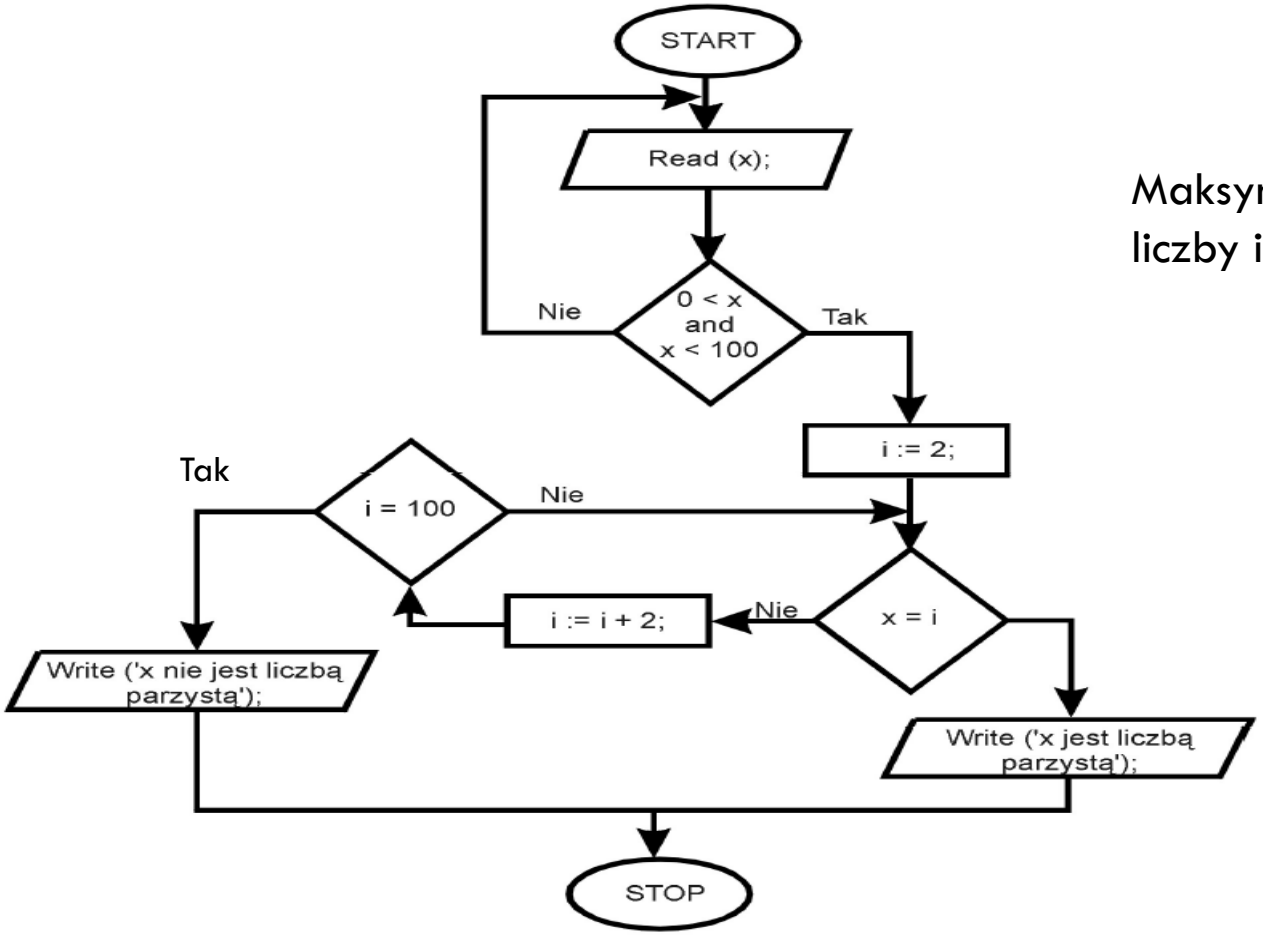
Najpierw wykonywana jest instrukcja , a potem sprawdzany jest warunek (wykonuj instrukcję dopóki spełniony jest warunek – w Pascalu : repeat instrukcja until wyrażenie).

Instrukcja wykonywana jest z góry ustaloną (max) ilość razy (w Pascalu : For zmienna := wyrażenie_1 to max do (downto) instrukcja)

W pętli tej wartość licznika „i" zwiększana jest o 1 po każdej wykonywanej instrukcji czyli jest **inkrementowana**

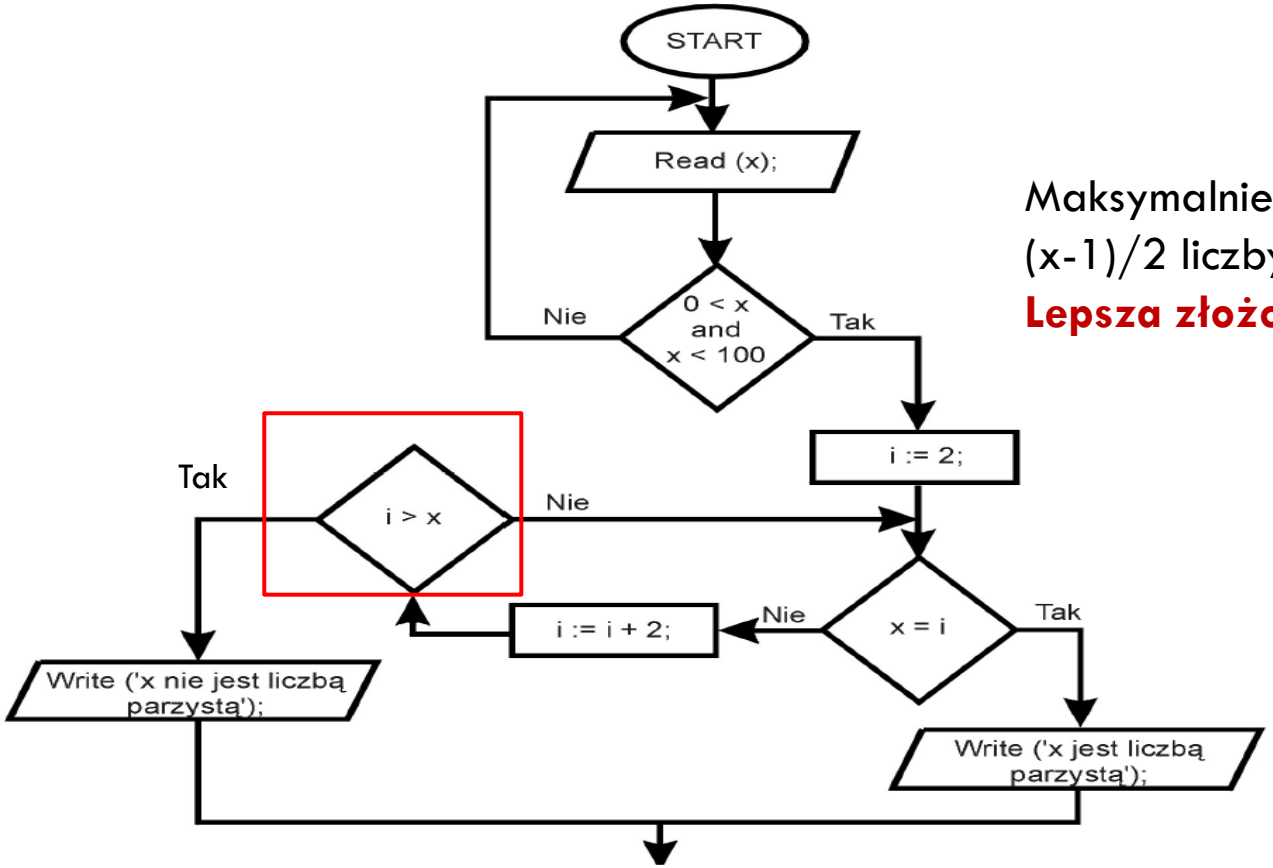


Badanie parzystości: algorytm 1



Maksymalnie 49 porównań liczby i z liczba 100

Badanie parzystości: algorytm 2



Maksymalnie porównań (x-1)/2 liczby i z liczba x.

Lepsza złożoność obliczeniowa

Algorytm Euklidesa

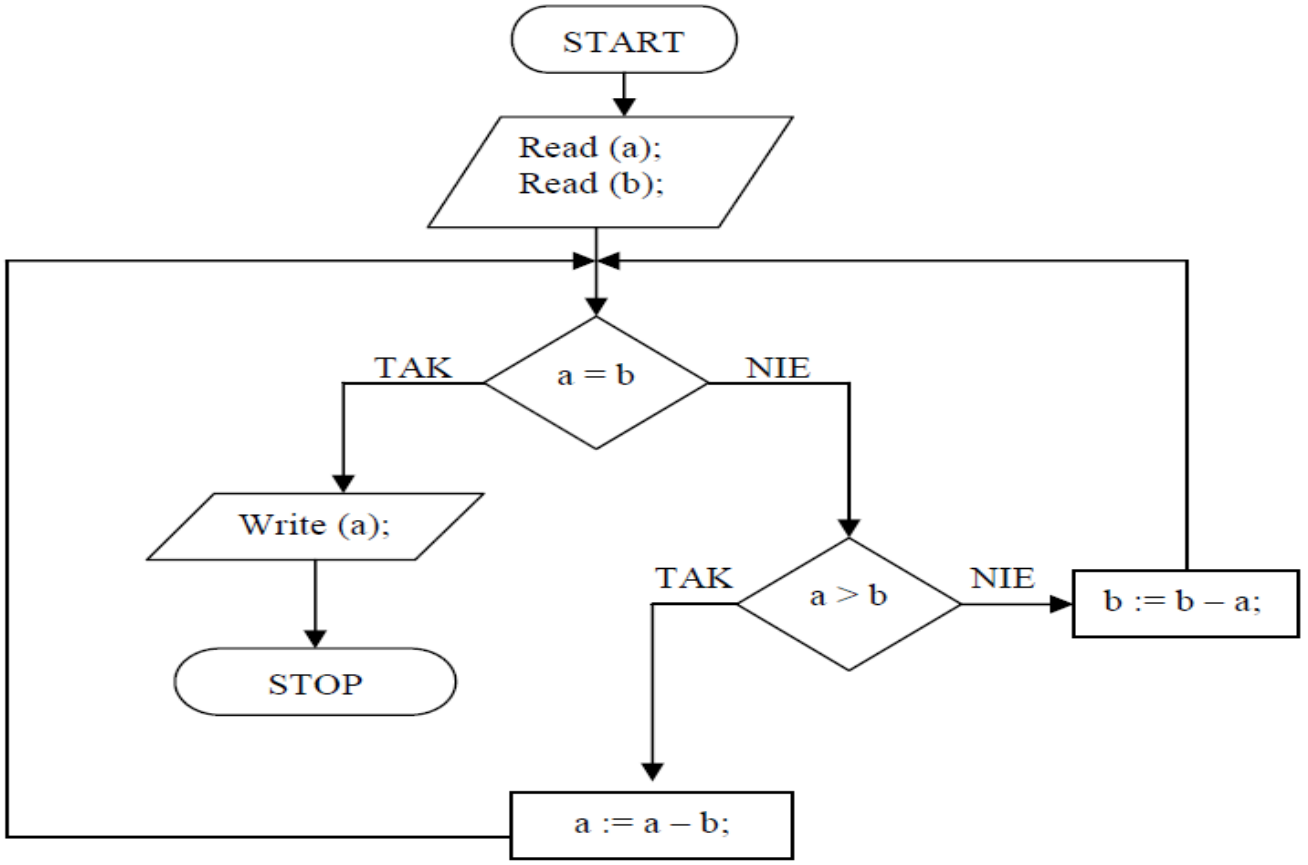
- Największy wspólny dzielnik dwóch liczb.

Pobieramy dwie liczby naturalne, od większej z nich odejmujemy mniejszą, a następnie większą liczbę zastępujemy różnicą. Postępujemy tak do momentu, gdy dwie liczby będą równe. Otrzymana liczba będzie NWD.
Przykład : a =12 , b = 20, ponieważ b > a to b = 20–12=8 , teraz a > b czyli a=12–8 =4, dalej b>a czyli b= 8–4 = 4 i a = 4 stąd NWD = 4

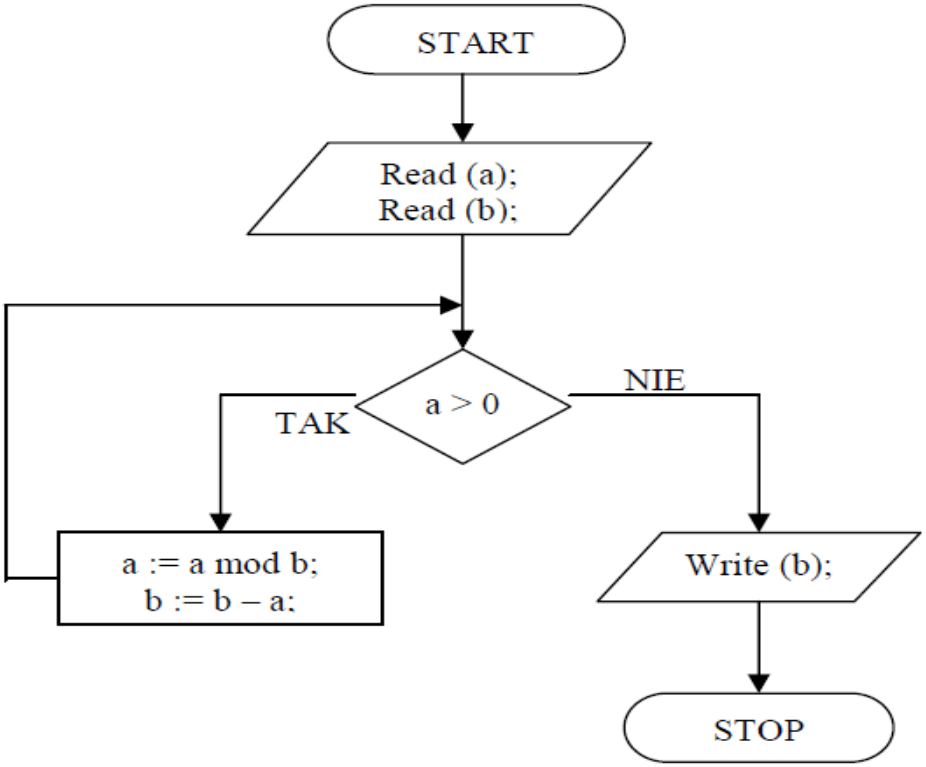
Równie często stosuje się modyfikację algorytmu NWD (a,b) = NWD(a mod b, b – (a mod b))

Będziemy iteracyjnie zmieniać wartości a i b aż do momentu, gdy a osiągnie wartość 0.
Przykład : a =12 , b = 20 , a = 12 mod 20 = 12 , b = 20 – 12 = 8 następnie a = 12 mod 8 = 4 , b = 8 – 4 = 4 , i następny krok a = 4 mod 4 = 0 czyli b = NWD = 4

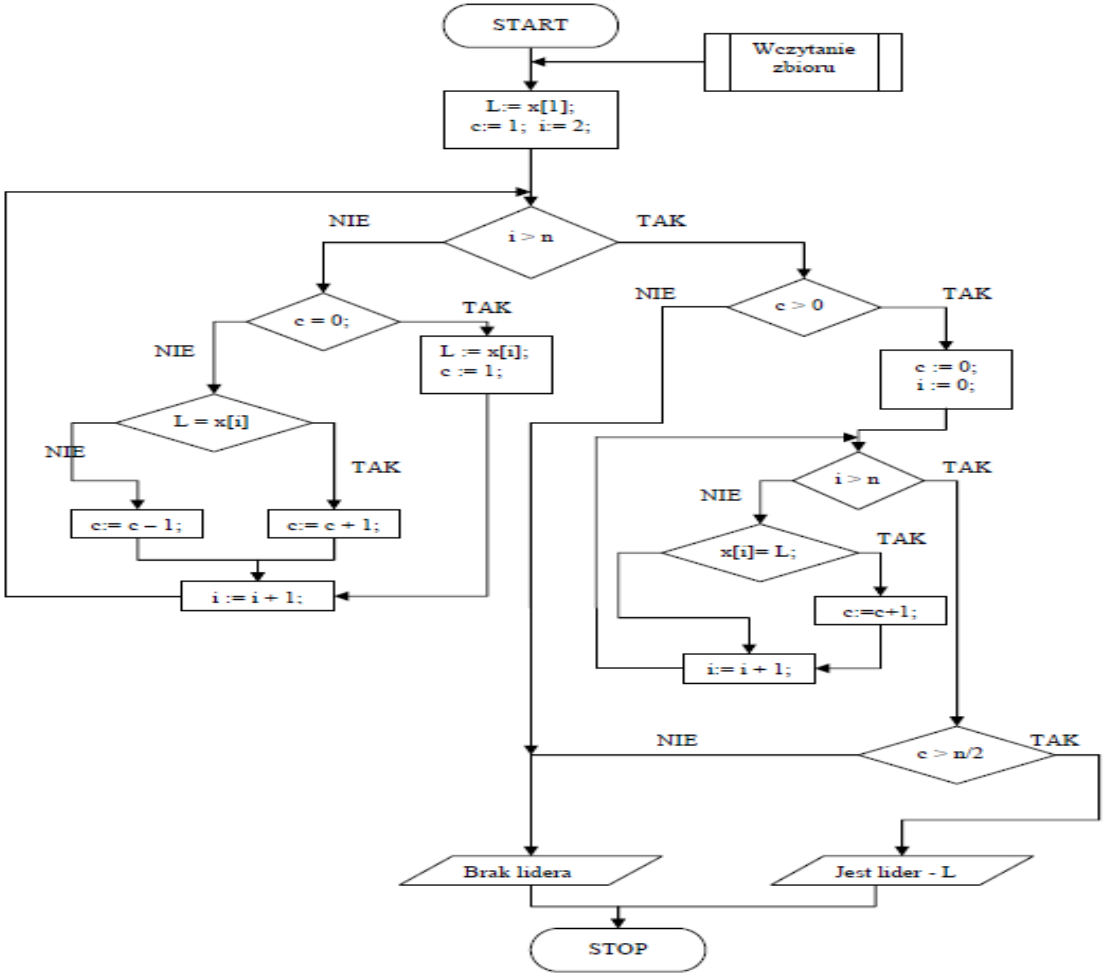
Algorytm Euklidesa: wersja 1



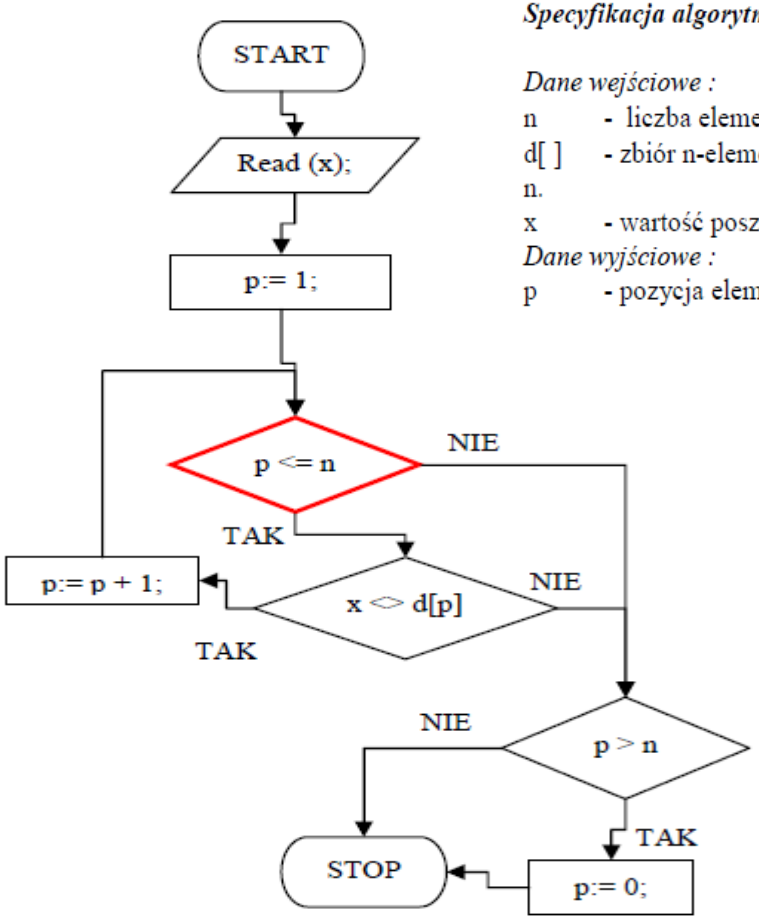
Algorytm Euklidesa: wersja 2



Poszukiwanie lidera zbioru



Przeszukiwanie sekwencyjne



Specyfikacja algorytmu :

Dane wejściowe :

n - liczba elementów w sortowanym zbiorze, $n \in N$

d[ ] - zbiór n-elementowy, który będzie przeszukiwany. Elementy zbioru mają indeksy od 1 do n.

x - wartość poszukiwana

Dane wyjściowe :

p - pozycja elementu x w zbiorze d[ ]. Jeśli $p = 0$, to element x w zbiorze nie występuje.

Warunek gwarantuje zakończenie pętli, możemy też wprowadzić wartownika

Złożoność obliczeniowa O(n)

Poszukiwanie najczęstszego elementu występującego w zbiorze

Specyfikacja problemu

Dane wejściowe :

n - liczba elementów w zbiorze wejściowym
d[ ] - zbiór wejściowy, w którym dokonujemy poszukiwań. Indeksy elementów rozpoczynają się od 1. Zbiór musi posiadać miejsce na dodatkowy element, który zostanie dopisany na końcu.

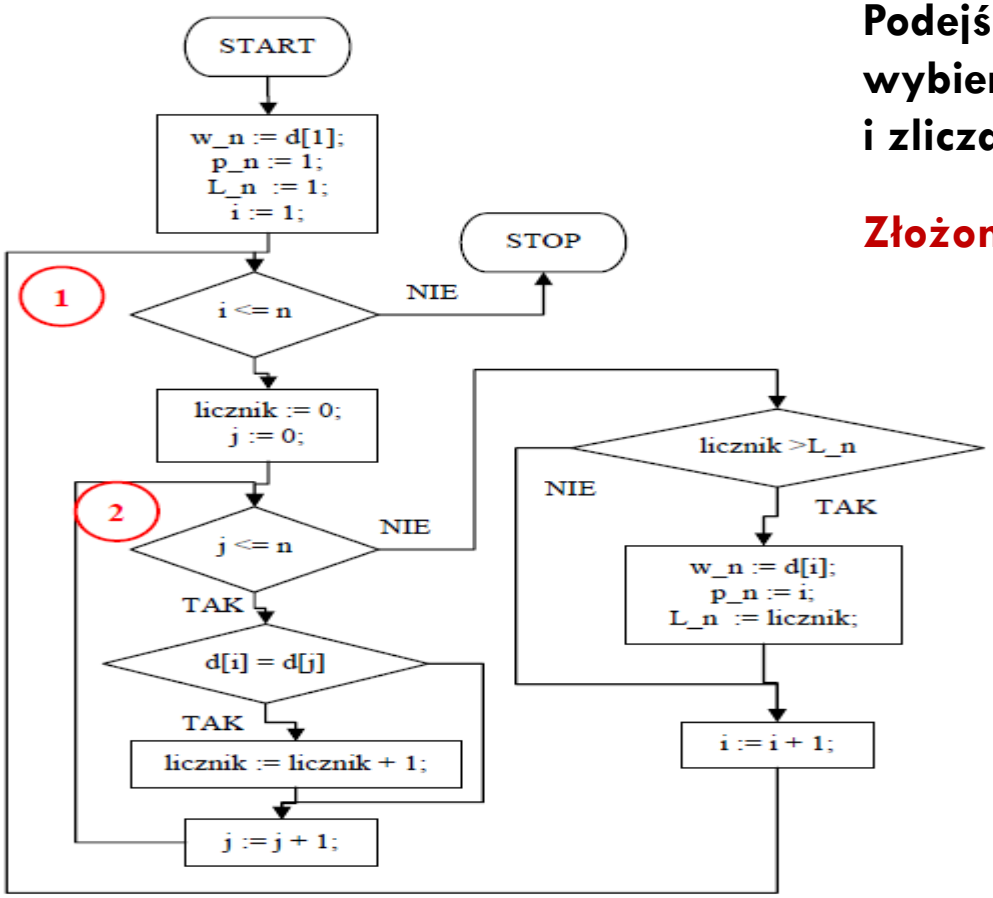
Dane wyjściowe :

w_n - wartość elementu powtarzającego się najczęściej
p_n - pierwsza pozycja elementu najczęstszego
L_n - liczba wystąpień najczęstszego elementu

Zmienne pomocnicze :

i,j - zmienne licznikowe pętli
licznik - licznik wystąpień elementu

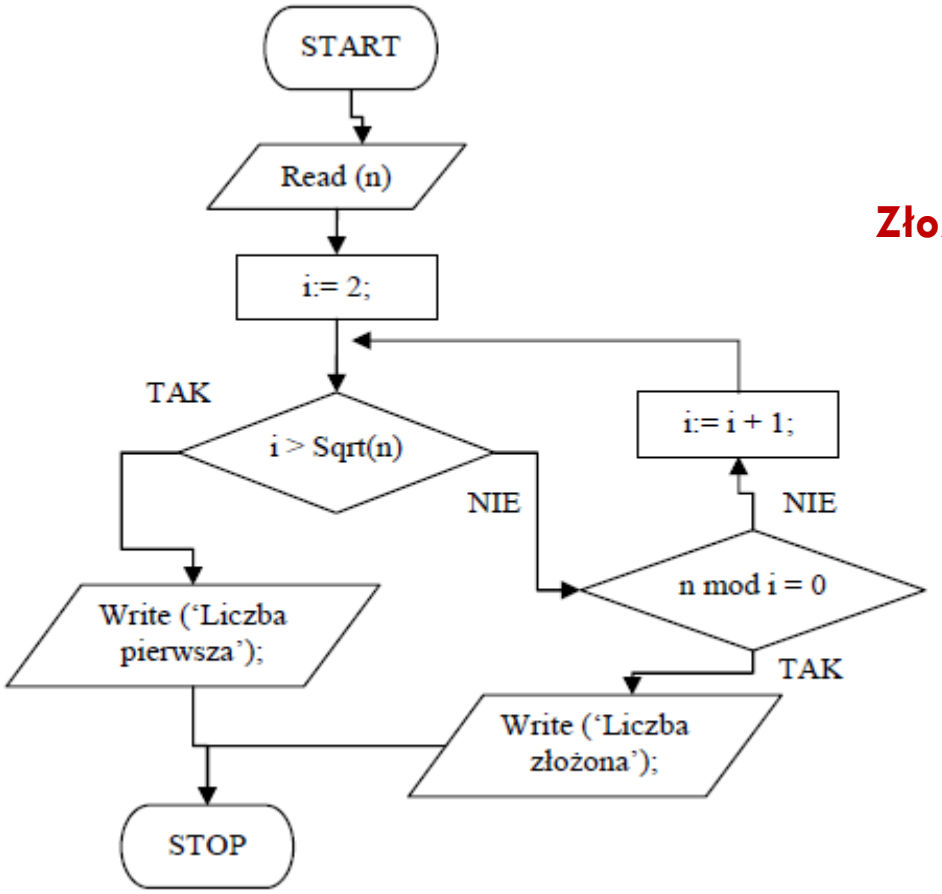
Poszukiwanie najczęstszego elementu występującego w zbiorze



Podejście bezpośrednie:
wybieramy kolejne elementy zbioru i zliczamy częstość ich występowania.

Złożoność obliczeniowa $O(n^2)$

Algorytm sprawdzający czy liczba jest liczba pierwszą.

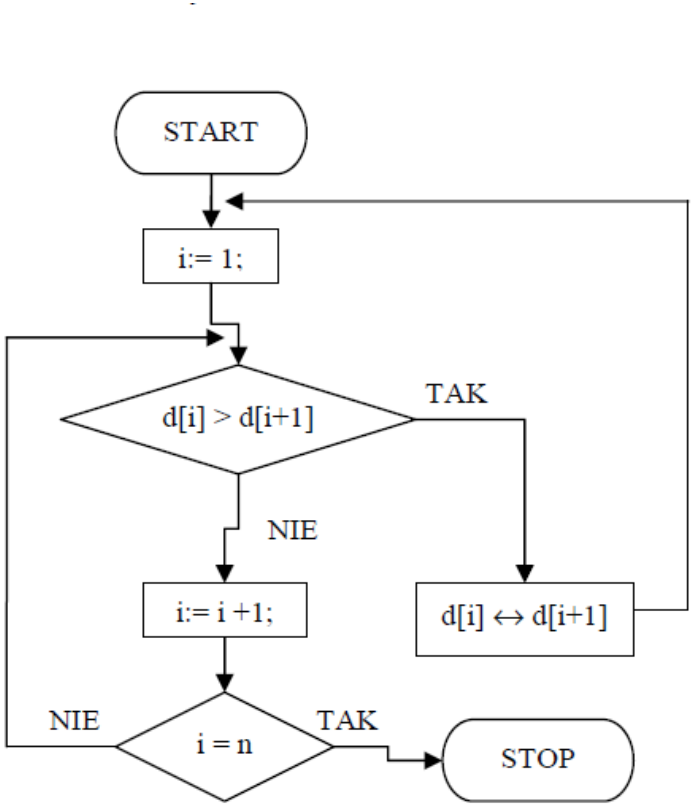


Złożoność obliczeniowa $O(n^{1/2})$

Złożoność obliczeniowa

Porównanie klas złożoności obliczeniowych		
Klasa złożoności obliczeniowej	**Nazwa klasy złożoności obliczeniowej**	**Cechy algorytmu**
$\Theta(1)$	stała	działa prawie natychmiast
$\Theta(\log n)$	logarytmiczna	bardzo szybki
$\Theta(n)$	liniowa	szybki
$\Theta(n \log n)$	liniowo-logarytmiczna	dosyć szybki
$\Theta(n^2)$	kwadratowa	wolny dla dużych n
$\Theta(n^3)$	sześcienna	wolny dla większych n
$\Theta(2^n)$, $\Theta(n!)$	wykładnicza	nierealizowalny dla większych n

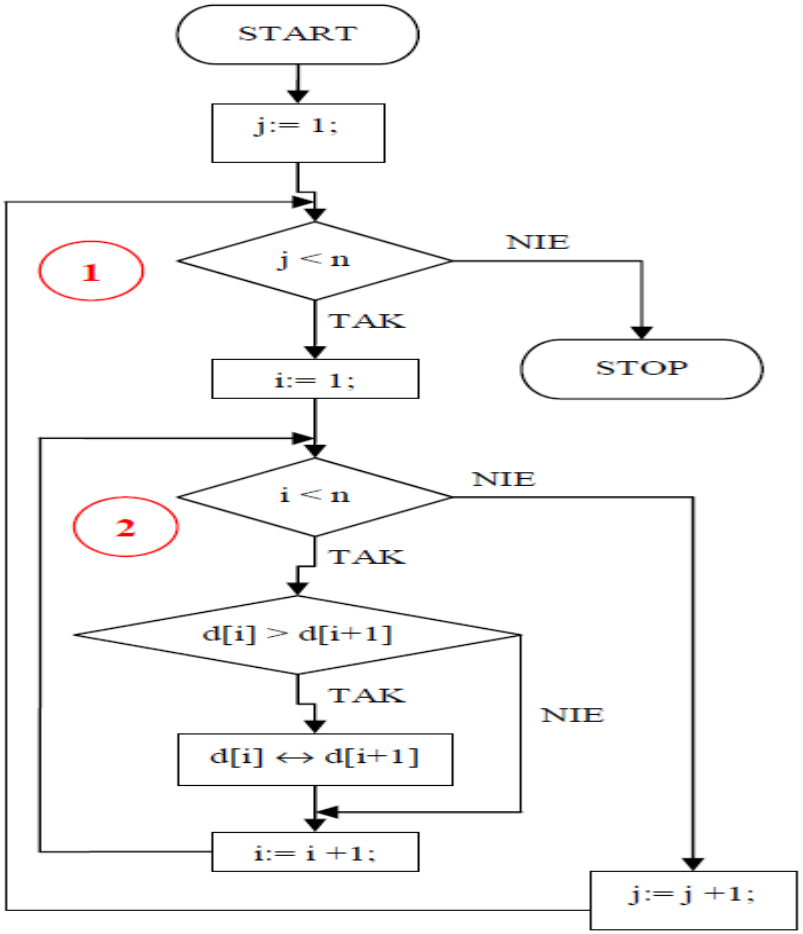
Sortowanie naiwne



Cechy Algorytmu Sortowania Naiwnego	
klasa złożoności obliczeniowej optymistyczna	$\Theta(n) - \Theta(n^2)$
klasa złożoności obliczeniowej typowa	$\Theta(n^3)$
klasa złożoności obliczeniowej pesymistyczna	$\Theta(n^3)$
Sortowanie w miejscu	TAK
Stabilność	TAK

Pesymistyczna:
dla zbiorów posortowanych odwrotnie
Optymistyczna:
dla zbiorów uporządkowanych z niedużą ilością elementów nie na swoich miejscach

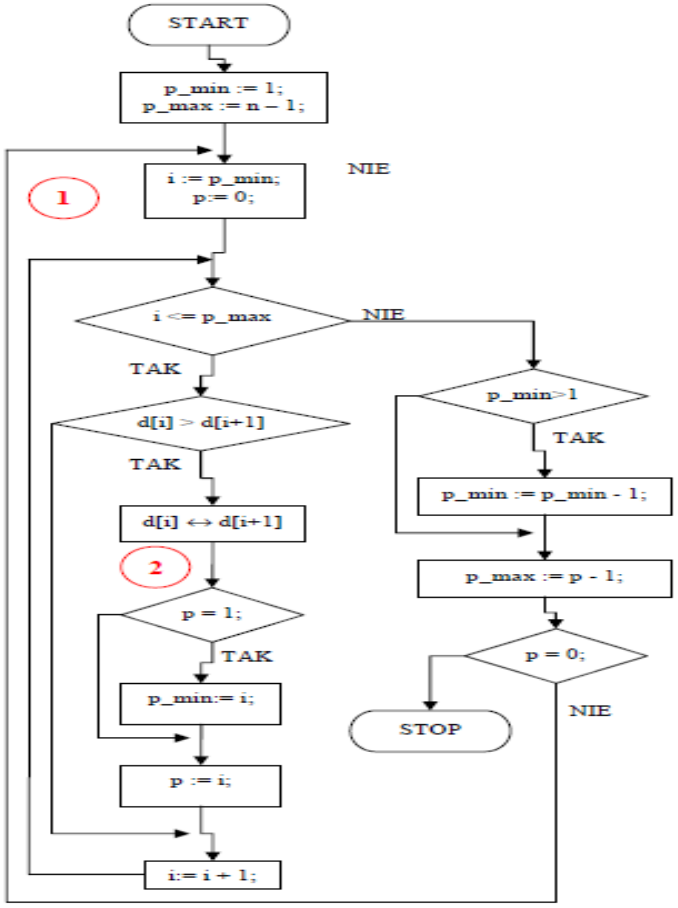
Sortowanie bąbelkowe



Sortowanie wykonywane jest w dwóch zagnieżdżonych pętlach. Pętla zewnętrzna nr 1 kontrolowana jest przez zmienną j. Wykonuje się ona n - 1 razy. Wewnątrz pętli nr 1 umieszczona jest pętla nr 2 sterowana przez zmienną i. Wykonuje się ona również n - 1 razy. W efekcie algorytm wykonuje w sumie: $T_1(n) = (n - 1)^2 = n^2 - 2n + 1$ obiegów pętli wewnętrznej, po których zakończeniu zbiór zostanie posortowany.

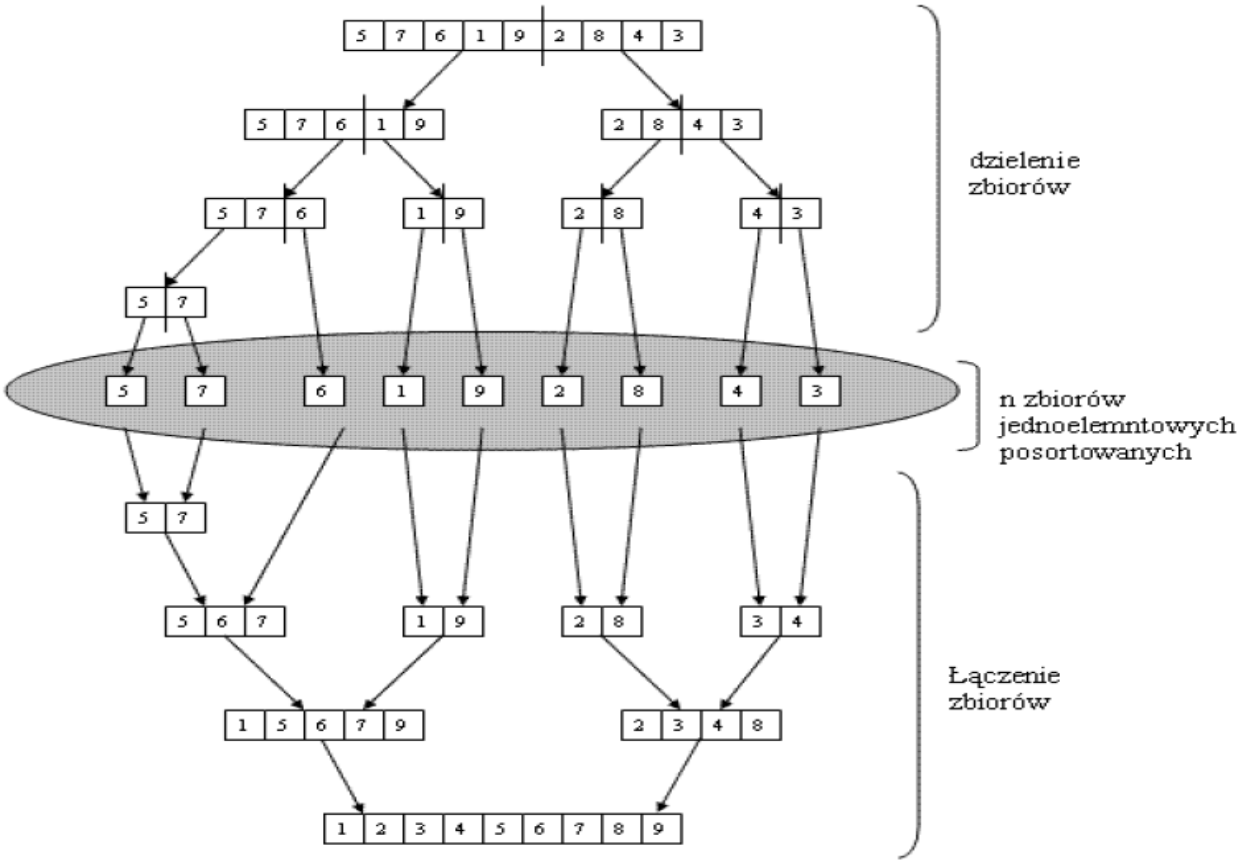
Cechy Algorytmu Sortowania Bąbelkowego wersja nr 1	
klasa złożoności obliczeniowej optymistyczna	$\Theta(n^2)$
klasa złożoności obliczeniowej typowa	$\Theta(n^2)$
klasa złożoności obliczeniowej pesymistyczna	$\Theta(n^2)$
Sortowanie w miejscu	TAK
Stabilność	TAK

Sortowanie bąbelkowe: modyfikacje



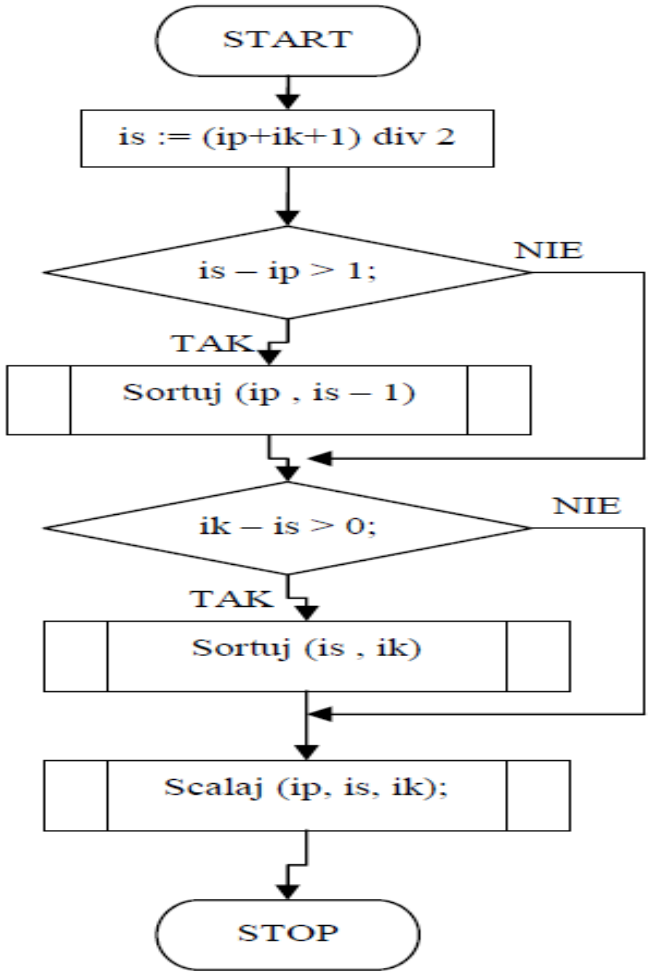
Cechy Algorytmu Sortowania Bąbelkowego wersja nr 2	
klasa złożoności obliczeniowej optymistyczna	$\Theta(n)$
klasa złożoności obliczeniowej typowa	$\Theta(n^2)$
klasa złożoności obliczeniowej pesymistyczna	$\Theta(n^2)$
Sortowanie w miejscu	TAK
Stabilność	TAK

Rekurencja: sortowanie



Przykład : sortujemy zbiór o postaci: { 6 5 4 1 3 7 9 2 }

Rekurencja: program sortuj



Złożoność obliczeniowa

O(n log(n))

Dane wejściowe :

d [ ]	- zbiór scalany
ip	- indeks pierwszego elementu w młodszym podzbiorze, ip ∈ N
ik	- indeks ostatniego elementu w starszym podzbiorze, ik ∈ N

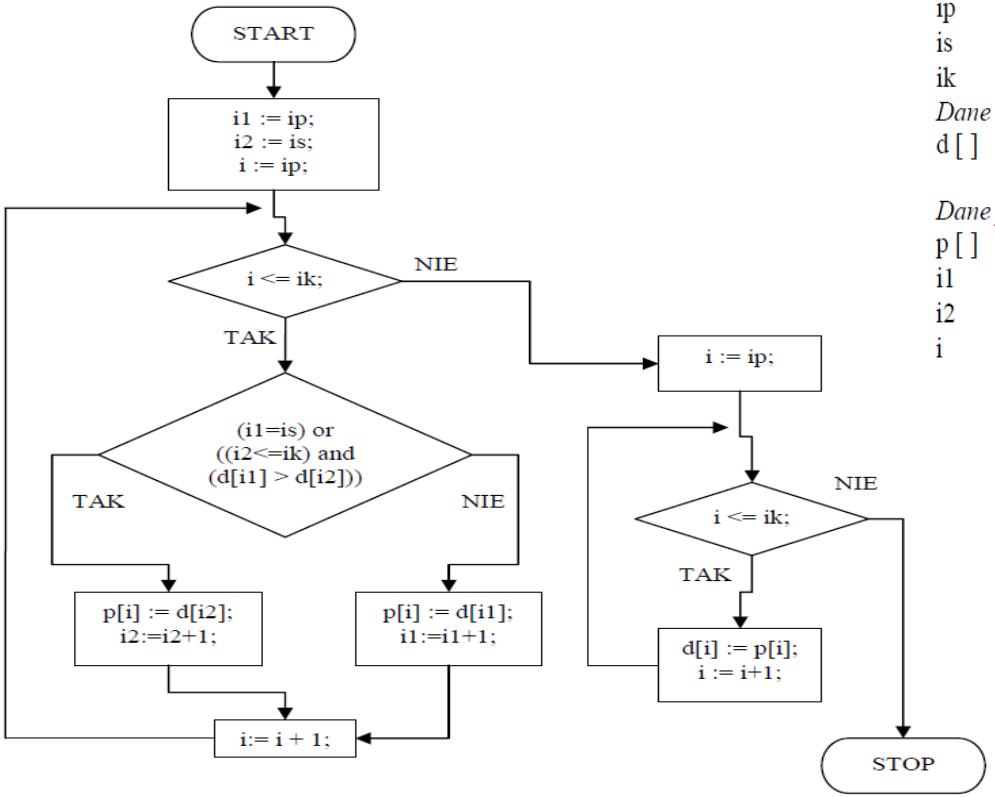
Dane wyjściowe :

d [ ]	- zbiór scalony

Dane pomocnicze :

is	- indeks pierwszego elementu w starszym podzbiorze, is ∈ N

Rekurencja: blok scalaj



Dane wejściowe :

d [ ]	- zbiór scalany
ip	- indeks pierwszego elementu w młodszym podzbiorze, ip ∈ N
is	- indeks pierwszego elementu w starszym podzbiorze, is ∈ N
ik	- indeks ostatniego elementu w starszym podzbiorze, ik ∈ N

Dane wyjściowe :

d [ ]	- zbiór scalony

Dane pomocnicze :

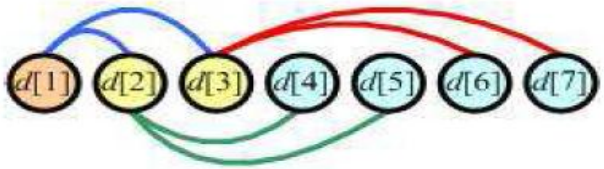
p [ ]	- zbiór pomocniczy zawierający tyle samo elementów ile zbiór d
i1	- indeks elementów w młodszej połówce zbioru d[ ], i1 ∈ N
i2	- indeks elementów w starszej połówce zbioru d[ ], i2 ∈ N
i	- indeks elementów w zbiorze p[ ], i ∈ N

Złożoność obliczeniowa O(n)

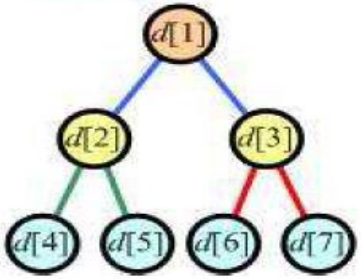
Sortowanie stogowe

Zastosujmy następujące odwzorowanie:

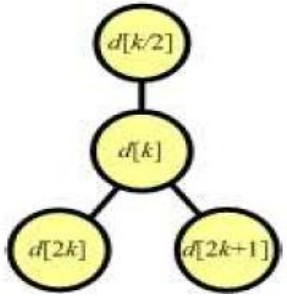
- Element d[1] będzie zawsze korzeniem drzewa.
- i-ty poziom drzewa binarnego wymaga 2^{i-1} węzłów. Będziemy je kolejno pobierać z tablicy.



Otrzymamy w ten sposób następujące odwzorowanie elementów tablicy w drzewo binarne:



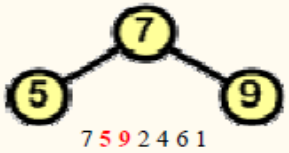
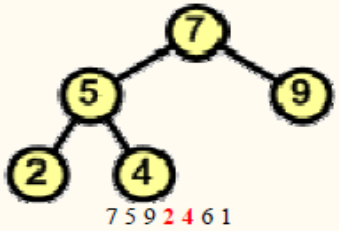
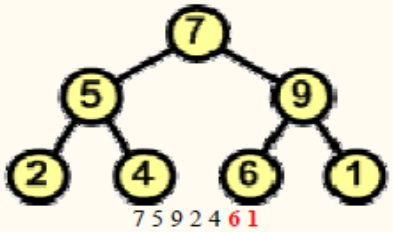
Dla węzła k-tego wyprowadzamy następujące wzory:



węzły potomne mają indeksy równe:
2k - lewy potomek
2k+1 - prawy potomek
węzeł nadrzędny ma indeks równy *[k / 2]* (dzielenie całkowitoliczbowe)

Drzewo binarne

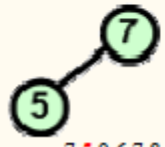
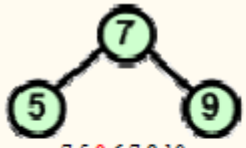
Przykład : Skonstruować drzewo binarne z elementów zbioru {7 5 9 2 4 6 1}

Operacja	Opis
	Konstrukcję drzewa binarnego rozpoczynamy od korzenia, który jest pierwszym elementem zbioru, czyli liczbą 7.
	Do korzenia dołączamy dwa węzły potomne, które leżą obok w zbiorze. Są to dwa kolejne elementy, 5 i 9.
	Do lewego węzła potomnego (5) dołączamy jego węzły potomne. Są to kolejne liczby w zbiorze, czyli 2 i 4.
	Pozostaje nam dołączyć do prawego węzła ostatnie dwa elementy zbioru, czyli liczby 6 i 1. Drzewo jest kompletne.

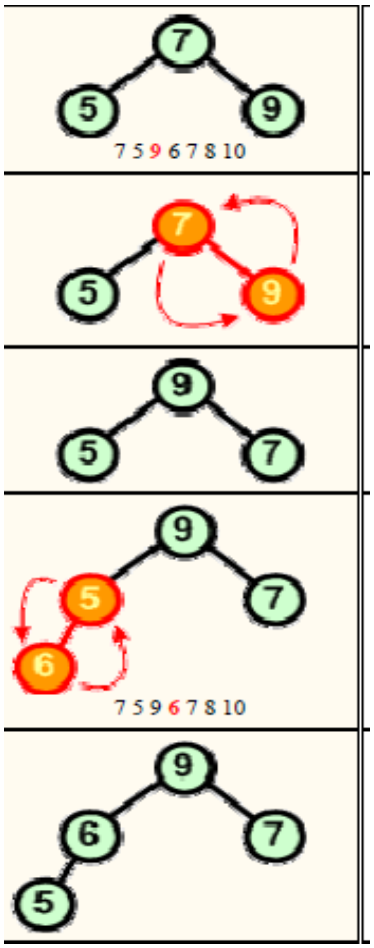
Kopiec : tworzenie

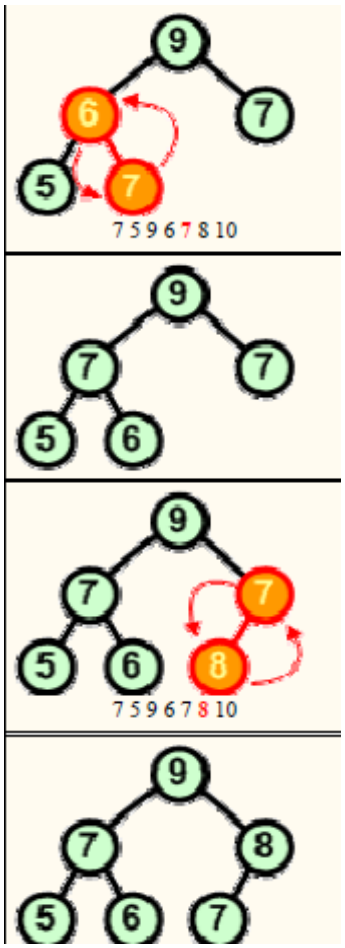
Kopiec jest drzewem binarnym, w którym wszystkie węzły spełniają następujący warunek (zwany warunkiem kopca) : węzeł nadrzędny jest większy lub równy węzłom potomnym (w porządku malejącym relacja jest odwrotna - mniejszy lub równy).

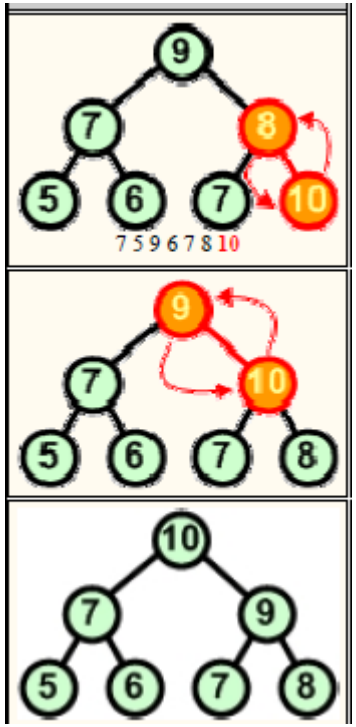
Przykład : Skonstruować kopiec z elementów zbioru {7 5 9 6 7 8 10}

Operacja	Opis
	Budowę kopca rozpoczynamy od pierwszego elementu zbioru, który staje się korzeniem.
	Do korzenia dołączamy następny element. Warunek kopca jest zachowany.
	Dodajemy kolejny element ze zbioru.
	Po dodaniu elementu 9 warunek kopca przestaje być spełniony. Musimy go przywrócić. W tym celu za nowy węzeł nadrzędny wybieramy nowo dodany węzeł. Poprzedni węzeł nadrzędny wędruje w miejsce węzła dodanego - zamieniamy węzły 7 i 9 miejscami.

Kopiec

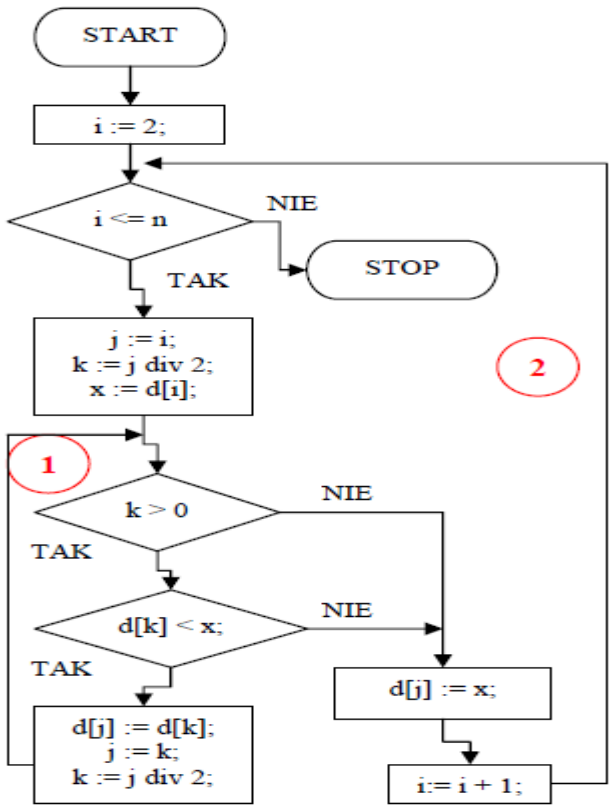






Kopiec

Schemat blokowy



Złożoność obliczeniowa O(n log(n))

Algorytm tworzy kopiec w tym samym zbiorze wejściowym d[ ]. Nie wymaga zatem dodatkowych struktur danych i ma złożoność pamięciową klasy Θ(n).
Pętla nr 1 wyznacza kolejne elementy wstawiane do kopca. Pierwszy element pomijamy, ponieważ zostałby i tak na swoim miejscu. Dlatego pętla rozpoczyna wstawianie od elementu nr 2.
Wewnątrz pętli nr 1 inicjujemy kilka zmiennych:
j - pozycja wstawianego elementu (liścia)
k - pozycja elementu nadrzędnego (przodka)
x - zapamiętuje wstawiany element

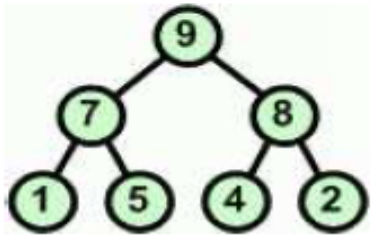
Następnie rozpoczynamy pętlę warunkową nr 2, której zadaniem jest znalezienie w kopcu miejsca do wstawienia zapamiętanego elementu w zmiennej x. Pętla ta wykonuje się do momentu osiągnięcia korzenia kopca (k = 0) lub znalezienia przodka większego od zapamiętanego elementu. Wewnątrz pętli przesuwamy przodka na miejsce potomka, aby zachować warunek kopca, a następnie przesuwamy pozycję j na pozycję zajmowaną wcześniej przez przodka. Pozycja k staje się pozycją nowego przodka i pętla się kontynuuje. Po jej zakończeniu w zmiennej j znajduje się numer pozycji w zbiorze d[ ], na której należy umieścić element w x.
Po zakończeniu pętli nr 1 w zbiorze zostaje utworzona struktura kopca.

Kopiec: rozbieranie

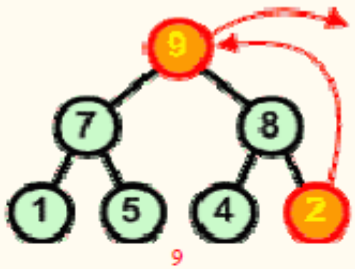
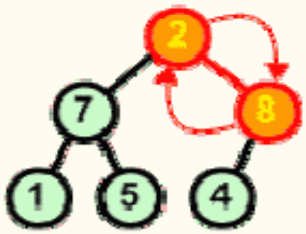
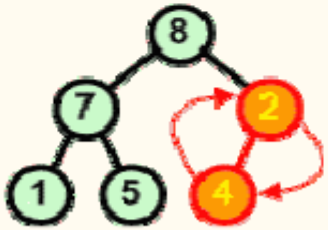
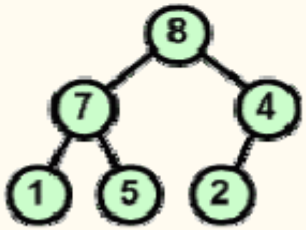
Zasady rozbioru kopca :

1. Zamień miejscami korzeń z ostatnim liściem, który wyłącz ze struktury kopca. Elementem pobieranym z kopca jest zawsze jego korzeń, czyli element największy.
2. Jeśli jest to konieczne, przywróć warunek kopca idąc od korzenia w dół.
3. Kontynuuj od kroku 1, aż kopiec będzie pusty.

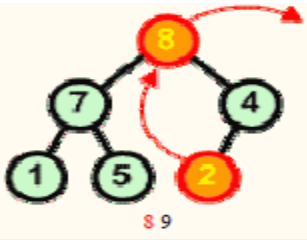
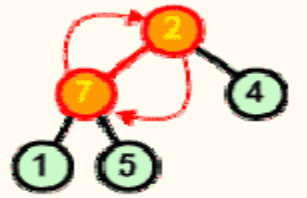
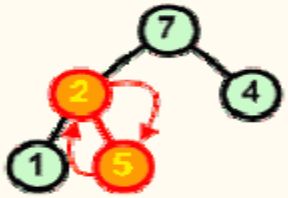
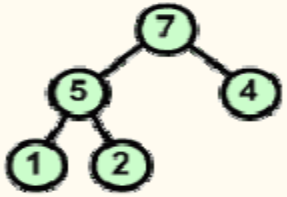
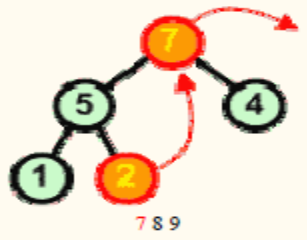
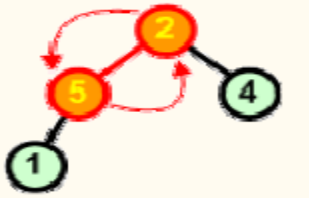
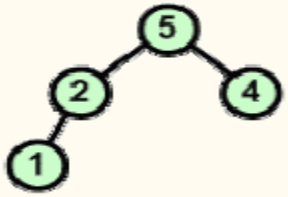
Przykład : Rozebrać kopiec



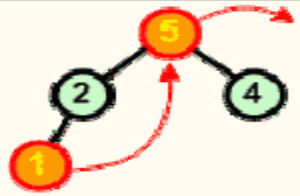
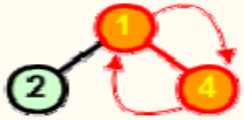
Kopiec: rozbieranie

Z 1 2 3 P	Operacja	Opis
		Rozbiór kopca rozpoczynamy od korzenia, który usuwamy ze struktury kopca. W miejsce korzenia wstawiamy ostatni liść.
		  Poprzednia operacja zaburzyła strukturę kopca. Idziemy zatem od korzenia w dół struktury przywracając warunek kopca - przodek większy lub równy od swoich potomków. Praktycznie polega to na zamianie przodka z największym potomkiem. Operację kontynuujemy dotąd, aż natrafimy na węzły spełniające warunek kopca.

Kopiec: rozbieranie

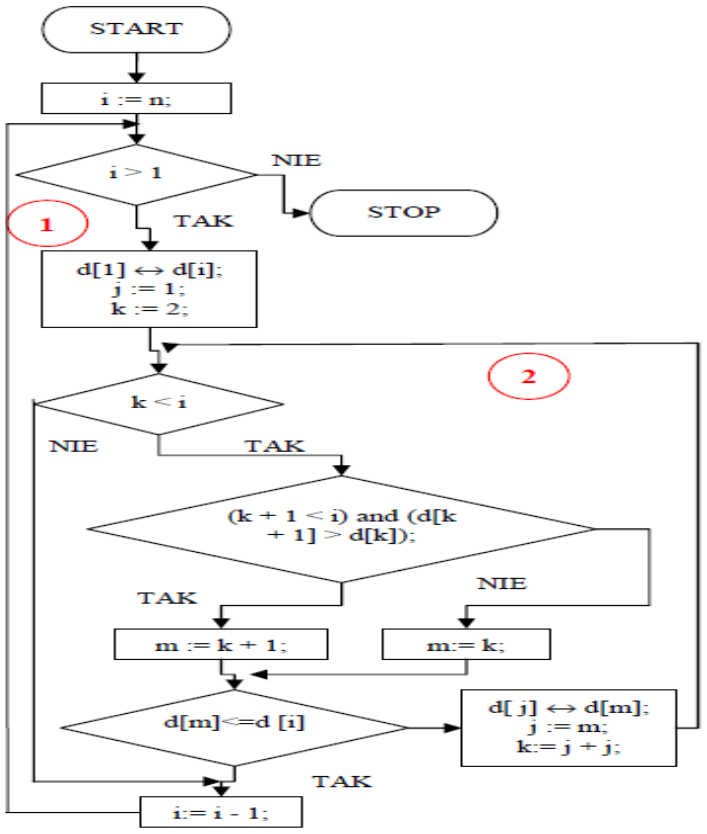
<table>
<tr><td>  </td><td colspan="3">Usuwamy z kopca kolejny korzeń zastępując go ostatnim liściem</td></tr>
<tr><td>  </td><td>  </td><td>  </td><td>W nowym kopcu przywracamy warunek kopca.</td></tr>
<tr><td>  </td><td colspan="3">Usuwamy z kopca kolejny korzeń zastępując go ostatnim liściem</td></tr>
<tr><td>  </td><td>  </td><td colspan="2">W nowym kopcu przywracamy warunek kopca. W tym przypadku już po pierwszej wymianie węzłów warunek koca jest zachowany w całej strukturze.</td></tr>
</table>

Kopiec: rozbieranie

 5 7 8 9	Usuwamy z kopca kolejny korzeń zastępując go ostatnim liściem
 	Przywracamy warunek kopca w strukturze.
 4 5 7 8 9	Usuwamy z kopca kolejny korzeń zastępując go ostatnim liściem
 	Przywracamy warunek kopca w strukturze.
 2 4 5 7 8 9	Usuwamy z kopca kolejny korzeń zastępując go ostatnim liściem.
 1 2 4 5 7 8 9	Po wykonaniu poprzedniej operacji usunięcia w kopcu pozostał tylko jeden element - usuwamy go. Zwróć uwagę, iż usunięte z kopca elementy tworzą ciąg uporządkowany.

Kopiec: rozbieranie

Schemat blokowy



Rozbiór kopca wykonywany jest w dwóch zagnieżdżonych pętlach. Pętla nr 1 zamienia miejscami kolejne liście ze spodu drzewa z korzeniem. Zadaniem pętli nr 2 jest przywrócenie w strukturze warunku kopca.

Złożoność obliczeniowa

O(n log(n))

Sortowanie przez kopcowanie

Krok 1 : Tworz_Kopiec
Krok 2 : Rozbierz_Kopiec
Krok 3 : Zakończ algorytm

Cechy Algorytmu Sortowania Przez Kopcowanie	
klasa złożoności obliczeniowej optymistyczna	Θ (n log n)
klasa złożoności obliczeniowej typowa	
klasa złożoności obliczeniowej pesymistyczna	
Sortowanie w miejscu	TAK
Stabilność	NIE

Ponieważ sortowanie przez kopcowanie składa się z dwóch następujących bezpośrednio po sobie operacji o klasie czasowej złożoności obliczeniowej Θ(n log n), to dla całego algorytmu klasa złożoności również będzie wynosić Θ (n log n).

Algorytmy sortujące

Nazwa algorytmu sortującego	Klasa złożoności			Stabilność	Sortowanie w miejscu	Zalecane?
	optymistyczna	typowa	pesymistyczna			
Zwariowane	$\Theta(1)$	$\Theta(n*n!)$	$\Theta(\infty)$	NIE	TAK	NIE!!!
Naiwne	$\Theta(n)$ ... $\Theta(n^2)$	$\Theta(n^3)$	$\Theta(n^3)$	TAK	TAK	NIE
Bąbelkowe wersja 1	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	TAK	TAK	NIE
Bąbelkowe wersja 2	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	TAK	TAK	TAK
Przez wybór	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	NIE	TAK	TAK/NIE
Przez wstawianie	$\Theta(n)$	$\Theta(n^2)$	$\Theta(n^2)$	TAK	TAK	TAK
Metodą Shella	$\Theta(n^{1,14})$	$\Theta(n^{1,15})$	$\Theta(n^{1,15})$	NIE	TAK	TAK
Przez łączenie	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	TAK	NIE	TAK
Przez kopcowanie	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	NIE	TAK	TAK
Szybkie	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n^2)$	NIE	TAK	TAK
Kubełkowe wersja I	$\Theta(m + n)$	$\Theta(m + n)$	$\Theta(m + n)$	NIE	NIE	TAK/NIE
Radix Sort	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	$\Theta(n \log n)$	TAK	NIE	TAK