TEORETYCZNE PODSTAWY INFORMATYKI

20/10/2014

WFAiS UJ, Informatyka Stosowana
I rok studiów, I stopień

Wykład 4 – część I

Kombinatoryka

- Wariacje z powtórzeniami
- Permutacje
- Wariacje bez powtórzeń
- Kombinacje
- Łączenie reguł kombinatorycznych

Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

- Często spotykamy się z problemem obliczenia wartości wyrażającej prawdopodobieństwo zajścia określonych zdarzeń.
- Dziedzina matematyki zajmująca się tą tematyką to **kombinatoryka**.
- Pojęcia związane z próbami szacowania prawdopodobieństwa występowania zdarzeń definiuje **teoria prawdopodobieństwa**.

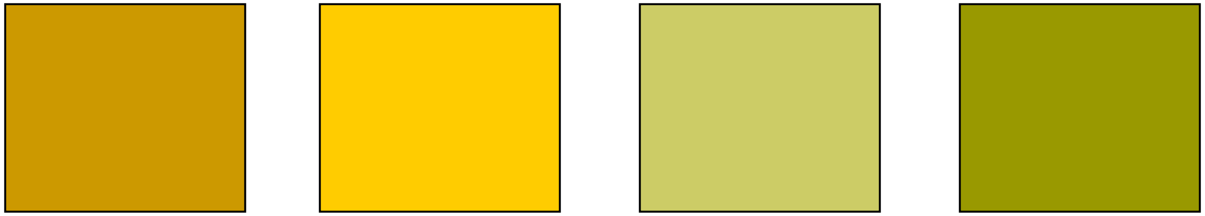
- Zacznijmy od **kombinatoryki...**

Wariacje z powtórzeniami

- Jednym z najprostszych, ale też najważniejszych problemów jest analiza listy elementów, z których każdemu należy przypisać jedną z wartości należących do stałego zbioru.
- Należy określić możliwą liczbę różnych przyporządkowań (wariacji z powtórzeniami) wartości do elementów.
- **Przykład:**

  4 kwadraty, każdy można pokolorować jednym z 3 kolorów.

  Ile możliwych pokolorowań? $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$



Wariacje z powtórzeniami

- Mamy listę n-elementów. Istnieje zbiór k-wartości z których każda może być przyporządkowana do jakiegoś elementu. Przyporządkowanie jest listą n wartości $(n_1, n_2, \ldots n_n)$. Gdzie każda z $n_1, n_2, \ldots n_n$ jest jedną z wartości k.
  - Istnieje k^n różnych przyporządkowań.
- **Twierdzenie:**
  S(n): liczba możliwych sposobów przyporządkowania dowolnej z k wartości do każdego z n elementów wynosi k^n.

Wariacje z powtórzeniami

- **Podstawa:**

  Przypadek podstawowy to n=1. Jeżeli mamy 1 element możemy wybrać dla niego dowolną spośród k wartości. Istnieje wiec k różnych przyporządkowań. Ponieważ $k^1=k$, podstawa indukcji jest prawdziwa.

- **Indukcja:**

  Załóżmy że S(n) jest prawdziwe i rozważmy S(n+1),określające że istnieje k^{n+1} możliwych przyporządkowań jednej z k wartości do każdego z n+1 elementów.

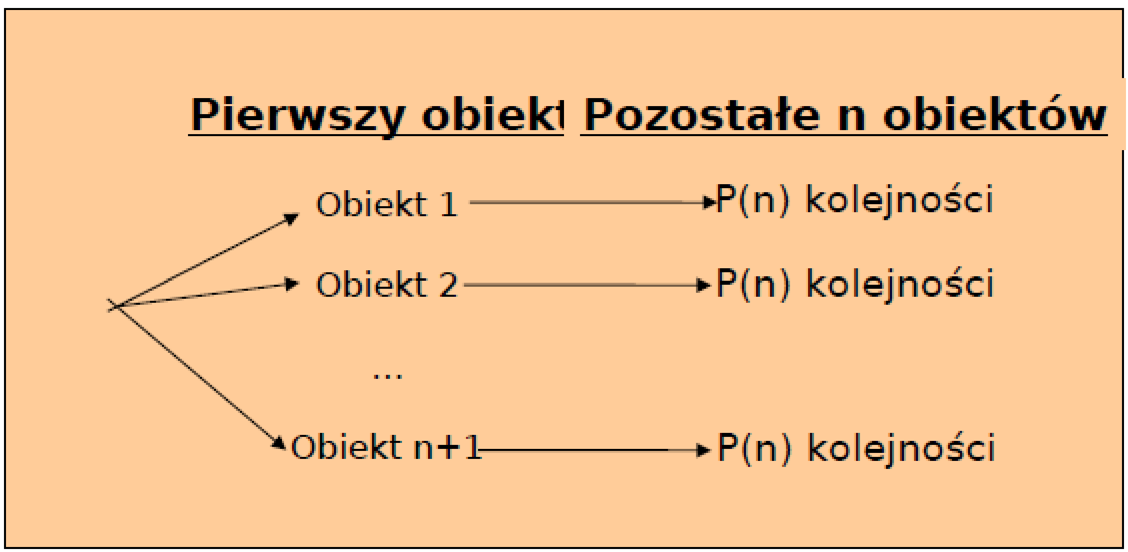
- Wiemy, że istnieje k możliwości doboru wartości dla pierwszego elementu. Zgodnie z hipotezą indukcyjną, istnieje k^n przyporządkowań wartości do pozostałych n elementów. Łączna liczba przyporządkowań wynosi $k \cdot k^n = k^{n+1}$. Cnd.

Permutacje

- Mając n różnych obiektów, na ile różnych sposobów można je ustawić w jednej lini?
  - Każde takie uporządkowanie nazywamy permutacją.
  - Liczbę permutacji n obiektów zapisujemy jako P(n).

Jak obliczyć P(n+1)?

- Problem: mamy n+1 obiektów (a1, a2, …, an, a n+1) które mają zostać ustawione.
- Ilość możliwych wyników ustawień jest P(n+1)



Permutacje
n+1 obiektów

Jak obliczyć P(n+1)?

- **Twierdzenie:**

  P(n) = n! dla wszystkich n 1
- **Podstawa:**

  Dla n=1, P(1)=1 określa że istnieje jedna permutacja dla jednego obiektu.
- **Indukcja:**
  - Załóżmy ze P(n) = n!
  - Wówczas wg. naszego twierdzenia: P(n+1)=(n+1)!
  - Rozpoczynamy od stwierdzenia że P(n+1)=(n+1) • P(n)
  - Zgodnie z hipotezą indukcyjną P(n)=n!, zatem P(n+1)=(n+1) • n!
  - Zatem P(n+1)=(n+1) • n! =(n+1) • n • (n-1) • (n-2) • ... • 1 = (n+1)!, czyli nasze twierdzenie jest poprawne. Cnd.

Jak obliczyć P(n+1)?

Jednym z interesujących zastosowań wzoru na liczbę permutacji jest dowód na to że algorytmy sortujące muszą działać w czasie co najmniej proporcjonalnym do (n log n), dla n elementów do posortowania, chyba że wykorzystują jakieś specjalne własności sortowanych elementów.

Wariacje bez powtórzeń

- Niekiedy chcemy wybrać tylko niektóre spośród elementów zbioru i nadać im określony porządek.
- Uogólniamy opisaną poprzednio funkcję P(n) reprezentującą liczbę permutacji, aby otrzymać **dwuargumentową funkcje P(n,m),** którą definiujemy jako ilość możliwych sposobów wybrania **m elementów z n-elementowego zbioru**, przy czym **istotną rolę** odgrywa **kolejność wybierania elementów**, natomiast nieważne jest uporządkowanie elementów nie wybranych.
- Zatem **P(n) = P(n,n).**

Wariacje bez powtórzeń

Przykład:

Ile istnieje sposobów utworzenia sekwencji **m** liter ze zbioru **n** liter, jeżeli żadna litera nie może występować więcej niż raz?

- Warunek aby zadanie miało sens: **$n \geq m$**
- Pierwszą literę możemy wybrać na **n sposobów** (wybieramy ze zbioru n-elementowego), drugą **na n-1 sposobów** (gdyż nie możemy wybrać tej samej litery co poprzednio), trzecia na **n-2 sposoby**, …
- Ostatnią na **n-(m-1)** sposobów.

Twierdzenie: $P(n,m) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1))$ dla wszystkich $m \leq n$

Twierdzenie: $P(n,m) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ dla wszystkich $m \leq n$

Kombinacje

- Kombinacja to każdy podzbiór zbioru skończonego.
- Kombinacja m-elementową zbioru n-elementowego A nazywa się każdy m-elementowy podzbiór zbioru A ($0 \le m \le n$). Używa się terminu „kombinacja z n elementów po m elementach” lub wręcz „kombinacja z n po m”.
- Taką funkcję zapisujemy jako:

$$\binom{n}{m} = \frac{P(n,m)}{P(m)} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Wyznaczanie liczby kombinacji

Podstawa: $\binom{n}{0}=1$ dla dowolnego $n\geq 1$.
Oznacza to że istnieje tylko jeden sposób wybrania **zero** elementów ze zbioru **n**-elementowego – wybranie niczego.
Także $\binom{n}{n}=1$, ponieważ jedynym sposobem wybrania **n**-elementów ze zbioru **n**-elementowego jest wybranie ich wszystkich.

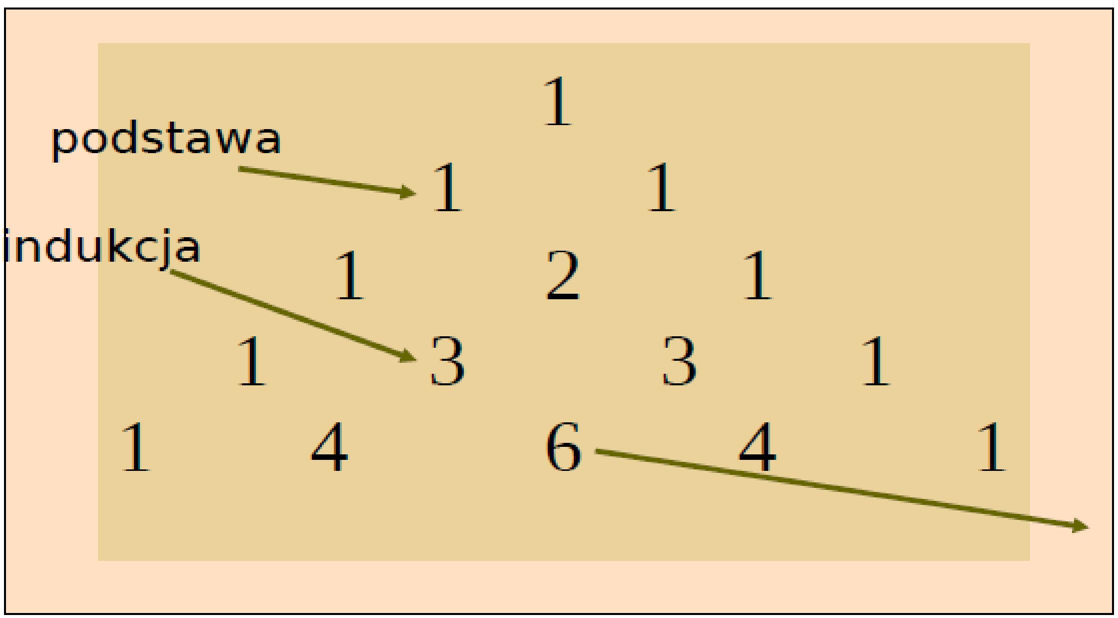
Indukcja: Jeśli $0< m< n$, to $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$.
Oznacza to, że jeżeli chcemy wybrać **m** elementów ze zbioru **n**-elementowego, możemy albo:

- nie wybrać pierwszego elementu, po czym wybrać m elementów z pozostałych n-1 elementów. Taką liczbę możliwości wyraża $\binom{n-1}{m}$.
- wybrać pierwszy element, po czym wybrać m-1 elementów z pozostałych n-1 elementów. Taka liczbę możliwości wyraża $\binom{n-1}{m-1}$.

Trójkąt Pascala

- Rekurencję przy obliczaniu liczby kombinacji często ilustruje się przy pomocy trójkąta Pascala.

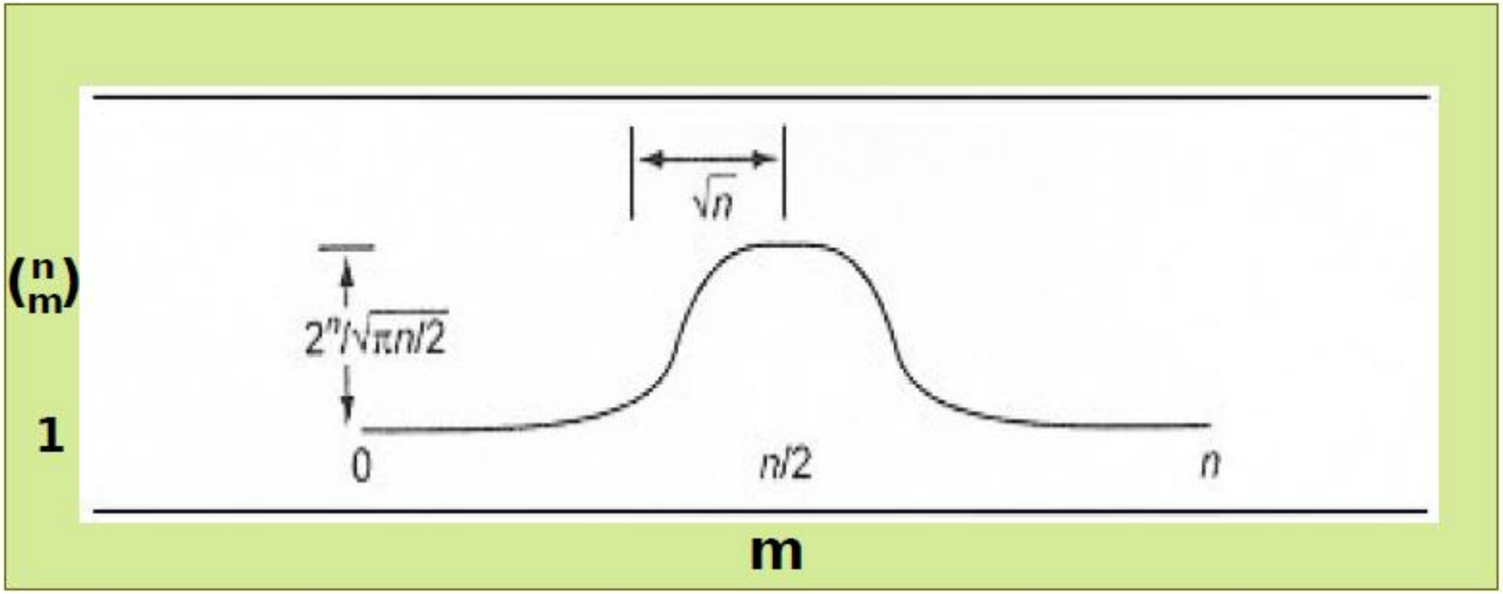
$\binom{n}{m}$ = **(m+1)** liczba w **(n+1)** wierszu



$\binom{4}{2} = 4!/(2! \times 2!) = 6$

Interesujące własności funkcji $\binom{n}{m}$

- To są również współczynniki rozkładu dwuwyrazowego wielomianu (dwumianu) $(x+y)^n$
  - $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$
  - Wykres funkcji $\binom{n}{m}$ dla stałej dużej wartości **n**:



Łączenie reguł kombinatorycznych

- Typowy problem kombinatoryczny wymaga **łączenia przedstawionych reguł** (cegiełek) w bardziej skomplikowane struktury.
- Techniki których używamy to:
  - prowadzenie obliczeń jako **sekwencji wyborów**;
  - prowadzenie obliczeń jako **różnicy** innych obliczeń (np. wszystkich wyborów – nieprawidłowych wyborów);
  - prowadzenie obliczeń jako **sumy rozwiązań** dla podprzypadków które są wzajemnie rozłączne.

Wykład 4 – część II

Prawdopodobieństwo i algorytmy probabilistyczne

- Co to jest teoria prawdopodobieństwa
- Podstawowe pojęcia:
  - reguła sum, reguła iloczynów
  - prawdopodobieństwa warunkowe
- Przykład z kartami
- Analiza probabilistyczna
- Liczby losowe, generatory liczb losowych
- Algorytmy wykorzystujące prawdopodobieństwo
  - Czy pudełko jest wadliwe?
  - Czy liczba N jest liczba pierwszą?

Teoria prawdopodobieństwa

- Teoria prawdopodobieństwa, szeroko stosowana we współczesnej nauce, ma również wiele zastosowań w informatyce, np.:
  - szacowanie czasu działania programów dla przypadków ze średnimi, czyli typowymi danymi wejściowymi,
  - wykorzystanie do projektowania algorytmów „podejmujących decyzje” w niepewnych sytuacjach, np. najlepsza możliwa diagnoza medyczna na podstawie dostępnej informacji,
  - algorytmy typu Monte Carlo,
  - różnego rodzaju symulatory procesów,
  - prawie zawsze „prawdziwe” rozwiązania.

Podstawowe pojęcia

Przestrzeń probabilistyczna W:

- Skończony zbiór punktów, z których każdy reprezentuje jeden z możliwych wyników doświadczenia. Każdy punkt x jest związany z taką nieujemną liczbą rzeczywistą zwaną prawdopodobieństwem x, że suma prawdopodobieństw wszystkich punktów wynosi 1. Istnieje także pojęcie nieskończonych przestrzeni probabilistycznych ale nie mają one większego zastosowania w informatyce.

Zdarzenie E:

- Podzbiór punktów w przestrzeni probabilistycznej. Prawdopodobieństwo zdarzenia, P(E), jest sumą prawdopodobieństw punktów należących do tego zdarzenia.

Dopełnienie zdarzenia E czyli $\bar{E}$:

- Zbiór punktów przestrzeni probabilistycznej które nie należą do zdarzenia E. $P(E) + P(\bar{E}) = 1$.

Prawdopodobieństwo warunkowe

- Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia F pod warunkiem zajścia zdarzenia E, gdzie $P(E) > 0$ nazywamy liczbę:
  $P(F|E) = P(E \cap F) / P(E)$.
- Jest to iloraz prawdopodobieństwa części wspólnej zdarzeń E, F i prawdopodobieństwa zdarzenia E.
- Zdarzenia E, F nazywamy niezależnymi jeśli zachodzi:
  $P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F)$
- W przeciwnym wypadku zdarzenia są zależne.
- Dla zdarzeń niezależnych E, F zachodzi:
  $P(F|E) = P(F)$

Przykłady

Zdarzenia niezależne:

- Rzucamy dwoma kostkami, wyrzucenie liczby „1” na pierwszej kostce (zdarzenie E) nie wpływa na możliwość pojawienia się liczby „1” na drugiej kostce (zdarzenie F). P(F|E) = P(F)

Zdarzenia zależne:

- Ciągniemy dwa razy kartę z talii kart. Wyciągniecie jako pierwszej karty asa (zdarzenie E), wpływa na możliwość wyciągnięcia jako drugiej karty asa (zdarzenie F). P(F|E) $\neq$ P(F).

W niektórych sytuacjach liczenie prawdopodobieństw jest łatwiejsze jeżeli podzielimy przestrzeń probabilistyczna na rozdzielne obszary R_1, R_2, ... , R_k. Wówczas P(E) = $\sum_{i=0}^{k} P(E|R_i)P(Ri)$.

Przykład z kartami

- Ciągniemy dwie karty z talii 52 kart. Liczba możliwych wyników tego doświadczenia (czyli wariacji bez powtórzeń) wynosi $|W| = 52 * 51 = 2652$.
- Oznaczmy poprzez E zdarzenie polegające na wyciągnięciu jako pierwszej karty As'a.
  $|E| = 4 * 51 = 204$.
  $P(E) = |E|/|W| = 204/2652 = 1/13$.
- Prawdopodobieństwo wyciągnięcia As'a jako drugiej karty, (zdarzenie F), jeżeli pierwsza wyciągnięta karta to był As jest
  - $P(F|E) = P(E \cap F) / P(E) = 4 \cdot 3/204 = 1/17$.
- **$P(E \cap F) = P(E) \cdot P(F|E) = 1/13 \cdot 1/17 = 1/221$**.

Przykład z kartami

- Podzielmy przestrzeń na dwa obszary:
  - R1 - pierwszą karta jest As, |R1| = 4*51 = 204.
  - R2 - pierwszą karta nie jest As, |R2| = 2652-204 = 2448.
  - $P(E \cap F)=P((E \cap F)|R1) \bullet P(R1) + P((E \cap F)|R2) \bullet P(R2)$
  - $P(E \cap F|\ R2) = 0$
  - $P(E \cap F|\ R1) = 4 \bullet 3/\ 4 \bullet 51 = 1/17$
  - $P(R1) = 204/\ 2652 = 1/13$
  - **$P(E \cap F)$** $= P((E \cap F)|R1) \bullet P(R1) + P((E \cap F)|R2) \bullet P(R2)$

    $= 1/17 \bullet 1/13 + 0 \bullet P(R2)$

    $= 1/221$.

- Gdybyśmy po wyciągnięciu pierwszej karty zwracali ją z powrotem do talii, to mielibyśmy $P(F|E) = P(F) = 1/13$ (zdarzenia niezależne).
  - Wówczas $P(E) \bullet P(F|E)=1/13 \bullet 1/13=1/169$.

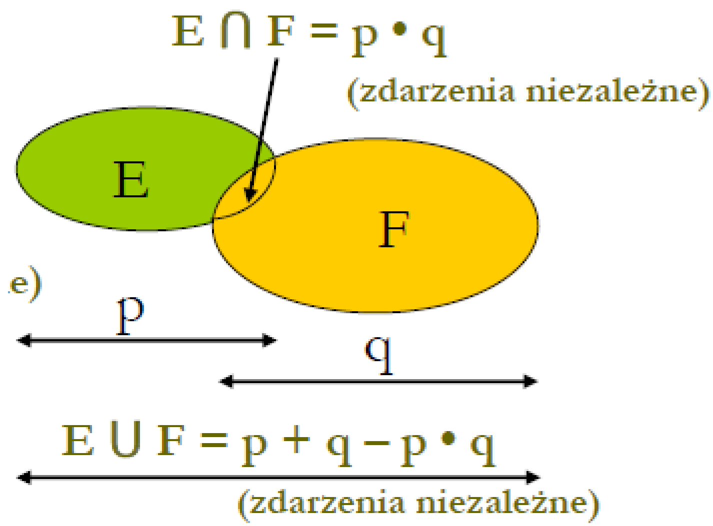
Reguły zwiazane z wieloma zdarzeniami

Oznaczmy: P(E) = p, P(F) = q.

Wówczas:

max(0, (p+q-1)) ≤ P(E∩F) ≤ min(p,q)

P(E∪F) = p+q – P(E∩F)
P(E∪F) = p+q – p•q (zdarzenia niezależne)



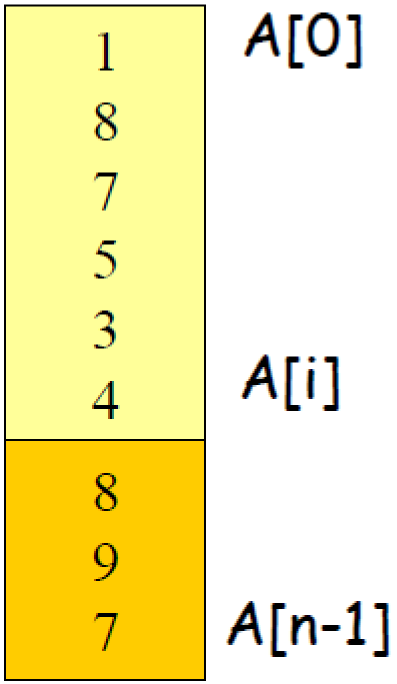
W zastosowaniach czasem akceptujemy że nie możemy wyznaczyć dokładnie prawdopodobieństw oraz zależności między zdarzeniami. Potrafimy tylko wskazać sytuacje najmniej lub najbardziej prawdopodobne.
Zastosowanie: różnego typu diagnostyka

Oczekiwane wartości obliczeń i analiza probabilistyczna

- Przypuśćmy, że mamy pewną funkcję określoną na przestrzeni probabilistycznej f(x). Wartość oczekiwana tej funkcji po wszystkich punktach przestrzeni

  E(f) = $\sum f(x)\ P(x)$

- Mamy tablicę n liczb całkowitych, sprawdzamy czy jakaś liczba całkowita „x" jest elementem tej tablicy. Algorytm przegląda całą tablice, po napotkaniu
  A[i] = x kończy działanie.
  - Jeżeli A[0] = x to algorytm O(1)
  - Jeżeli A[n-1] = x to algorytm O(n)



- E(f) = $\sum_{i=0}^{n-1}(ci + d)$ • (1/n) = c • (n-1) / 2 + d
- E(f) ~ c • n/2 dla dużego n

Algorytmy wykorzystujące prawdopodobieństwo

- Jest bardzo wiele różnych typów algorytmów wykorzystujących prawdopodobieństwo.
- Jeden z nich to tzw. **algorytmy Monte-Carlo** które wykorzystują liczby losowe do zwracania albo wyniku pożądanego („prawda”), albo żadnego („nie wiem”).
  - Wykonując algorytm **stałą** liczbę razy, możemy rozwiązać problem, dochodząc do wniosku, że jeśli żadne z tych powtórzeń nie doprowadziło nas do odpowiedzi „prawda”, to odpowiedzią jest „fałsz”.
  - Odpowiednio dobierając liczbę powtórzeń, możemy dostosować prawdopodobieństwo niepoprawnego wniosku „fałsz” do tak niskiego poziomu, jak w danym przypadku uznamy za konieczne.
  - **Nigdy** jednak nie osiągniemy prawdopodobieństwa popełnienia błędu na poziomie **zero**.

Co to są liczby losowe?

- Mówimy, że wyniki pewnych doświadczeń są **losowe**, co oznacza ze wszystkie możliwe **wyniki są równie prawdopodobne**.
- Przykładowo, jeżeli rzucamy normalną (prawidłową) kostką do gry to zakładamy że nie ma możliwości fizycznego kontrolowania wyniku tego rzutu w taki sposób aby jeden wynik był bardziej prawdopodobny od drugiego.
- Podobnie zakładamy że mając uczciwie potasowana talie kart nie możemy wpłynąć na wynik - prawdopodobieństwo otrzymania w rozdaniu każdej karty jest identyczne.

Generatory liczby losowych?

- Wszystkie generowane przez komputer losowe sekwencje są wynikiem działania specjalnego rodzaju algorytmu zwanego generatorem liczb losowych (ang. random number generator).
- Przykład prostego generatora który całkiem dobrze sprawdza się w praktyce to tzw. “liniowy generator kongurencyjny”.
  - Wyznaczamy stałe $a \geq 2$, $b \geq 1$, $x0 \geq 0$ oraz współczynnik $m > \max(a, b, x0)$. Możemy teraz wygenerować sekwencje liczb x1, x2, … za pomocą wzoru:

$$x_{n+1} = (a\, x_n + b) \bmod(m)$$

  - Dla właściwych wartości stałych a, b, m oraz x0, sekwencja wynikowa będzie wyglądała na losową, mimo ze została ona wygenerowana przy użyciu konkretnego algorytmu i na podstawie “jądra” x0.
- Dla szeregu zastosowań istotna jest odtwarzalność sekwencji liczb losowych.

Algorytmy wykorzystujące prawdopodobieństwo

- Mamy pudełko w którym jest n-procesorów, nie mamy pewności czy zostały przetestowane przez producenta. Zakładamy że prawdopodobieństwo że procesor jest wadliwy (w nieprzetestowanym pudelku) jest 0.10.

- **Co możemy zrobić aby potwierdzić czy pudełko jest dobre?**
  - przejrzeć wszystkie procesory -> algorytm O(n)
  - losowo wybrać k procesorów do sprawdzenia -> algorytm O(1)
  - błąd polegałby na uznaniu ze pudełko dobre (przetestowane) jeżeli nie było takie.

- Losujemy k=131 procesorów.
  Jeżeli procesor jest dobry odpowiadamy „nie wiem". Prawdopodobieństwo ze „nie wiem" dla każdego z k-procesorów $(0.9)^k = (0.9)^{131} = 10^{-6}$.
  10^{-6} to jest prawdopodobieństwo że pudełko uznamy za dobre choć nie było testowane przez producenta.
  Za cenę błędu = 10^{-6}, zamieniliśmy algorytm z O(n) na O(1).
  Możemy regulować wielkość błędu/czas działania algorytmu zmieniając k.

„ Czy liczba N jest liczbą pierwszą ?”

- W połowie lat 70-tych odkryto **dwa bardzo eleganckie probabilistyczne algorytmy** sprawdzające, czy liczba jest pierwsza. Były one jednymi z pierwszych rozwiązań probabilistycznych dla trudnych problemów algorytmicznych. Wywołały fale badań które doprowadziły do probabilistycznych rozwiązań wielu innych problemów.
- Oba algorytmy wykonują się w czasie wielomianowym (niskiego stopnia), zależnym od liczby cyfr w danej liczbie **N** (czyli **O (log N)**).
- Oba algorytmy są oparte na losowym szukaniu pewnych rodzajów potwierdzeń lub **świadectw złożoności** liczby N.
- Po znalezieniu takiego świadectwa algorytm może się bezpiecznie zatrzymać z odpowiedzią **„nie, N nie jest liczbą pierwszą”,** ponieważ istnieje bezdyskusyjny dowód że **N** jest liczbą złożoną.
- Poszukiwanie musi być przeprowadzone w taki sposób aby w pewnym rozsądnym czasie algorytm mógł przerwać szukanie odpowiadając, że **N** jest liczbą pierwszą z bardzo małą szansą omyłki.
- Trzeba zatem znaleźć dająca się **szybko sprawdzać** definicje świadectwa złożoności.

„ Czy liczba N jest liczbą pierwszą ?”

Świadectwa złożoności

- Każda liczba parzysta oprócz 2 jest złożona
- Jeżeli suma cyfr liczby jest podzielna przez 3 to liczba jest złożona (iteracyjny prosty algorytm liniowo zależny od liczby cyfr)
- Test pierwszości Fermata:
  - jeśli n jest liczbą pierwszą oraz k jest dowolna liczba całkowita (1, n-1), to $k^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.
  - natomiast jeśli n jest liczbą złożoną (z wyjątkiem kilku złych liczb złożonych – liczb Carmichael'a) oraz jeśli k wybierzemy losowo z przedziału (1, n-1) to prawdopodobieństwo tego że $k^{n-1} \not\equiv 1 \pmod{n}$ jest mniejsze niż ½.
  - Zatem liczby złożone (poza liczbami Carmichael'a) spełniają warunek testu dla danego k z prawdopodobieństwem nie mniejszym niż ½.
- Test pierwszości Solovay-Strassena:
  - jeśli k i n nie maja wspólnych dzielników (co by było świadectwem złożoności) policz:
    $X = {}^{k(n-1)/2} \pmod{n}$, $Y = Js(n,k)$ (symbol Jacobiego),
    jeśli $X \neq Y$ to k jest świadectwem złożoności liczby n.
  - dla tego testu nie ma 'złych' liczb złożonych.

Podsumowanie

- **Przestrzeń probabilistyczna** składa się z punktów z których każdy reprezentuje wynik jakiegoś doświadczenia. Każdy punkt x związany jest z nieujemna liczbą zwaną prawdopodobieństwem punktu x. Suma prawdopodobieństw wszystkich punktów składających się na przestrzeń probabilistyczna wynosi 1.
- **Zdarzenie** jest podzbiorem punktów z przestrzeni probabilistycznej. Prawdopodobieństwo zdarzenia jest sumą prawdopodobieństw należących do niego punktów. Prawdopodobieństwo każdego zdarzenia mieści się w przedziale od 0 do 1.

Podsumowanie

- **Reguła sum** określa, że prawdopodobieństwo tego, że zajdzie jedno z dwóch zdarzeń E lub F jest większe lub równe większemu z prawdopodobieństw obu zdarzeń, ale nie większa niż suma tych prawdopodobieństw.
- **Reguła iloczynów** określa, że prawdopodobieństwo tego, że wynikiem pewnego doświadczenia będą dwa zdarzenia E i F, jest nie większe niż mniejsze z prawdopodobieństw obu zdarzeń.
- Wykonując **algorytm Monte Carlo** stałą liczbę razy, możemy rozwiązać problem, dochodząc do wniosku, że jeśli żadne z tych powtórzeń nie doprowadziło nas do odpowiedzi „prawda”, to odpowiedzią jest „fałsz”.