

Rachunek Prawdopodobieństwa i Statystyka - Zestaw 6
Informatyka stosowana, wszystkie grupy

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład podany w tabeli:

y_k / x_i	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
3.0	0.16	0.00	0.00	0.00	0.00
3.5	0.12	0.04	0.00	0.00	0.00
4.0	0.08	0.08	0.08	0.00	0.00
4.5	0.00	0.12	0.06	0.05	0.04
5.0	0.00	0.00	0.01	0.08	0.08

gdzie X jest średnią ocen w sesji egzaminacyjnej w semestrze III dla losowo wybranego studenta, zaś Y jest średnią ocen tego studenta w sesji egzaminacyjnej w semestrze IV. Oblicz współczynnik korelacji zmiennych losowych.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład podany w tabeli:

y_k / x_i	8	9	10	11
1.20	0.10	0.04	0.00	0.00
1.25	0.05	0.11	0.20	0.00
1.30	0.00	0.10	0.15	0.10
1.35	0.00	?	0.05	0.10

gdzie X to staż pracy (w miesiącach) losowo wybranego studenta informatyki pracującego w pewnej firmie zaś Y to zarobki (w tysiącach) tego studenta.

a) Podaj $P(X=11, Y=1,3)$

b) Oblicz $P(X=9, Y=1,35)$

c) Oblicz współczynnik korelacji między zmiennymi X i Y .

3. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X,Y) ma rozkład jednorodny w obszarze $D=\{(x,y): 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 - x\}$. Proszę obliczyć współczynnik korelacji zmiennych X i Y .

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednorodny w przedziale $(0,1)$, zaś $Y = X^k, k > 0$. Proszę policzyć kowariancję oraz współczynnik korelacji tych zmiennych.

5. W urnie znajduje się $N=20$ kul, w tym $M=5$ kul białych. Niech zmienne losowe X i Y przyjmują wartości równe liczbie wyjętych kul białych, odpowiednio w pierwszym oraz drugim, bezzwrotnym losowaniu kuli z urny (tzn. przyjmują one wartości 1 w przypadku wylosowania kuli białej, natomiast 0 w przypadku wylosowania kuli, która nie jest biała). Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej (X,Y) oraz obliczyć współczynnik korelacji. Porównać wyniki, przyjmując $N=100, M=25$, oraz $N=1000, M=250$. Zinterpretować uzyskane wyniki.

6. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma łączną funkcję gęstości prawdopodobieństwa $f_{X, Y}(x, y)$. Udowodnij, że funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $Z=X+Y$ dana jest wzorem

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X, Y}(x, z - x) dx .$$

7. Policzyc gęstość prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącej sumą niezależnych zmiennych losowych X_1 i X_2 o rozkładach normalnych $N(m_1, \sigma_1^2)$ i $N(m_2, \sigma_2^2)$. *Wskazówka: można skorzystać z wyników poprzedniego zadania.*