Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 6:

Modele danych oparte na
→ zbiorach
→ drzewach

Model danych oparty na zbiorach

- Zbiór jest najbardziej podstawowym modelem danych w matematyce.
- Wszystkie pojęcia matematyczne, od drzew po liczby rzeczywiste można wyrazić za pomocą specjalnego rodzaju zbioru.
- Jest wiec naturalne że jest on również podstawowym modelem danych w informatyce.
- **Dotychczas wykorzystaliśmy to pojecie mówiąc o**
  - **słowniku,** który także jest rodzajem zbioru na którym możemy wykonywać tylko określone operacje: wstawiania, usuwania i wyszukiwania

Podstawowe definicje

- W matematyce pojęcie **zbioru** nie jest zdefiniowane wprost.
- Zamiast tego, podobnie jak punkt czy prosta w geometrii, **zbiór jest zdefiniowany za pomocą swoich własności**.
- W szczególności istnieje pojecie **przynależności,** które jest sensowne tylko i wyłącznie dla zbiorów. Jeśli **S** jest **zbiorem** oraz **x** jest **czymkolwiek**, zawsze możemy odpowiedzieć na pytanie
  „Czy x należy do zbioru S?”
- Zbiór **S** składa się więc z wszystkich takich elementów **x**, dla których **x** należy do zbioru **S**.

Podstawowe definicje

Notacja:

- Wyrażenie $x \in S$ oznacza, że element **x** należy do zbioru **S**.
- Jeśli elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należą do zbioru **S**, i żadne inne, to możemy zapisać:
  $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
- Każdy **x** musi być inny, nie możemy umieścić w zbiorze żadnego elementu dwa lub więcej razy. Kolejność ułożenia elementów w zbiorze jest jednak całkowicie dowolna.
- Zbiór pusty, oznaczamy symbolem $\varnothing$, jest zbiorem do którego nie należą żadne elementy. Oznacza to że $x \in \varnothing$ jest zawsze fałszywe.

Podstawowe definicje

- **Definicja za pomocą abstrakcji:**
  - Wyliczenie elementów należących do zbioru nie jest jedynym sposobem jego definiowania. Bardzo wygodne jest wyjście od definicji że istnieje zbiór **S** oraz że jego elementy spełniają własność **P**, tzn. **{x : x ∈ S oraz P(x) }** czyli „zbiór takich elementów **x** należących do zbioru **S**, które spełniają własność **P”**.
- **Równość zbiorów:**
  - Dwa zbiory są **równe** (czyli są tym samym zbiorem), jeśli zawierają **te same elementy.**
- **Zbiory nieskończone:**
  - Zwykle wygodne jest przyjęcie założenia że zbiory są skończone. Czyli że istnieje pewna skończona liczba **N** taka, że nasz zbiór zawiera dokładnie **N** elementów. Istnieją jednak również zbiory nieskończone np. liczb naturalnych, całkowitych, rzeczywistych, itd.

Operacje na zbiorach

- Operacje często wykonywane na zbiorach:
  - **Suma:** dwóch zbiorów **S** i **T**, zapisywana **S ⋃ T**, czyli zbiór zawierający elementy należące do zbioru **S** lub do zbioru **T**.
  - **Przecięcie (iloczyn):** dwóch zbiorów **S** i **T**, zapisywana **S ⋂ T**, czyli zbiór zawierający należące elementy do zbioru **S** i do zbioru **T**.
  - **Różnica:** dwóch zbiorów **S** i **T**, zapisywana **S \ T**, czyli zbiór zawierający tylko te elementy należące do zbioru **S**, które nie należą do zbioru **T**.

Operacje na zbiorach

- Jeżeli **S** i **T** są **zdarzeniami w przestrzeni probabilistycznej**, to suma, przecięcie i różnica mają naturalne znaczenie,
  - **S ⋃ T** jest zdarzeniem polegającym na zajściu zdarzenia **S** lub **T**,
  - **S ⋂ T** jest zdarzeniem polegającym na zajściu zdarzenia **S** i **T**,
  - **S \ T** jest zdarzeniem polegającym na zajściu zdarzenia **S** ale nie **T**,
  - Jeśli **S** jest zbiorem obejmującym całą przestrzeń probabilistyczna, **S \ T** jest **dopełnieniem zbioru T**.

Prawa algebraiczne

- Prawo przemienności i łączności dla sumy zbiorów określają, że możemy obliczyć sumę wielu zbiorów, wybierając je w dowolnej kolejności. Wynikiem zawsze będzie taki sam zbiór elementów, czyli takich które należą do jednego lub więcej zbiorów będących operandami sumy.

Prawo przemienności dla sumy:

$$(S \cup T) = (T \cup S)$$

Prawo łączności dla sumy:

$$(S \cup (T \cup R)) = ((S \cup T) \cup R)$$

.

Prawo przemienności dla przecięcia:

$$(S \cap T) = (T \cap S)$$

Prawo łączności dla przecięcia:

$$(S \cap (T \cap R)) = ((S \cap T) \cap R)$$

Prawa algebraiczne

- Przecięcie dowolnej liczby zbiorów nie zależy od kolejności ich grupowania

.

Prawo rozdzielności przecięcia względem sumy:

$$(S \cap (T \cup R)) = ((S \cap T) \cup (S \cap R)$$

Prawo rozdzielności sumy względem przecięcia:

$$(S \cup (T \cap R)) = ((S \cup T) \cap (S \cup R)$$

Prawa algebraiczne

Prawo łączności dla sumy i różnicy:
$(S \setminus (T \cup R)) = ((S \setminus T) \cup (S \setminus R))$
Prawo rozdzielności różnicy względem sumy:
$((S \cup T) \setminus R) = ((S \setminus R) \cup (T \setminus R))$

- Zbiór pusty jest elementem neutralnym sumy: $(S \cup \varnothing) \equiv S$
- Idempotencja sumy: $(S \cup S) = S$
- Idempotencja przecięcia: $(S \cap S) = S$
- $(S \setminus S) \equiv \varnothing$
- $(\varnothing \setminus S) \equiv \varnothing$
- $(\varnothing \cap S) \equiv \varnothing$

Prawa algebraiczne

- **Relacja podzbioru:**
  - Istnieje relacja zawierania się jednego zbioru w drugim zbiorze, co oznacza że wszystkie elementy pierwszego są również elementami drugiego.
- **Zbiór potęgowy:**
  - P(S) zbioru S to zbiór wszystkich podzbiorów zbioru S.
  - Jeśli S = {1,2,3} to:
  - P(S) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1,2}, {1,3}, {2,3}, {1,2,3} }.

Zbiory a listy

- Istotne różnice miedzy pojęciem zbiór $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ a listą $L = (x_1, x_2, ..., x_n)$:
  - Kolejność elementów w zbiorze jest nieistotna (a dla listy jest istotna).
  - Elementy należące do listy mogą się powtarzać (a dla zbioru nie mogą).

Obiekty niepodzielne

- To nie jest pojęcie z teorii zbiorów ale bardzo wygodne dla dyskusji o strukturach danych i algorytmach opartych na zbiorach.
- Zakładamy istnienie pewnych **obiektów niepodzielnych**, które nie są zbiorami. Obiektem niepodzielnym może być **element zbioru**, jednak nic nie może należeć do samego obiektu niepodzielnego. Podobnie jak zbiór pusty, obiekt niepodzielny nie może zawierać żadnych elementów. Zbiór pusty jest jednak zbiorem, obiekt niepodzielny nim nie jest.
- Kiedy mówimy o strukturach danych, często wygodne jest wykorzystanie skomplikowanych typów danych jako **typów obiektów niepodzielnych**. Obiektami niepodzielnymi mogą wiec być struktury lub tablice, które przecież wcale nie mają „niepodzielnego” charakteru.

Suma, przecięcie i różnica:

- Podstawowe operacje na zbiorach, np. suma, mogą wykorzystywać jako przetwarzaną strukturę danych listę jednokierunkową, chociaż właściwa technika przetwarzania zbiorów powinna się nieco różnić od stosowanej przez nas do słownika.
- W szczególności posortowanie elementów wykorzystywanych list znacząco skraca czas wykonywania operacji sumy, przecięcia i różnicy zbiorów. (Takie działanie niewiele zmienia czas wykonywania operacji na słowniku).

Zbiory a listy

- **Zbiory jako nieposortowane listy:**
  - Wyznaczenie sumy, przecięcia czy różnicy **zbiorów o rozmiarach m i n** wymaga czasu ***O*(m n).**
  - Aby stworzyć listę **U** reprezentująca np. sumę pary **S i T**, musimy rozpocząć od skopiowania listy reprezentującej zbiór **S** do początkowo pustej listy **U**. Następnie każdy element listy ze zbioru **T** musimy sprawdzić aby przekonać się, czy nie znajduje się on na liście **U**. Jeśli nie to dodajemy ten element do listy **U**.

Zbiory a listy

- **Zbiory jako posortowane listy**
  - Operacje wykonujemy znacznie szybciej jeżeli elementy są posortowane. Za każdym razem porównujemy ze sobą tylko dwa elementy (po jednym z każdej listy).
  - Wyznaczenie sumy, przecięcia czy różnicy **zbiorów o rozmiarach m i n** wymaga czasu **O(m+n).**
  - Jeżeli listy nie były pierwotnie posortowane to sortowanie list zajmuje **O(m log m + n log n).**
  - Operacja ta może nie być szybsza niż **O(m n)** jeśli ilość elementów list jest bardzo różna.
  - **Jeżeli liczby m i n są porównywalne to O(m log m + n log n) < O(m n)**

Implementacja oparta na wektorze własnym

- Definiujemy **uniwersalny zbiór U** w którym zawierają się wszystkie zbiory na których będziemy przeprowadzać operacje. Np. talia kart (zbiór 52 kart) jest uniwersalny dla różnych możliwych zbiorów kart.
- **Porządkujemy elementy zbioru U** w taki sposób, by każdy element tego zbioru można było związać z **unikatową „pozycją ”,** będącą liczbą całkowitą od **0** do **n-1** (gdzie **n** jest liczba elementów w zbiorze uniwersalnym). Liczba elementów w zbiorze **S** jest **m**.
- Wówczas, **zbiór S** zawierający się w zbiorze **U**, możemy **reprezentować za pomocą wektora własnego** złożonego z zer i jedynek – dla każdego elementu **x** należącego do zbioru **U**, jeśli **x** należy także do zbioru **S**, odpowiadająca temu elementowi pozycja zawiera wartość **1**; jeśli **x** nie należy do **S**, na odpowiedniej pozycji mamy wartość **0**.

Przykład z kartami

Przykład:

- Niech U będzie talią kart.
- Umawiamy się że porządkujemy karty w talii w następujący sposób:
  - Kolorami: trefl, karo, kier, pik.
  - W każdym kolorze wg schematu: as, 2, 3, …, walet, dama, król.
- Przykładowo pozycja:
  - as trefl to 0,
  - król trefl to 12,
  - as karo to 13,
  - walet pik to 49.

Przykład z kartami

- Zbiór wszystkich kart koloru trefl

  1111111111110000000000000000000000000000000000
- Zbiór wszystkich figur

  000000000011100000000011100000000011100000000111
- Poker w kolorze kier (as, walet, dama, król)

  000000000000000000000000100000000011100000000000
- Każdy element zbioru kart jest związany z unikatową pozycją.

Przykład z jabłkami

	Odmiana	Kolor	Dojrzewa
0	Delicious	czerwony	późno
1	Granny Smith	zielony	wcześnie
2	Jonathan	czerwony	wcześnie
3	McIntosh	czerwony	wcześnie
4	Gravenstein	czerwony	późno
5	Pippin	zielony	późno

Czerwone = 101110
Wcześnie = 011100
Czerwone $\cup$ Wcześnie = 111110
Czerwone $\cap$ Wcześnie = 001100

Czas potrzebny do wyznaczenia sumy, przecięcia, różnicy jest proporcjonalny do długości wektora własnego.

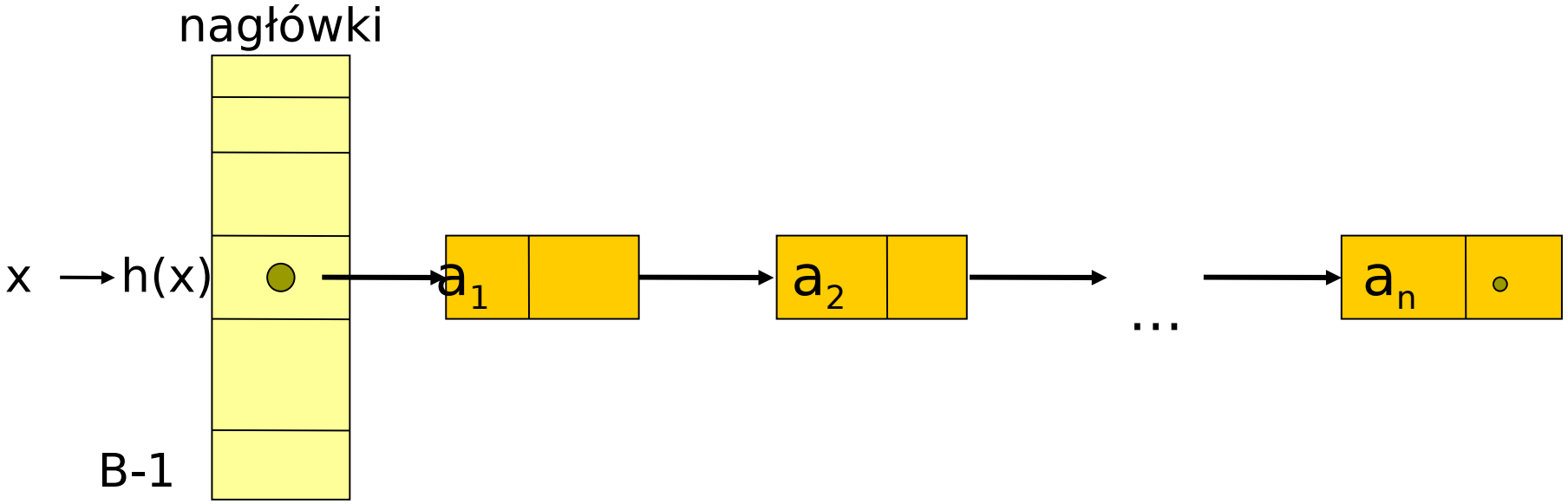
Implementacja oparta na wektorze własnym

- Czas potrzebny na wykonanie operacji sumy, przecięcia i różnicy jest $O(n)$.
- Jeśli przetwarzane zbiory są dużą częścią zbioru uniwersalnego to jest to dużo lepsze niż $O(m \log m)$ (posortowanie listy) lub $O(m^2)$ (nieposortowane listy).
- Jeśli $m << n$ to jest to oczywiście nieefektywne.
- Ta implementacja również niepraktyczna jeżeli wymaga zbyt dużego **U**.

Struktura danych tablicy mieszającej

- Reprezentacja słownika oparta o wektor własny, jeśli tylko możliwa, umożliwiłaby bezpośredni dostęp do miejsca w którym element jest reprezentowany.
- Nie możemy jednak wykorzystywać zbyt dużych zbiorów uniwersalnych ze względu na pamięć i czas inicjalizacji.
- Np. słownik dla słów złożonych z co najwyżej 10 liter. Ile możliwych kombinacji: $\mathbf{26^{10}+26^{9}+ \ldots + 26 = 10^{14}}$ możliwych słów.
  Faktyczny słownik: to tylko około $\mathbf{10^{6}}$.
  Co robimy?
- Grupujemy, każda grupa to jedna komórka z „nagłówkiem” + lista jednokierunkowa z elementami należącymi do grupy.
- **Taka strukturę nazywamy tablicą mieszająca (ang. hash table)**

Struktura danych tablicy mieszającej



- Istnieje **funkcja mieszająca** (ang. **hash function**), która jako argument pobiera element **x** i zwraca liczbę całkowitą z przedziału **0 do B-1**, gdzie **B** jest liczbą komórek w tablicy mieszającej.
- Wartością zwracaną przez **h(x)** jest komórka, w której umieszczamy element **x**.
- Ważne aby funkcja **h(x)** „mieszała”, tzn. aby komórki zawierały tę samą przybliżoną liczbę elementów.

Struktura danych tablicy mieszającej

- Każda komórka składa się z listy jednokierunkowej, w której przechowujemy wszystkie elementy zbioru wysłanego do tej komórki przez funkcje mieszającą.
- Aby odnaleźć element **x** obliczamy wartość **h(x)**, która wskazuje na numer komórki.
- Jeśli tablica mieszająca zawiera element **x**, to możemy go znaleźć przeszukując listę która znajduje się w tej komórce.
- Tablica mieszająca pozwala na wykorzystanie reprezentacji zbiorów opartej na liście (wolne przeszukiwanie), ale dzięki podzieleniu zbioru na **B** komórek, czas przeszukiwania jest **~ 1/B** potrzebnego do przeszukiwania całego zbioru.
- W szczególności może być nawet ***O*(1)**, czyli taki jak w reprezentacji zbioru opartej na wektorze własnym.

Implementacja słownika oparta na tablicy mieszającej

- Aby wstawić, usunąć lub wyszukać element **x** w słowniku zaimplementowanym przy użyciu tablicy mieszającej, musimy zrealizować proces złożony z trzech kroków.
  - wyznaczyć właściwą komórkę przy użyciu **funkcji h(x)**
  - wykorzystać tablice wskaźników do nagłówków w celu znalezienia listy elementów znajdującej się w komórce wskazanej przez **h(x)**
  - wykonać na tej liście operacje tak jakby reprezentowała cały zbiór

Podsumowanie

- Pojęcie zbioru ma zasadnicze znaczenie w informatyce.
- Najczęściej wykonywanymi operacjami na zbiorach są: **suma, przecięcie oraz różnica.**
- Do modyfikowania i upraszczania wyrażeń złożonych ze zbiorów i zdefiniowanych na nich operacji możemy wykorzystywać **prawa algebraiczne**.

Podsumowanie

- **Listy jednokierunkowe, wektory własne oraz tablice mieszające** to trzy najprostsze sposoby reprezentowania zbiorów w języku programowania.
- **Listy jednokierunkowe** oferują największą elastyczność w przypadku większości operacji na zbiorach, nie zawsze są jednak rozwiązaniem najbardziej efektywnym.
- **Wektory własne** są najszybszym rozwiązaniem dla pewnych operacji, mogą jednak być wykorzystywane tylko w sytuacjach, gdy zbiór uniwersalny jest mały.
- Często złotym środkiem są **tablice mieszające**, które zapewniają zarówno oszczędne wykorzystanie pamięci, jak i satysfakcjonujący czas wykonania operacji.

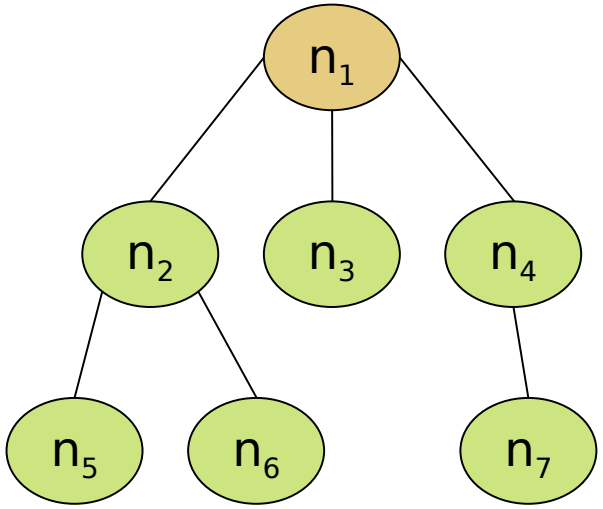
Model danych oparty na drzewach

- Istnieje wiele sytuacji w których przetwarzane informacje mają strukturę hierarchiczną lub zagnieżdżoną, jak drzewo genealogiczne lub diagram struktury organizacyjnej.

- Abstrakcje modelujące strukturę hierarchiczną nazywamy **drzewem** – jest to jeden z najbardziej podstawowych modeli danych w informatyce.

Podstawowa terminologia

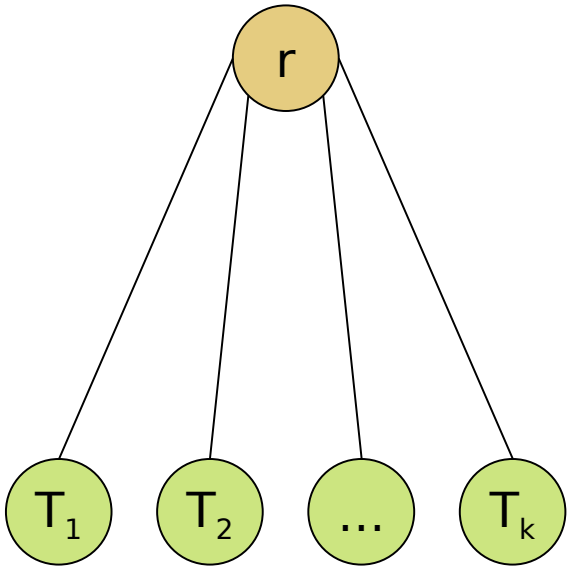
- **Drzewa** są zbiorami punktów, zwanych **węzłami** lub **wierzchołkami**, oraz połączeń, zwanych **krawędziami**.
- Krawędź łączy dwa różne węzły.
- Aby struktura zbudowana z węzłów połączonych krawędziami była drzewem musi spełniać pewne warunki:
  - W każdym drzewie wyróżniamy jeden węzeł zwany **korzeniem n_1** (ang. **root**)
  - Każdy węzeł **c** nie będący korzeniem jest połączony krawędzią z innym węzłem zwanym **rodzicem p** (ang. **parent**) węzła **c**. Węzeł **c** nazywamy także dzieckiem (ang. **child**) węzła **p**.
  - Każdy węzeł **c** nie będący korzeniem ma dokładnie jednego rodzica.
  - Każdy węzeł ma dowolną liczbę dzieci.
  - Drzewo jest **spójne** (ang. **connected**) w tym sensie że jeżeli rozpoczniemy analizę od dowolnego węzła **c** nie będącego korzeniem i przejdziemy do rodzica tego węzła, następnie do rodzica tego rodzica, itd., osiągniemy w końcu korzeń.



n_1 = rodzic n_2, n_3, n_4
n_2 = rodzic n_5, n_6
n_6 = dziecko n_2

Rekurencyjna definicja drzew

- **Podstawa:** Pojedynczy węzeł n jest drzewem. Mówimy że n jest korzeniem drzewa złożonego z jednego węzła.
- **Indukcja:** Niech r będzie nowym węzłem oraz niech T_1, T_2, ..., T_k będą drzewami zawierającymi odpowiednio korzenie c_1, c_2, ..., c_k. Załóżmy że żaden węzeł nie występuje więcej niż raz w drzewach T_1, T_2, ..., T_k, oraz że r, będący „nowym” węzłem, nie występuje w żadnym z tych drzew. Nowe drzewo T tworzymy z węzła r i drzew T_1, T_2, ..., T_k w następujący sposób:
  - węzeł r staje się korzeniem drzewa T;
  - dodajemy k krawędzi, po jednej łącząc r z każdym z węzłów c_1, c_2, ..., c_k, otrzymując w ten sposób strukturę w której każdy z tych węzłów jest dzieckiem korzenia r. Inny sposób interpretacji tego kroku to uczynienie z węzła r rodzica każdego z korzeni drzew T_1, T_2, ..., T_k.



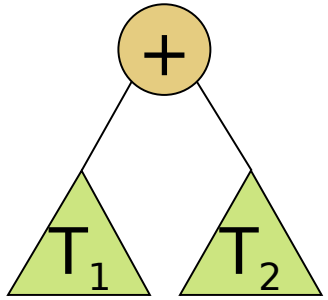
Podstawowa terminologia

- Relacje rodzic-dziecko można w naturalny sposób rozszerzyć do **relacji przodków i potomków**.
- **Ścieżką** nazywamy ciąg węzłów, takich że poprzedni jest rodzicem następnego. Węzły na ścieżce to potomkowie (przodkowie). Jeżeli ciąg węzłów ($\mathbf{n_1, n_2, \ldots, n_k}$) jest ścieżką, to **długość ścieżki** wynosi **k-1**. (długość ścieżki dla pojedynczego węzła wynosi **0**). Jeżeli ścieżka ma długość **>=1**, to węzeł $\mathbf{m_1}$ nazywamy właściwym przodkiem węzła $\mathbf{m_k}$, a węzeł $\mathbf{m_k}$ właściwym potomkiem węzła $\mathbf{m_1}$.
- W dowolnym drzewie **T**, dowolny węzeł **n** wraz z jego potomkami nazywamy **poddrzewem.**
- **Liściem** (ang. **leaf**) nazywamy węzeł drzewa który nie ma potomków.
- **Węzeł wewnętrzny** to taki węzeł który ma jednego lub większą liczbę potomków.
- **Wysokość drzewa** to długość najdłuższej ścieżki od korzenia do liścia.
- **Głębokość węzła** to długość drogi od korzenia do tego węzła.

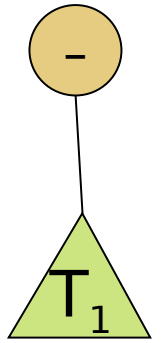
Drzewa zaetykietowane i drzewa wyrażeń.

- **Drzewo zaetykietowane** to takie w którym z każdym węzłem drzewa związana jest jakaś etykieta lub wartość. Możemy reprezentować wyrażenia matematyczne za pomocą drzew zaetykietowanych.
- Definicja drzewa zaetykietowanego dla wyrażeń arytmetycznych zawierających operandy dwuargumentowe +,-,•,/ oraz operator jednoargumentowy -.
  - **Podstawa:** Pojedynczy operand niepodzielny jest wyrażeniem.

    Reprezentujące go drzewo składa się z pojedynczego węzła, którego etykietą jest ten operand.
  - **Indukcja:** Jeśli $\mathbf{E_1}$ oraz $\mathbf{E_2}$ są wyrażeniami reprezentowanymi odpowiednio przez drzewa $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, wyrażenie $\mathbf{(E_1 + E_2)}$ reprezentowane jest przez drzewo którego korzeniem jest węzeł o etykiecie **+**. Korzeń ten ma dwoje dzieci, którego korzeniami są odpowiednio korzenie drzew $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$.

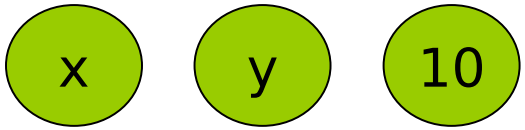


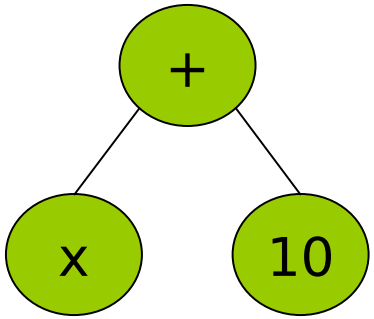
$E_1 + E_2$



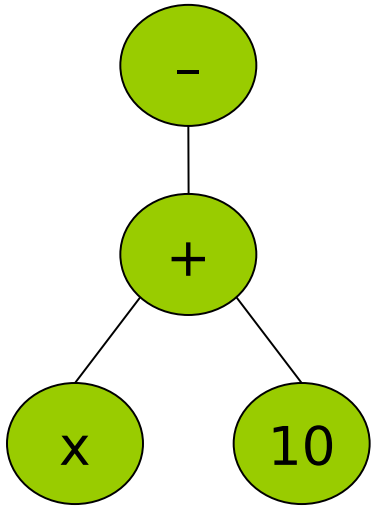
$(- E_1)$

Konstrukcja drzew wyrażeń

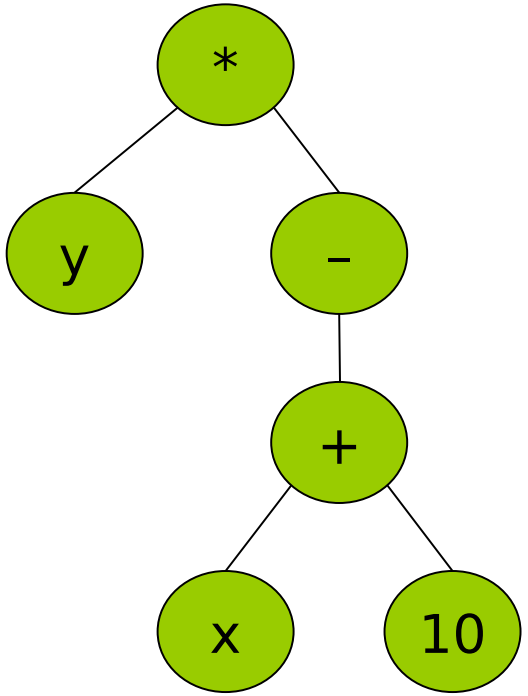




(x + 10)



(- (x + 10))



(y * - (x + 10))

Struktura danych dla drzew

- Do reprezentowania drzew możemy używać wiele różnych struktur danych. Wybór odpowiedniej struktury zależy od konkretnych operacji które planujemy wykonać na budowanych drzewach.
- **Przykład:**
  - Jeżeli jedynym planowanym działaniem jest lokalizowanie rodziców danych węzłów, zupełnie wystarczającą będzie struktura składająca się z etykiety węzła i wskaźnika do struktury reprezentującej jego rodzica.
- W ogólności, węzły drzewa możemy reprezentować za pomocą struktur, których pola łączą węzły w drzewa w sposób podobny do łączenia za pomocą wskaźnika do struktury korzenia.

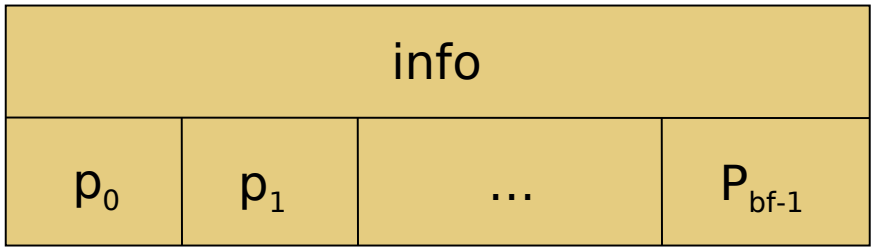
Struktura danych dla drzew

- Kiedy mówimy o **reprezentowaniu drzew**, w pierwszej kolejności mamy na myśli sposób **reprezentowania węzłów**.
- Różnica miedzy reprezentacjami dotyczy miejsca w pamięci komputera gdzie przechowywana jest struktura zawierająca węzły.
- W języku **C** możemy stworzyć **przestrzeń dla struktur reprezentujących wierzchołki** za pomocą funkcji **malloc** ze standartowej biblioteki **stdhlib.h**, co powoduje, że do umieszczonych w pamięci węzłów mamy dostęp tylko za pomocą wskaźników.
- Rozwiązaniem alternatywnym jest **stworzenie tablicy struktur** i wykorzystanie jej elementów do reprezentowania węzłów. Możemy uzyskać dostęp do węzłów nie wykorzystując ścieżek w drzewie.
  - Wadą jest z góry określony rozmiar tablicy (musi istnieć ograniczenie maksymalnego rozmiaru drzewa).

Tablica wskaźników jako reprezentacja drzewa

- Jednym z najprostszych sposobów reprezentowania drzewa jest wykorzystanie dla każdego węzła struktury składającej się z pola lub pól reprezentujących etykietę oraz tablicy wskaźników do dzieci tego węzła.

```
typedef struct NODE *pNODE
struct NODE{
    int info;
    pNODE children[BF];
};
```



- **Info** reprezentuje **etykietę węzła**.
- Stała **bf** jest **rozmiarem tablicy wskaźników.** Reprezentuje maksymalną liczbę dzieci dowolnego węzła, czyli **czynnik rozgałęzienia** (ang. **branching factor**).
- **i**-ty element tablicy reprezentującej węzeł zawiera wskaźnik do **i**-tego dziecka tego węzła.
- Brakujące połączenia możemy reprezentować za pomocą wskaźnika pustego **NULL**.

Reprezentacje drzewa

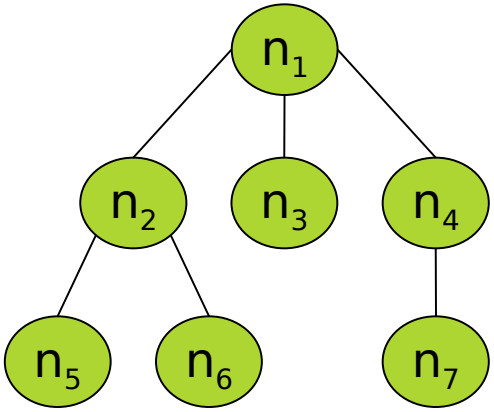
- Wykorzystujemy **listę jednokierunkową** reprezentującą dzieci węzła. Przestrzeń zajmowana przez listę jest dla węzła proporcjonalna do liczby jego dzieci.
- Znaczącą wadą tego rozwiązania jest efektywność czasowa – uzyskanie dostępu do **i**-tego dziecka wymaga czasu ***O*(i),** ponieważ musimy przejść przez całą listę o długości **i-1**, by dostać się do **i**-tego węzła.
- Dla porównania, jeżeli zastosujemy tablicę wskaźników do dzieci, do **i**-tego dziecka dostajemy się w czasie ***O*(1),** niezależnie od wartości **i.**

Reprezentacje drzewa

- W reprezentacji drzew zwanej **skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** (ang. left-most-child-right-sibling), w każdym węźle umieszczamy jedynie wskaźniki do skrajnie lewego dziecka; węzeł nie zawiera wskaźników do żadnego ze swoich pozostałych dzieci.
- Aby odnaleźć drugi i wszystkie kolejne dzieci węzła **n**, tworzymy listę jednokierunkowa tych dzieci w której każde dziecko **c** wskazuje na znajdujące się bezpośrednio po jego prawej stronie dziecko węzła **n**.
- Wskazany węzeł nazywamy **prawym elementem siostrzanym** węzła **c**.

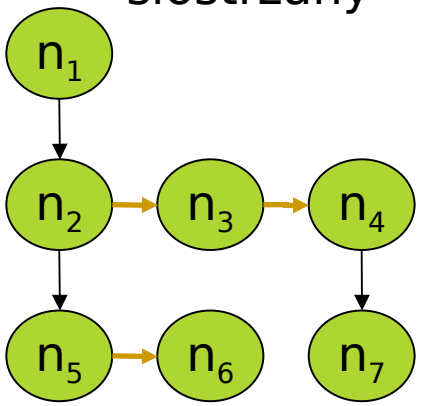
Reprezentacje drzewa

Drzewo złożone z 7 węzłów



info – etykieta
leftmostChild – informacja o węźle
rightSibling – część listy jednokierunkowej dzieci rodzica tego węzła

Reprezentacja skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany



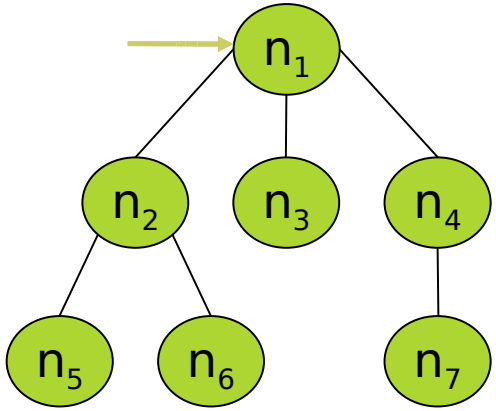

```
typedef struct NODE *pNODE;
struct NODE{
        int info;
        pNODE leftmostChild, rightSibling;
};
```

Reprezentacje drzewa

- **Reprezentacja oparta na tablicy wskaźników** umożliwia nam dostęp do **i-tego dziecka** dowolnego węzła w czasie ***O*(1)**. Taka reprezentacja wiąże się jednak ze znacznym marnotrawstwem przestrzeni pamięciowej, jeśli tylko kilka węzłów ma wiele dzieci. W takim wypadku większość wskaźników w tablicy **children** będzie równa **NULL**.
- **Reprezentacja skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** wymaga mniejszej przestrzeni pamięciowej. Nie wymaga również istnienia maksymalnego czynnika rozgałęzienie węzłów. Możemy reprezentować węzły z dowolna wartością tego czynnika, nie modyfikując jednocześnie struktury danych.

Rekurencja w drzewach

- Użyteczność drzew wynika z liczby możliwych operacji rekurencyjnych, które możemy na nich wykonać w naturalny i jasny sposób (chcemy drzewa przeglądać).
- Prosta rekurencja zwraca etykiety węzłów w **porządku wzdłużnym** (ang. **pre-order listing**), czyli: korzeń, lewe poddrzewo, prawe poddrzewo.
- Inną powszechnie stosowaną metodą do przeglądania węzłów drzewa jest tzw. **przeszukiwanie wsteczne** (ang**. post-order listing**), czyli lewe poddrzewo, prawe poddrzewo, korzeń.



Drzewa binarne

- W drzewie binarnym węzeł może mieć co najwyżej dwoje bezpośrednich potomków.
- **Rekurencyjna definicja** drzewa binarnego:
- **Podstawa:**
  - Drzewo puste jest drzewem binarnym.
- **Indukcja:**
  - Jeśli **r** jest węzłem oraz $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ są drzewami binarnymi, istnieje drzewo binarne z korzeniem **r**, lewym poddrzewem $\mathbf{T_1}$ i prawym poddrzewem $\mathbf{T_2}$. Korzeń drzewa $\mathbf{T_1}$ jest lewym dzieckiem węzła **r**, chyba że $\mathbf{T_1}$ jest drzewem pustym. Podobnie korzeń drzewa $\mathbf{T_2}$ jest prawym dzieckiem węzła **r**, chyba że $\mathbf{T_2}$ jest drzewem pustym.
  - Większość terminologii wprowadzonej przy okazji drzew stosuje się oczywiście też do drzew binarnych.
- **Różnica:** drzewa binarne wymagają rozróżnienia lewego od prawego dziecka, zwykle drzewa tego nie wymagają. Drzewa binarne to **NIE** są zwykle drzewa, w których węzły mogą mieć co najwyżej dwójkę dzieci.

Drzewa przeszukiwania binarnego

- Jest to **zaetykietowane drzewo binarne** dla którego etykiety należą do zbioru w którym możliwe jest zdefiniowanie relacji mniejszości.
- **Dla każdego węzła x spełnione są następujące własności**:
  - wszystkie węzły w lewym poddrzewie maja etykiety mniejsze od etykiety węzła **x**
  - wszystkie w prawym poddrzewie maja etykiety większe od etykiety węzła **x**.

Drzewa przeszukiwania binarnego

- **Wyszukiwanie elementu:**
  - **Podstawa:_**
    - Jeśli drzewo **T** jest puste, to na pewno nie zawiera elementu **x**.
    - Jeśli **T** nie jest puste i szukana wartość **x** znajduje się w korzeniu, drzewo zawiera **x**.
  - **Indukcja:**
    - Jeśli **T** nie jest puste, ale nie zawiera szukanego elementu **x** w korzeniu, niech **y** będzie elementem w korzeniu drzewa **T**.
    - Jeśli **x<y**, szukamy wartości **x** tylko w lewym poddrzewie korzenia **y**.
    - Jeśli **x>y**, szukamy wartości **x** tylko w prawym poddrzewie korzenia **y**.
- **Własność drzewa przeszukiwania binarnego gwarantuje, że szukanej wartości x na pewno nie ma w poddrzewie, którego nie przeszukujemy.**

Drzewa przeszukiwania binarnego

Wstawianie elementu:

Podstawa:

- Jeśli drzewo **T** jest drzewem pustym, zastępujemy **T** drzewem składającym się z pojedynczego węzła zawierającego element **x**.
- Jeśli drzewo **T** nie jest puste oraz jego korzeń zawiera element **x**, to **x** znajduje się już w drzewie i nie wykonujemy żadnych dodatkowych kroków.

Indukcja:

- Jeśli **T** nie jest puste i nie zawiera elementu **x** w swoim korzeniu, niech **y** będzie elementem w korzeniu drzewa **T**.
- Jeśli **x<y**, wstawiamy wartość **x** do lewego poddrzewa **T**.
- Jeśli **x>y**, wstawiamy wartość **x** do prawego poddrzewa **T**.

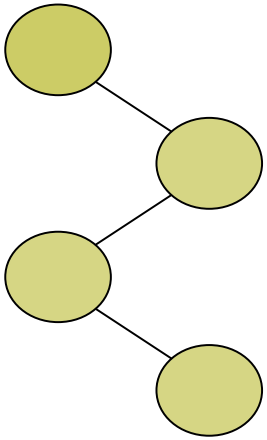
Drzewa przeszukiwania binarnego

Usuwanie elementu:

- Usuwanie elementu **x** z drzewa przeszukiwania binarnego jest zadaniem nieco bardziej skomplikowanym od znajdowania czy wstawiania danego elementu. Musimy zachować własność drzewa przeszukiwania binarnego.
- Lokalizujemy **x**, oznaczmy węzeł w którym się on znajduje poprzez **v**.
  - Jeśli drzewo nie zawiera **x** to nie robimy nic.
  - Jeżeli **v** jest liściem to go usuwamy.
  - Jeśli **v** jest wewnętrznym węzłem i węzeł ten ma tylko jedno dziecko, przypisujemy węzłowi **v** wartość **dziecka v**, a następnie usuwamy **dziecko v**. (W ten sposób że **dziecko dziecka v**, staje się **dzieckiem v**, a **rodzicem dziecka dziecka v** staje się **v**).
  - Jeżeli węzeł **v** ma dwoje dzieci, oznaczmy poprzez **y** najmniejszą wartość w prawym poddrzewie **v**. Następnie przypisujemy węzłowi **v** wartość **y**, i usuwamy **y** z prawego poddrzewa **v**.

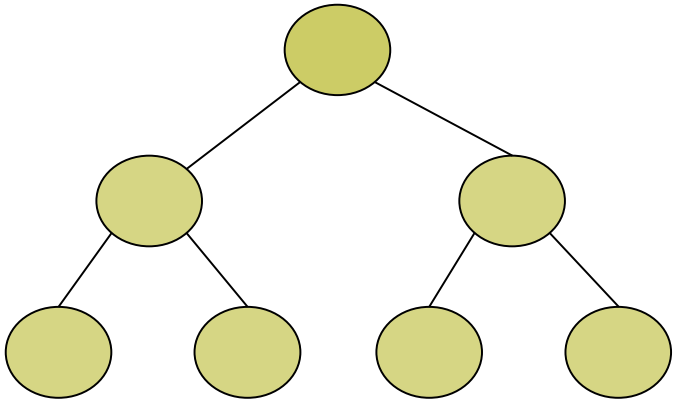
Drzewa binarne

Zdegenerowane drzewo binarne



Wysokość drzewa złożonego z k-węzłów to k-1.
Czyli h = O(k).
Operacje insert, delete, find wymagają średnio O(k).

Pełne drzewo binarne



Drzewo o wysokości h ma $k=2^{h+1}-1$ węzłów.
Czyli h = O(log k).
Operacje insert, delete, find wymagają średnio O(log k).

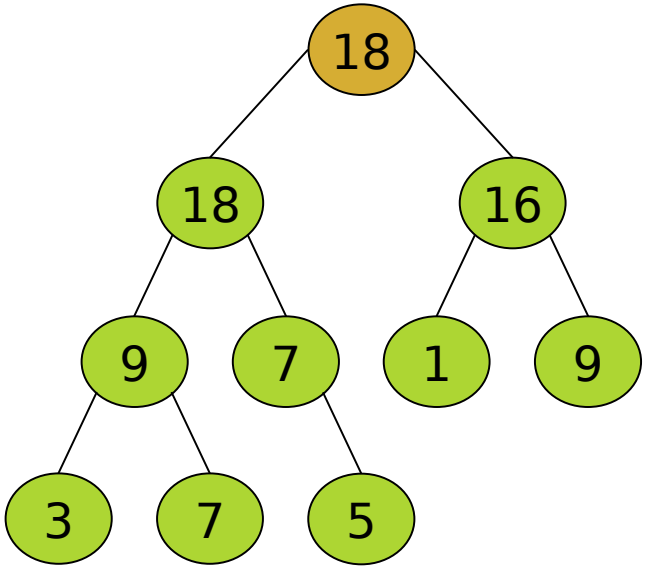
Słownik

- Często stosowaną w programach komputerowych strukturą danych jest zbiór, na którym chcemy wykonywać operacje:
  - wstawianie nowych elementów do zbioru (ang. **insert**)
  - usuwanie elementów ze zbioru (ang. **delete**)
  - wyszukiwanie jakiegoś elementu w celu sprawdzenia, czy znajduje się w danym zbiorze (ang. **find**)
- Taki zbiór będziemy nazywać **słownikiem** (niezależnie od tego jakie elementy zawiera). Drzewo przeszukiwania binarnego umożliwia stosunkowo efektywną **implementację** słownika.
- Czas wykonania każdej z operacji na słowniku reprezentowanym przez drzewo przeszukiwania binarnego złożone z **n** węzłów jest proporcjonalny do wysokości tego drzewa **h**.

Abstrakcyjny typ danych = słownik
Abstrakcyjna implementacja = drzewo przeszukiwania binarnego

Drzewa binarne częściowo uporządkowane

- Jest to **zaetykietowane drzewo binarne** o następujących własnościach:
  - Etykietami węzłów są elementy z przypisanymi priorytetami; priorytet może być wartością elementu lub przynajmniej jednego z jego komponentów.
  - Element przechowywany w węźle musi mieć co najmniej tak duży priorytet jak element znajdujący się w dzieciach tego węzła. Element znajdujący się w korzeniu dowolnego poddrzewa jest wiec największym elementem tego poddrzewa.



Kolejka priorytetowa

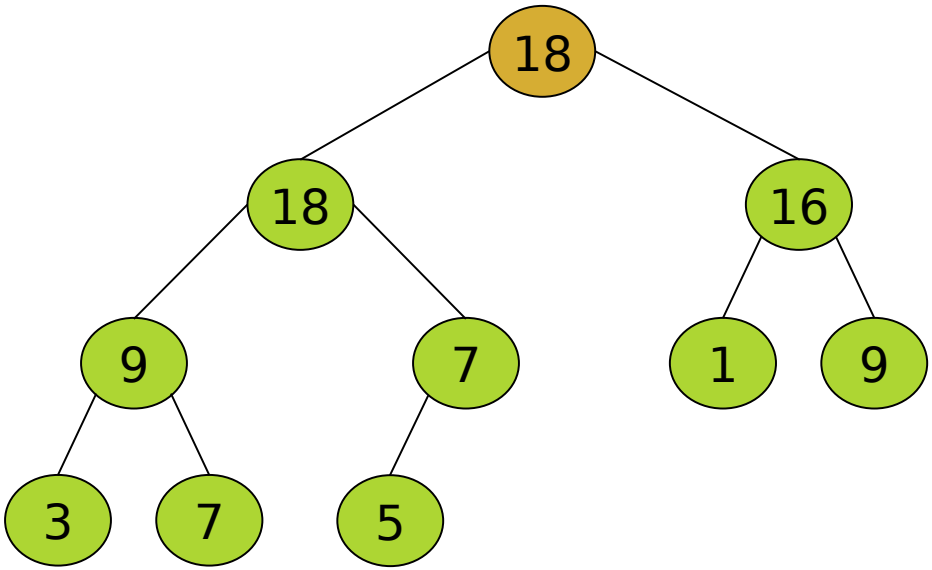
- Inny typ danych to zbiór elementów, z których każdy jest związany z określonym priorytetem. Przykładowo, elementy mogą być strukturami, zaś priorytet może być wartością jednego z pól takiej struktury. Chcemy wykonywać operacje:
  - wstawianie nowych elementów do zbioru (ang. **insert**)
  - znalezienie i usuniecie ze zbioru elementu o najwyższym priorytecie (ang. **deletemax**)
- Taki zbiór będziemy nazywać **kolejką priorytetowa** (niezależnie od tego jakie elementy zawiera).
- Drzewo binarne częściowo uporządkowane umożliwia stosunkowo efektywną **implementację** kolejki priorytetowej.
- Efektywna (używając kopca) tzn. ***O*(log n)**.

Abstrakcyjny typ danych = kolejka priorytetowa
Abstrakcyjna implementacja = zrównoważone drzewo binarne częściowo uporządkowane

Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane i kopce

- Mówimy że drzewo uporządkowane jest **zrównoważone** (ang. **balanced**), jeśli na wszystkich poziomach poza najniższym zawiera wszystkie możliwe węzły oraz liście na najniższym poziomie są ułożone od lewej strony. Spełnienie tego warunku oznacza, że jeśli drzewo składa się z **n** węzłów, to **żadna ścieżka od korzenia do któregokolwiek z tych węzłów nie jest dłuższa niż $\log_2 n$.**
- **Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane** można implementować za pomocą tablicowej struktury danych zwanej **kopcem** (ang. **heap**), która umożliwia szybką i zwięzłą implementację kolejek priorytetowych. Kopiec jest to po prostu tablica **A**, której sposób indeksowania reprezentujemy w specyficzny sposób. Zapisuje się kolejne poziomy, zawsze porządkując od lewej do prawej.

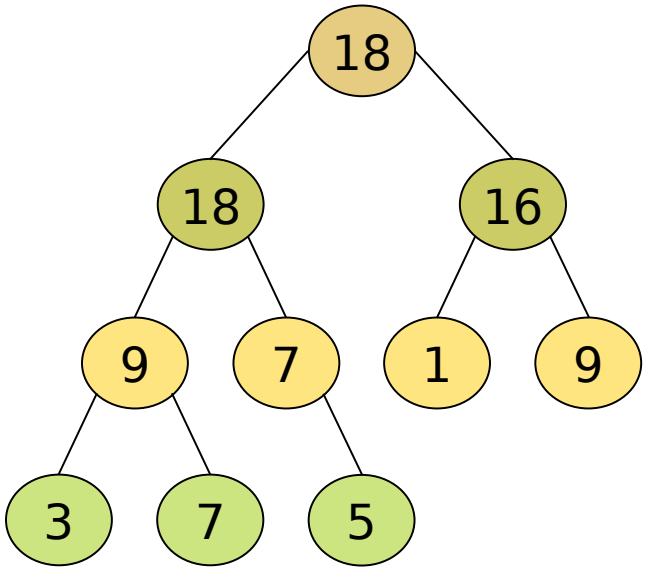
Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane i kopce



Stóg dla zrównoważonego częściowo uporządkowanego drzewa.

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
18	18	16	9	7	1	9	3	7	5

- Rozpoczynamy od korzenia **A[1]**; nie wykorzystujemy **A[0]**.
- Po korzeniu zapisujemy kolejne poziomy, w każdym poziomie węzły porządkujemy od lewej do prawej.
- Lewe dziecko korzenia znajduje się w **A[2]**; prawe dziecko korzenia umieszczamy w **A[3]**.
- W ogólności, lewe dziecko węzła zapisane w **A[i]** znajduje się w **A[2i]**, prawe dziecko tego samego węzła znajduje się w **A[2i+1]**, jeśli oczywiście te dzieci istnieją w drzewie uporządkowanym.
- Taka reprezentacja jest możliwa dzięki **własnościom drzewa zrównoważonego**.
- Z **własności drzewa częściowo uporządkowanego** wynika, że jeśli **A[i]** ma dwójkę dzieci, to **A[i]** jest co najmniej tak duże, jak **A[2i]** i **A[2i+1]**, oraz jeśli **A[i]** ma jedno dziecko, to **A[i]** nie jest mniejsze niż **A[2i]**.

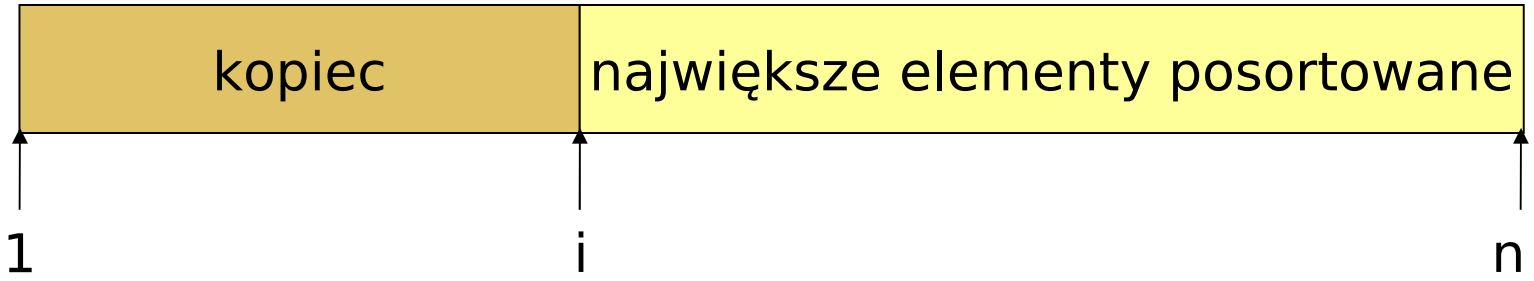


Operacje kolejki priorytetowej na kopcu

- Reprezentujemy kopiec za pomocą globalnej tablicy liczb całkowitych **A[1,...,MAX]**. Przypuśćmy, że mamy kopiec złożony z **n-1** elementów, który spełnia własność drzewa częściowo uporządkowanego.
- **Operacja insert:**
  - Dodajemy **n**-ty element w **A[n]**.
  - Własność drzewa uporządkowanego jest nadal spełniona we wszystkich elementach tablicy, poza (być może) elementem **A[n]** i jego rodzicem.
  - Jeśli element **A[n]** jest większy od elementu **A[n/2]**, czyli jego rodzica, musimy wymienić te elementy ze sobą (ta operacje nazywamy **sortowanie bąbelkowe w górę** (ang. **bubbleUp**).
  - Może teraz zaistnieć konflikt z własnością drzewa częściowo uporządkowanego pomiędzy elementem **A[n/2]** i jego rodzicem. Sprawdzamy i ewentualnie wymieniamy ich pozycje.
  - Itd.
- **Operacja deletemax:**
  - **A[1]** przypisujemy wartość **-∞** , po czym wykorzystujemy analogiczną procedurę co powyżej, czyli: **sortowanie bąbelkowe w dół** (ang. **bubbleDown**) niech **k** oznacza pozycję w tablicy liścia do którego zejdzie wartość **-∞**. **A[k]** przypiszmy wartość **A[n]**. Po czym wykonajmy procedure sortowania bąbelkowego w górę. Kopiec będzie teraz reprezentowany przez tablicę **A[1, ..., n-1]**.
  - Wykonywanie operacji **insert** i **deletemax** wymaga czasu ***O*(log n)**.

Sortowanie przez kopcowanie – sortowanie za pomocą zrównoważonych drzew częściowo uporządkowanych

- Za pomocą tego algorytmu sortujemy tablice **A[1,...n]** w dwóch etapach:
  - algorytm nadaje tablicy **A** własność drzewa częściowo uporządkowanego
  - wielokrotnie wybiera największy z pozostałych elementów z kopca aż do momentu, w którym na kopcu znajduje się tylko jeden (najmniejszy) element co oznacza że tablica jest posortowana.



- Wykonanie operacji **sortowania przez kopcowanie** wymaga czasu ***O*(nlogn)**. Dla porównania sortowanie przez wybieranie wymaga czasu $O(n^2)$.

Poziomy implementacji

- Dwa abstrakcyjne typy danych:
  słownik i kolejka priorytetowa
- Omówiliśmy dwie różne abstrakcyjne implementacje i wybraliśmy konkretne struktury danych dla każdej z tych abstrakcyjnych implementacji.

Abstrakcyjny typ danych	Abstrakcyjna implementacja	Struktura danych
Słownik	Drzewo przeszukiwania binarnego	Struktura lewe dziecko – prawe dziecko
Kolejka priorytetowa	Zrównoważone drzewo częściowo uporządkowane	Kopiec

Podsumowanie

- Ważnym modelem danych reprezentującym **informacje hierarchiczne** są **drzewa.**
- Do implementowania drzew możemy wykorzystać **wiele różnych struktur danych** (także takich) które wymagają połączenia tablic ze wskaźnikami. **Wybór struktury danych zależy od operacji wykonywanych na drzewie.**
- Dwiema najważniejszymi reprezentacjami węzłów drzewa są **skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** oraz **tree** (tablica wskaźników do dzieci).
- Drzewa nadają się doskonale do stosowania na nich algorytmów i dowodów rekurencyjnych.
- **Drzewo binarne** jest jednym z wariantów modelu drzewa, w którym każdy węzeł ma (opcjonalne) lewe i prawe dziecko.
- **Drzewo przeszukiwania binarnego** jest zaetykietowanym drzewem binarnym, które spełnia ***„własność drzewa przeszukiwania binarnego”.***

Podsumowanie

- Będący abstrakcyjnym typem danych, **słownik** jest zbiorem, na którym można wykonywać operacje **insert, delete, find**. **Efektywna implementacja słownika to drzewo przeszukiwania binarnego**.
- Innym abstrakcyjnym typem danych jest **kolejka priorytetowa**, czyli zbiór na którym możemy wykonywać operacje **insert** i **deletemax**.
- **Drzewo częściowo uporządkowane** jest zaetykietowanym drzewem binarnym spełniającym warunek, że żadna etykieta w żadnym węźle nie jest mniejsza od etykiety żadnego z jego dzieci.
- **Zrównoważone drzewo częściowo uporządkowane** (węzły całkowicie wypełniają wszystkie poziomy od korzenia do najniższego, w którym zajmowane są tylko skrajnie lewe pozycje) możemy implementować za pomocą **kopca**. Struktura ta umożliwia implementację operacji na kolejce priorytetowej wykonywanych w czasie ***O*(log n)** oraz działającego w czasie ***O*(n log n)** algorytmu sortującego, zwanego sortowaniem przez kopcowanie.