Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 3:

Złożoność obliczeniowa algorytmów
Elementy kombinatoryki

Złożoność obliczeniowa i asymptotyczna

- Złożoność **obliczeniowa**:
  - Jest to miara służąca do porównywania efektywności algorytmów.
  - Mamy dwa kryteria efektywności:
    - **Czas**,
    - **Pamięć**
- Do oceny efektywności stosujemy jednostki logiczne wyrażające związek miedzy **rozmiarem danych *N*** (wielkość pliku lub tablicy) a **ilością czasu *T*** potrzebną na ich przetworzenie.
- Funkcja wyrażająca zależność miedzy ***N*** a ***T*** jest zwykle bardzo skomplikowana, a jej obliczenie ma znaczenie jedynie w odniesieniu do dużych rozmiarów danych
- Przybliżona miara efektywności to tzw. złożoność **asymptotyczna**.

Szybkość wzrostu poszczególnych składników funkcji

Funkcja: $f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$

n	f(n)	n^2	100•n	$\log_{10} n$	1000
1	1 101	0.1%	9%	0.0%	91%
10	2 101	4.8%	48%	0.05%	48%
100	21 002	48%	48%	0.001%	4.8%
10^3	1 101 003	91%	9%	0.0003%	0.09%
10^4		99%	1%	0.0%	0.001%
10^5		99.9%	0.1%	0.0%	0.0000%

- **n** – rozmiar danych, **f(n)** – ilość wykonywanych operacji
- Dla dużych wartości **n**, funkcja rośnie jak **n^2**, pozostałe składniki mogą być zaniedbane.

Notacja „wielkie *O* ”
(wprowadzona przez P. Bachmanna w 1894r)

Definicja:
f(n) jest *O*(g(n)), jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że:

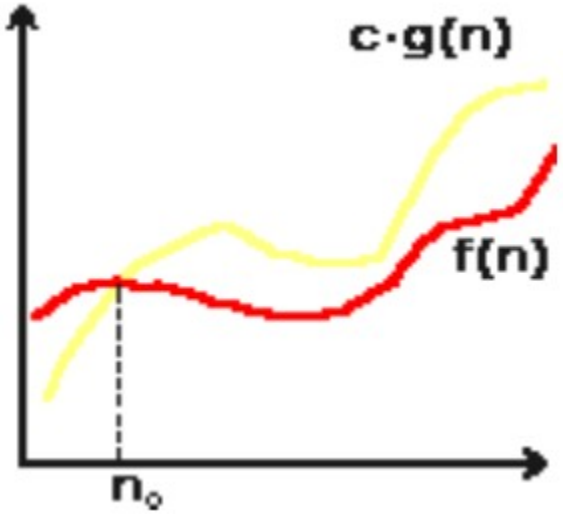
$f(n) < c \bullet g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

Przykład:

$f(n) = n^2 + 100n + \log_{10} n + 1000$
możemy przybliżyć jako:

$f(n) \approx n^2 + 100n + O(\log_{10} n)$
albo jako:

$f(n) \approx O(n^2)$



Notacja **„wielkie *O* ”** ma kilka pozytywnych własności które możemy wykorzystać przy szacowaniu efektywności algorytmów.

Własności notacji „wielkie *O*”

Własność 1 (przechodniość):
Jeśli f(n) jest *O*(g(n)) i g(n) jest *O*(h(n)), to f(n) jest *O*(h(n))

Własność 2:
Jeśli f(n) jest *O*(h(n)) i g(n) jest *O*(h(n)), to f(n)+g(n) jest *O*(h(n))

Własność 3:
Funkcja an^k jest *O*(n^k)

Własność 4:
Funkcja n^k jest *O*(n^{k+j}) dla dowolnego dodatniego j

Z tych wszystkich własności wynika, że dowolny wielomian jest **„wielkie *O*”** dla **n** podniesionego do najwyższej w nim potęgi, czyli :
$f(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0$ jest ***O(n^k)***

(jest też oczywiście ***O(n^{k+j})*** dla dowolnego dodatniego **j**)

Własności notacji „wielkie *O*”

Własność 5:
Jeśli f(n) = c g(n), to f(n) jest $O(g(n))$

Własność 6:
Funkcja $\log_a n$ jest $O(\log_b n)$ dla dowolnych a i b większych niż 1

Własność 7:
$\log_a n$ jest $O(\log_2 n)$ dla dowolnego dodatniego a

- Jedną z najważniejszych funkcji przy ocenianiu efektywności algorytmów jest **funkcja logarytmiczna**.
- Jeżeli można wykazać że złożoność algorytmu jest rzędu logarytmicznego, algorytm można traktować jako bardzo dobry.
- Istnieje wiele funkcji lepszych w tym sensie niż logarytmiczna, jednak zaledwie kilka spośród nich, jak $O(\log_2 \log_2 n)$ czy $O(1)$ ma praktyczne znaczenie.

Notacja Ω i Θ

- Notacja **„wielkie O”** odnosi się do górnych ograniczeń funkcji.
- Istnieje symetryczna definicja dotycząca dolnych ograniczeń:

Definicja

f(n) jest $\Omega(g(n))$, jeśli istnieją liczby dodatnie c i n_0 takie że, $f(n) \geq c\, g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

Równoważność

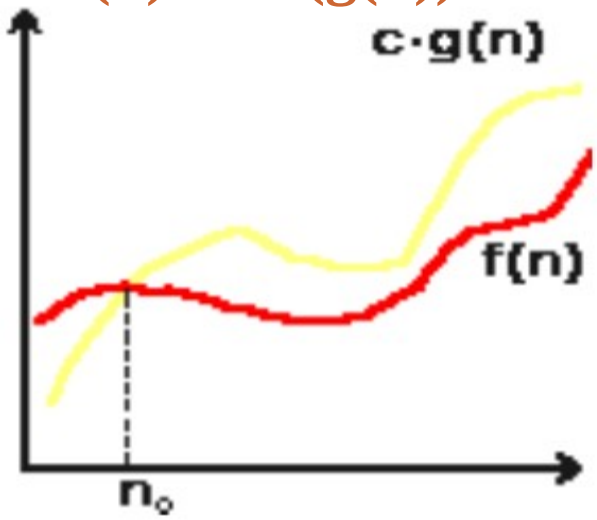
f(n) jest $\Omega(g(n))$ wtedy i tylko wtedy, gdy g(n) jest $O(f(n))$

Definicja

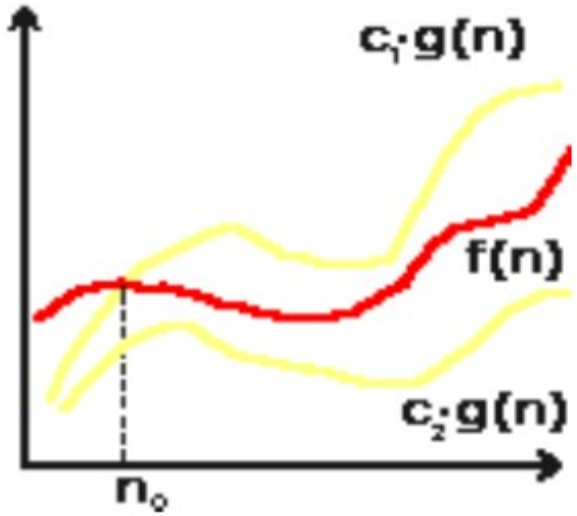
f(n) jest $\Theta(g(n))$, jeśli istnieją takie liczby dodatnie c_1, c_2 i n_0 takie że, $c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ dla wszystkich $n \geq n_0$.

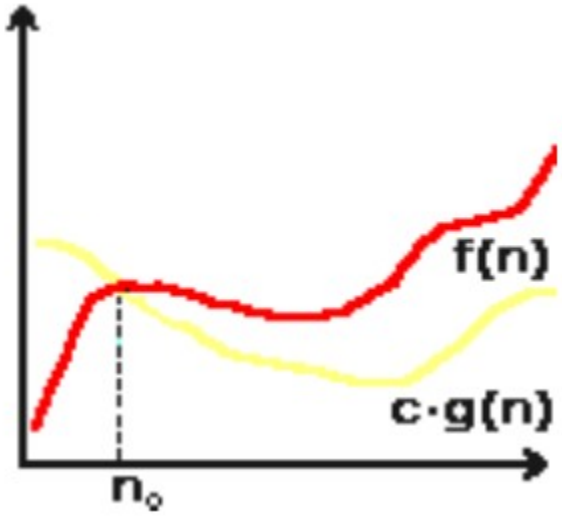
Notacja O, Ω i Θ

$f(n) = O(g(n))$



$f(n) = \Theta(g(n))$





$f(n) = \Omega(g(n))$

Algorytm Hornera

- Załóżmy że mamy policzyć wartość wielomianu postaci:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

dla danych liczb **a_0, a_1, ..., a_n**, w danym punkcie **x_0**.

  - Algorytm polegający na **bezpośrednim liczeniu** ze wzoru wymaga **n dodawań** i **(n-2) potęgowań** lub **(2n-1) mnożeń** co w wyniku daje niedokładności (błąd względny i bezwględny).
  - Warto poszukać innego rozwiazania.

Algorytm Hornera

- Przedstawiamy wielomian w postaci:

$$f(x) = (\ldots((a_0 x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n$$

to otrzymujemy następującą metodę obliczanie wielomianu:

$$b_0 = a_0$$
$$b_1 = b_0 x_0 + a_1$$
$$b_2 = b_1 x_0 + a_2$$

$$b_n = b_{n-1} x_0 + a_n$$

gdzie b_i oznacza wartość **i-tego nawiasu** dla x równego x_0, a b_n szukaną wartość wielomianu

Algorytm Hornera

- Otrzymana metoda to tzw. **Algorytm Hornera** obliczania wartości wielomianu. Algorytm ten jest numerycznie poprawny i jest jedynym algorytmem który minimalizuje liczbę dodawań i mnożeń przy obliczaniu wartości wielomianu wg. podanej postaci.

Możliwe problemy

- Celem wprowadzonych wcześniej sposobów zapisu (notacji) jest porównanie efektywności rozmaitych algorytmów zaprojektowanych do rozwiązania tego samego problemu.
- Jeżeli będziemy stosować tylko notacje „wielkie O” do reprezentowania złożoności algorytmów, to niektóre z nich możemy zdyskwalifikować zbyt pochopnie.

- **Przykład:**
  - Załóżmy, że mamy dwa algorytmy rozwiązujące pewien problem, wykonywana przez nie liczba operacji to odpowiednio $10^8 n$ i $10n^2$. Pierwsza funkcja jest $O(n)$, druga $O(n^2)$.
  - Opierając się na informacji dostarczonej przez notacje „wielkie *O*” odrzucilibyśmy drugi algorytm ponieważ funkcja kosztu rośnie zbyt szybko.
  - To prawda … ale dopiero dla odpowiednio dużych n, ponieważ dla $n<10^7$ drugi algorytm wykonuje mniej operacji niż pierwszy.
  - Istotna jest więc też stała (10^8), która w tym przypadku jest zbyt duża aby notacja była znacząca.

Przykłady rzędów złożoności

- Algorytmy można klasyfikować ze względu na złożoność czasową lub pamięciową. W związku z tym wyróżniamy wiele klas algorytmów.
  - **Algorytm stały:** czas wykonania pozostaje taki sam niezależnie od ilości przetwarzanych elementów.
  - **Algorytm kwadratowy:** czas wykonania wynosi $O(n^2)$.
  - **Algorytm logarytmiczny:** czas wykonania wynosi $O(\log n)$.
  - itd …
- **Analiza złożoności algorytmów jest niezmiernie istotna** i nie można jej lekceważyć argumentując potencjalną szybkością obliczeń komputera. Nie sposób jej przecenić szczególnie zastanawiając się nad doborem struktury danych.

Najczestsze złożonosci

log(n)- złożoność logarytmiczna

n - złożoność liniowa

nlog(n) - złożoność liniowo-logarytmiczna

n^2 - złożoność kwadratowa

n^k - złożoność wielomianowa

2^n - złożoność wykładnicza

n! - złożoność wykładnicza, ponieważ $n! > 2^n$ już od n=4

Klasy algorytmów i ich czasy wykonania na komputerze działającym z szybkością 1 instrukcja/µs

klasa	złożoność	liczba operacji i czas wykonania			
	n	**10**		**10^3**	
stały	$O(1)$	1	1µs	1	1 µs
logarytmiczny	$O(\log n)$	3.32	3µs	9.97	10 µs
liniowy	$O(n)$	10	10µs	10^3	1ms
kwadratowy	$O(n^2)$	10^2	100µs	10^6	1s
wykładniczy	$O(2^n)$	1024	10ms	10^{301}	>> 10^{16} lat

Funkcje niewspółmierne

- Bardzo wygodna jest możliwość porównywania dowolnych funkcji **f(n)** i **g(n)** za pomocą notacji **„duże *O*”**
  - albo **f(n) = *O*(g(n))**
  - albo **g(n) = *O*(f(n))**

  Albo jedno i drugie czyli **f(n) = Θ(g(n))**.

- Istnieją **pary funkcji niewspółmiernych** (ang. *incommensurate*), z których żadne nie jest „dużym *O*” dla drugiej.

Funkcje niewspółmierne

Przykład:

Rozważmy funkcję **f(n)=n** dla nieparzystych **n** oraz **f(n)=n²** dla parzystych **n**.
Oznacza to, że f(1)=1, f(2)=4, f(3)=3, f(4)=16, f(5)=5 itd…
Podobnie, niech **g(n)=n²** dla nieparzystych **n** oraz **g(n)=n** dla parzystych **n**.
W takim przypadku, funkcja **f(n)** nie może być ***O*(g(n))** ze względu na parzyste argumenty **n**, analogicznie **g(n)** nie może być ***O*(f(n))** ze względu na nieparzyste elementy **n**.
Obie funkcje mogą być ograniczone jako ***O*(n²)**.

Analiza czasu działania programu

- Mając do dyspozycji definicję **„duże *O*”** oraz własności (1)-(7) będziemy mogli, wg. kilku prostych zasad, skutecznie analizować czasy działania większości programów spotykanych w praktyce.
- Efektywność algorytmów ocenia się przez szacowanie ilości czasu i pamięci potrzebnych do wykonania zadania, dla którego algorytm został zaprojektowany.
- Najczęściej jesteśmy zainteresowani ***złożonością czasową***, mierzoną zazwyczaj liczbą przypisań i porównań realizowanych podczas wykonywania programu.
- Bardzo często interesuje nas tylko ***złożoność asymptotyczna***, czyli czas działania dla dużej ilości analizowanych zmiennych.

Czas działania instrukcji prostych

- Przyjmujemy zasadę że czas działania pewnych prosty operacji na danych wynosi **O(1)**, czyli jest niezależny od rozmiaru danych wejściowych.
  - **Operacje arytmetyczne**, np. (+), (-)
  - **Operacje logiczne** (&&)
  - **Operacje porównania** (<=)
  - **Operacje dostępu** do struktur danych, np. indeksowanie tablic (A[i])
  - **Proste przypisania**, np. kopiowanie wartości do zmiennej.
  - Wywołania **funkcji bibliotecznych**, np. **scanf** lub **printf**
- Każdą z tych operacji można wykonać za pomocą pewnej (niewielkiej) liczby rozkazów maszynowych.

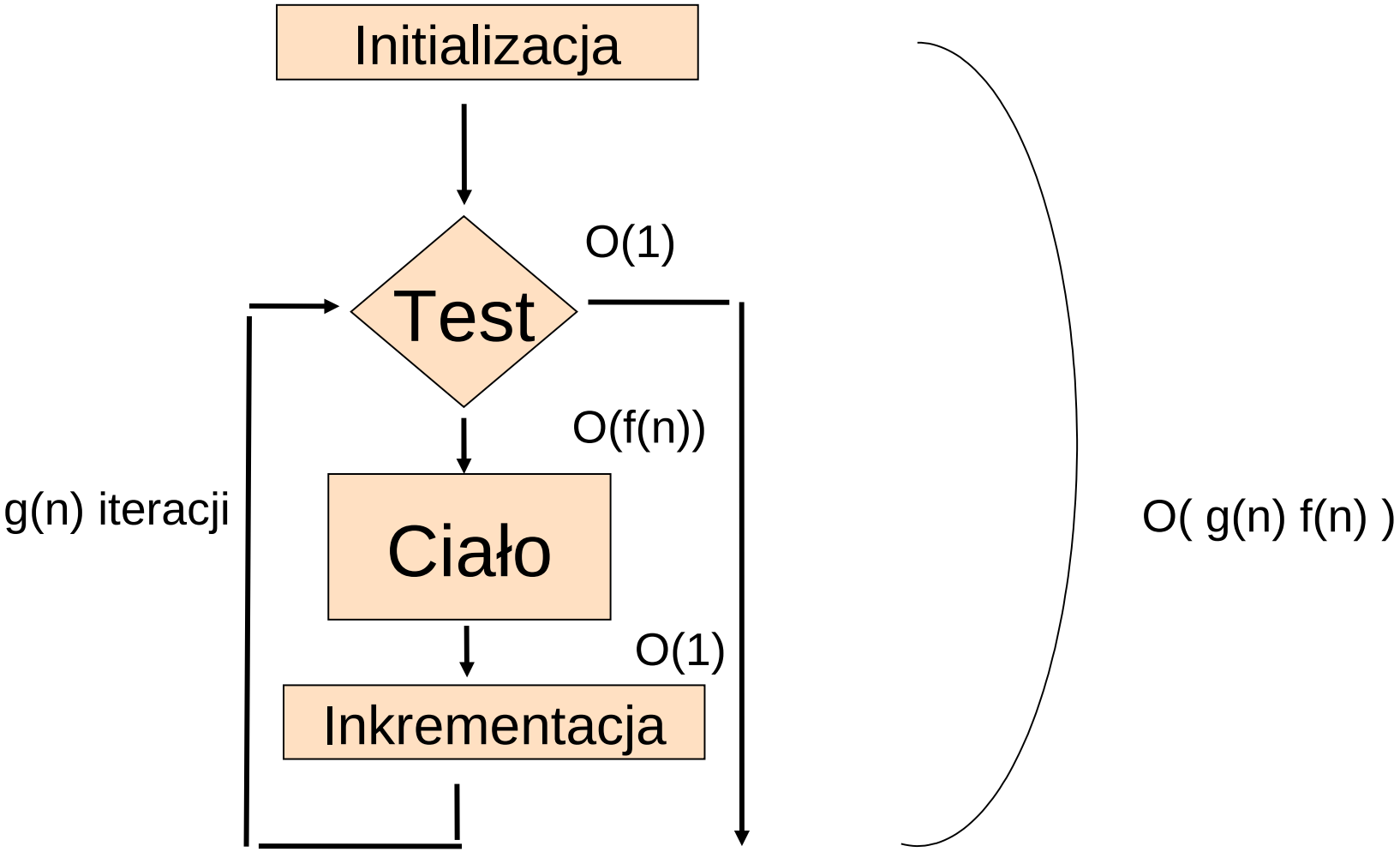
Czas działania pętli „for”

- **Przykład 1:** Prosta pętla

```
for (i=sum=0; i<n; i++) sum+=a[i];
```

- Powyższa **pętla powtarza się n razy**, podczas każdego jej przebiegu realizuje **dwa przypisania**:
  - aktualizujące zmienną „sum”
  - zmianę wartości zmiennej „i”
- Mamy zatem **2n** przypisań podczas całego wykonania pętli.
- Złożoność asymptotyczna algorytmu **jest *O*(n)**.

Czas działania instrukcji „for”



Czas działania pętli „for”

- **Przykład 2:** Pętla zagnieżdżona

```
for  (i=0; i<n; i++)     {
 for (j=1, sum=a[0]; j<=i; j++)
       sum+=a[j];  }
```

- Na samym początku zmiennej „i” nadawana jest wartość początkowa.
- **Pętla zewnętrzna powtarza się n razy**, a w każdej jej iteracji wykonuje się wewnętrzna pętla oraz instrukcja przypisania wartości zmiennym „i”, „ j”, „sum”.
- **Pętla wewnętrzna wykonuje się „i” razy** dla każdego $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, a na każdą iteracje przypadają dwa przypisania: jedno dla „sum”, jedno dla „j”.
- Mamy zatem: $1+3n+2(1+2+\ldots+n-1) = 1+3n+n(n-1) = O(n)+O(n^2) = O(n^2)$ przypisań wykonywanych w całym programie.
- **Złożoność asymptotyczna algorytmu jest $O(n^2)$.** Pętle zagnieżdżone mają zwykle większą złożoność niż pojedyncze, jednak nie musi tak być zawsze.

Czas działania pętli „for”

- Przykład 3: Znajdź najdłuższą podtablicę zawierającą liczby uporządkowane rosnąco.

```
for (i=0; len=1; i<n-1; i++) {
  for (i1=i2=k=i; k<n-1 && a[k]<a[k+1]; k++,i2++);
        if(len < i2-i1+1)  len=i2-i1+1; }
```

- Jeśli liczby w tablicy są uporządkowane malejąco, to pętla zewnętrzna wykonuje się **n-1 razy**, a w każdym jej przebiegu pętla wewnętrzna wykona się tylko **1-raz**. **Złożoność asymptotyczna algorytmu jest więc *O*(n).**
- Jeśli liczby w tablicy są uporządkowane rosnąco, to pętla zewnętrzna wykonuje się **n-1 razy**, a w każdym jej przebiegu pętla wewnętrzna wykona się **i-razy** dla $i \in \{1,...,n-1\}$. **Złożoność asymptotyczna algorytmu jest więc $O(n^2)$.**

Czas działania pętli „for”

- Z reguły dane nie są uporządkowane i ocena złożoności algorytmu jest rzeczą niełatwą ale bardzo istotną.
- Staramy się wyznaczy złożoność
  - w **„przypadku optymistycznym”**,
  - w **„przypadku pesymistycznym”**
  - oraz w **„przypadku średnim”**.
- Często posługujemy się przybliżeniami opartymi o notacje „wielkie O, Ω i Θ”.

Czas działania instrukcji warunkowych

Instrukcje warunkową **if-else** zapisuje się w postaci:

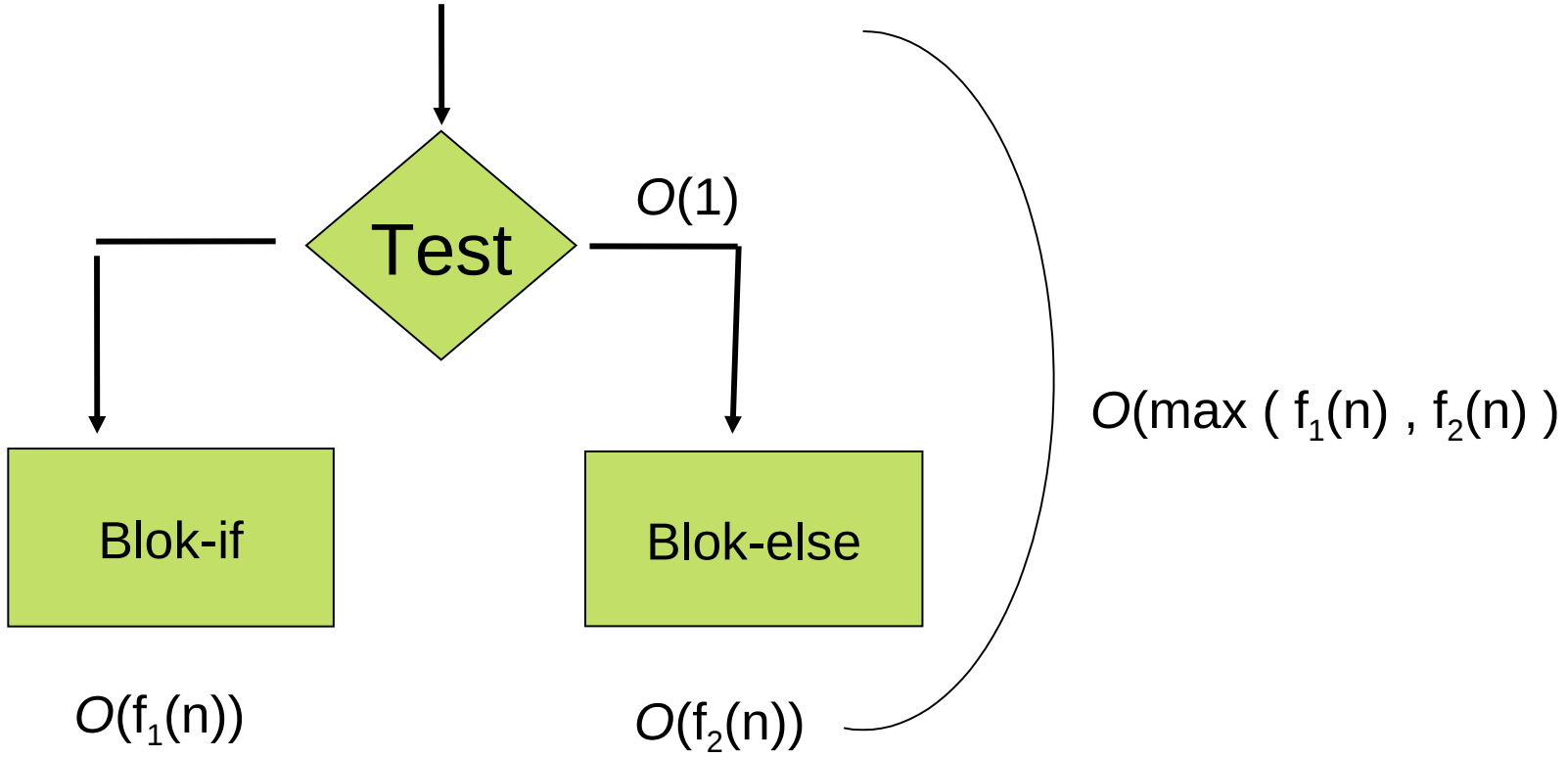
```
if (<warunek>)
    <blok-if>
else
    <blok-else>
```

Gdzie

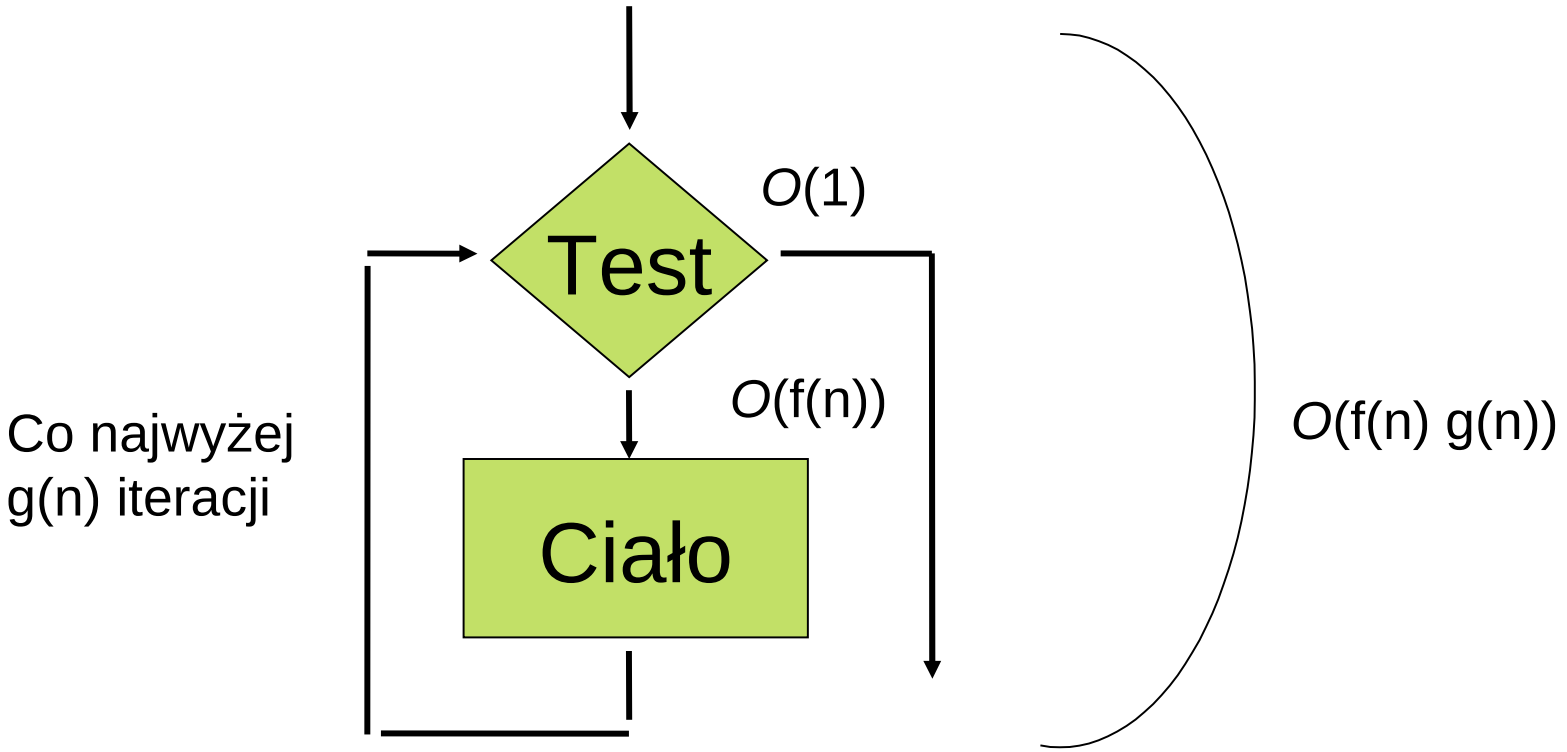
- **<warunek>** jest wyrażeniem które trzeba obliczyć. Warunek niezależnie od tego jak skomplikowany wymaga wykonania stałej liczby operacji (więc czasu ***O*(1)**) chyba ze zawiera wywołanie funkcji, .
- **<blok-if>** zawiera instrukcje wykonywane tylko w przypadku gdy warunek jest prawdziwy, czas działania **f(n)**.
- **<blok-else>** wykonywany jest tylko w przypadku gdy warunek jest fałszywy, czas działania **g(n)**.

Czas działania instrukcji warunkowej należy zapisać jako ***O*(max (f(n), g(n))**

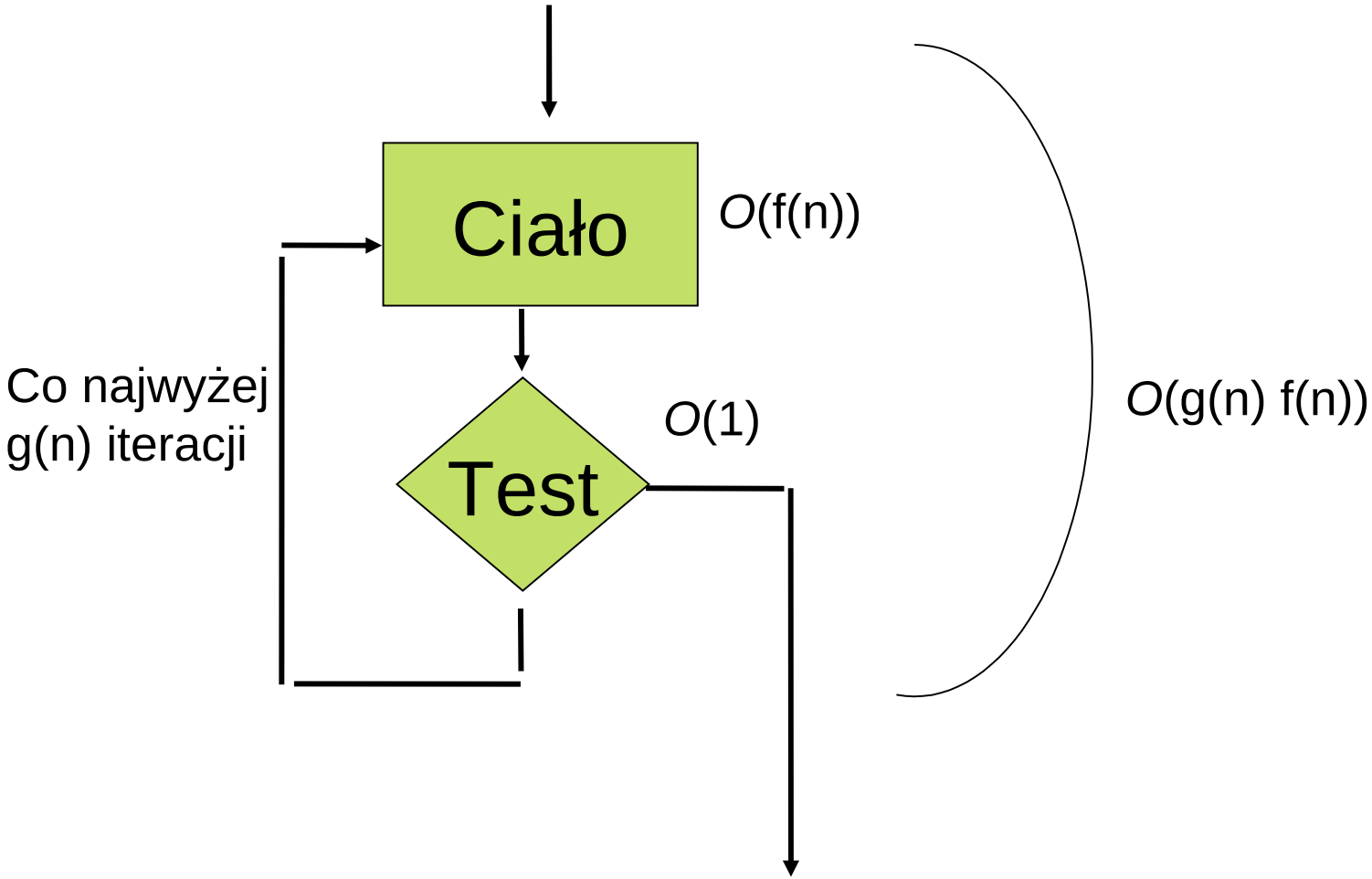
Czas działania instrukcji „if”



Czas działania instrukcji „while”



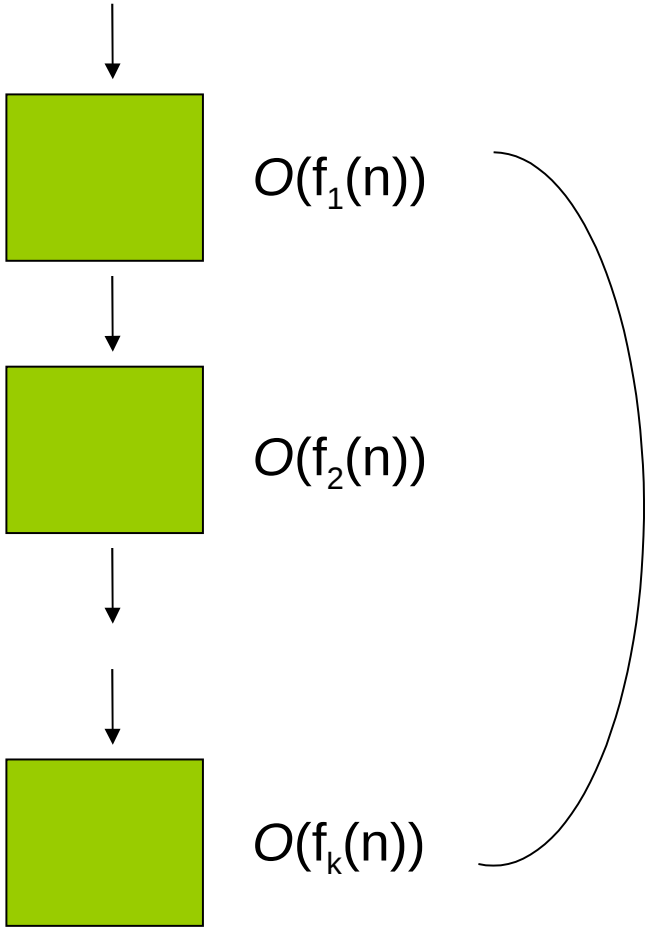
Czas działania instrukcji „do-while”



Czas działania bloków

- Sekwencja instrukcji przypisań, odczytów i zapisów, z których każda wymaga czasu ***O*(1)**, potrzebuje do swojego wykonania łącznego czasu ***O*(1)**.
- Pojawiają się również instrukcje złożone, jak instrukcje warunkowe i pętle.
  - **Sekwencję** prostych i złożonych **instrukcji** nazywa się **blokiem**.
- Czas działania bloku obliczymy sumując górne ograniczenia czasów wykonania poszczególnych instrukcji, które należą do tego bloku.

Czas działania bloku instrukcji

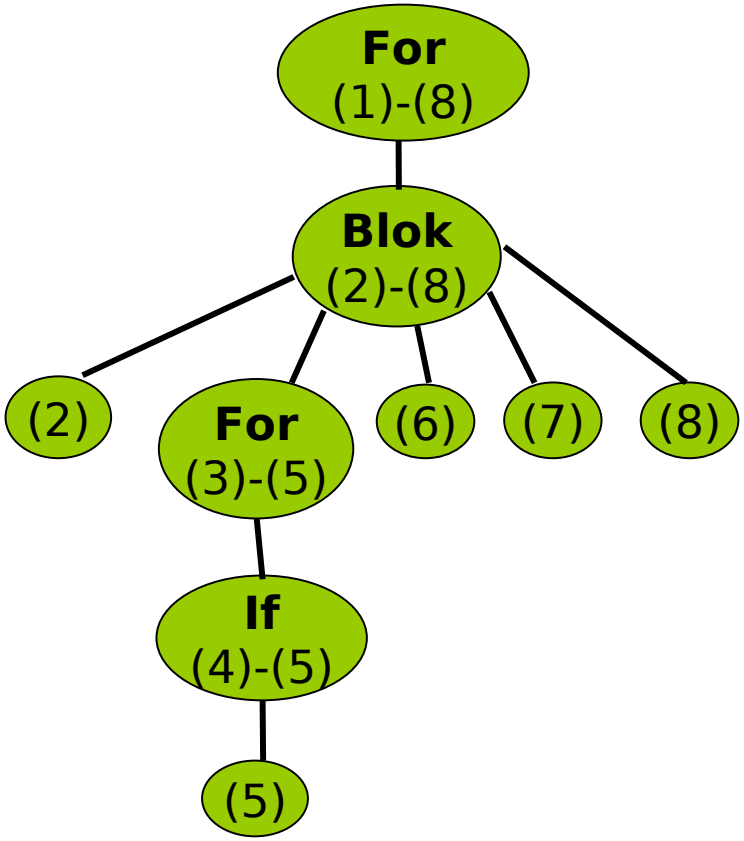


$O(f_1(n)+f_2(n)+...+ f_k(n))$
lub
$O($ największa $f_i(n)$ $)$

Przykład: „sortowanie przez wybieranie”

```
(1) for (i=0; i< n-1; i++ ) {
(2)   small = i;
(3)   for (j=i+1; j<n; j++ )
(4)         if( A[j] < A[small] )
(5)         small =j;
(6)   temp = A[small];
(7)   A[small] = A[i];
(8)   A[i] = temp; }
```

Drzewo reprezentujące grupowanie instrukcji

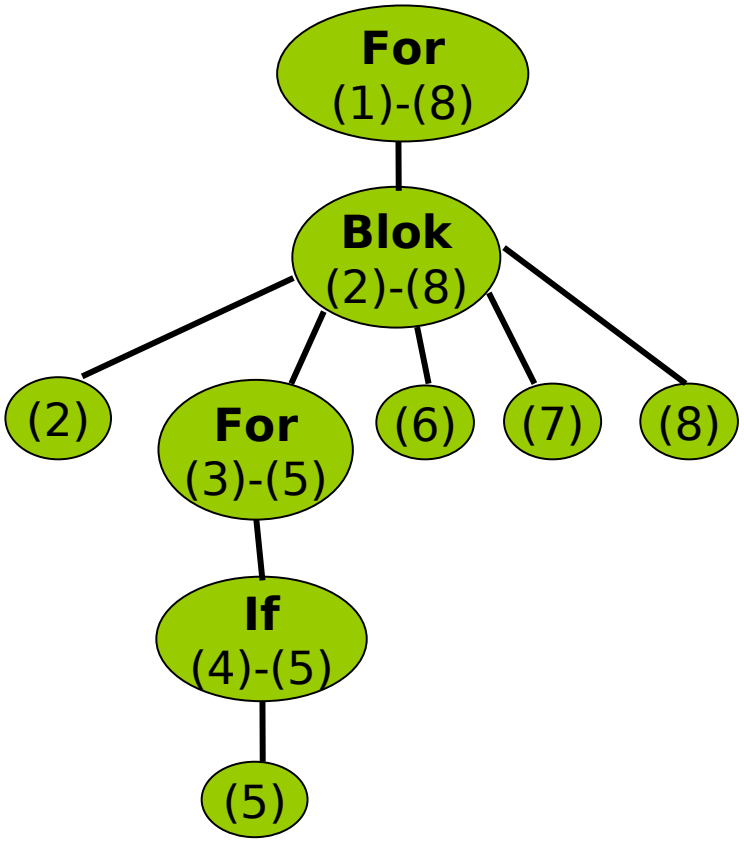


Przykład: „sortowanie przez wybieranie”

- Rozpoczynamy analizę „od liścia do korzenia”
  - Każda instrukcja przypisania (liście) wymaga czasu ***O*(1)**
  - Instrukcja „if” (4-5) wymaga czasu ***O*(1)**
  - Instrukcja ‘for” (3)-(5) wymaga czasu ***O*(n-i-1)** oraz i<n
  - Instrukcja „for” (2)-(8) może być dalej ograniczona przez ***O*(n-1)**
  - Instrukcja „for” (1)-(8) może być ograniczona przez ***O*(n (n-1))**

Odrzucając wyraz mniej znaczący otrzymujemy oszacowanie czasu działania jako **O(n²)**.

Drzewo reprezentujące grupowanie instrukcji

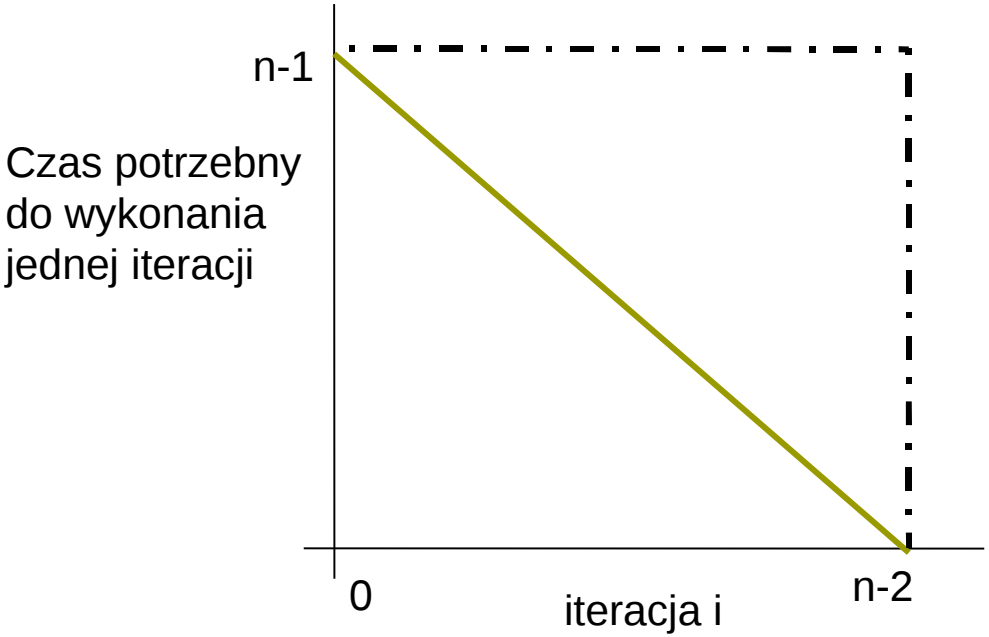


Proste lub precyzyjne ograniczenie

- Dotychczas rozważaliśmy szacowanie czasu działania pętli używając ujednoliconego górnego ograniczenia, mającego zastosowanie w każdej iteracji pętli.
- Dla sortowania przez wybieranie, takie proste ograniczenie prowadziło do szacowania czasu wykonania **$O(n^2)$**.
- Można jednak dokonać bardziej uważnej analizy pętli i traktować wszystkie jej iteracje osobno. Można wówczas dokonać sumowania górnych ograniczeń poszczególnych iteracji. Czas działania pętli z wartością ***i*** zmiennej indeksowej ***i*** wynosi ***O(n-i-1)*****,** gdzie ***i*** przyjmuje wartości od ***0*** do ***n-2*****.**
- Górne ograniczenie czasu niezbędnego do wykonania wszystkich iteracji wynosi:

$$O\left(\sum_{n=0}^{n-2}(n-i-1)\right) = O(\,n(n-1)/2\,)$$

Proste lub precyzyjne ograniczenie



Górne ograniczenie czasu niezbędnego do wykonania wszystkich iteracji wynosi:

$$O\left(\sum_{n=0}^{n-2}(n-i-1)\right) = O(n(n-1)/2)$$

Efektywność algorytmu

- **Czas działania:**
  - Oznaczamy przez funkcje **T(n)** liczbę jednostek czasu, które zajmuje wykonanie programu lub algorytmu w przypadku problemu o rozmiarze **n**.
  - Funkcje te nazywamy **czasem działania**. Dość często czas działania zależy od konkretnych danych wejściowych, nie tylko ich rozmiaru. W takim przypadku, funkcje **T(n)** definiuje się jako **najmniej korzystny przypadek** z punktu widzenia kosztów czasowych. Inną wyznaczaną wielkością jest też **czas średni**, czyli średni dla różnych danych wejściowych.

Nie przejmuj się efektywnością algorytmu… wystarczy poczekać kilka lat.

- Taki pogląd funkcjonuje w środowisku programistów, **nie określono przecież granicy rozwoju mocy obliczeniowych komputerów**. Nie należy się jednak z nim zgadzać w ogólności. Należy zdecydowanie przeciwstawiać się przekonaniu o tym, że ulepszenia sprzętowe uczynią pracę nad efektywnymi algorytmami zbyteczną.
- Istnieją problemy których rozwiązanie za pomocą zasobów komputerowych jest **teoretycznie możliwe**, ale **praktycznie przekracza możliwości istniejących technologii**. Przykładem takiego problemu jest rozumienie języka naturalnego, przetwarzanie obrazów (do pewnego stopnia oczywiście) czy “inteligentna” komunikacja pomiędzy komputerami a ludźmi na rozmaitych poziomach.
- Kiedy pewne problemy stają się “proste”… Nowa grupa wyzwań, które na razie można sobie tylko próbować wyobrażać, wytyczy **nowe granice możliwości** wykorzystania komputerów.
- Do problemu systematycznej analizy czasu działania programu powrócimy jeszcze na wykładzie w styczniu…

Uwagi końcowe

Na wybór **najlepszego algorytmu** dla tworzonego programu wpływa wiele czynników, najważniejsze to:

- **prostota**,
- **łatwość implementacji**
- **efektywność**

Kombinatoryka

Kombinatoryka i prawdopodobieństwo

- Często spotykamy się z problemem obliczenia wartości wyrażającej prawdopodobieństwo zajścia określonych zdarzeń.
- Dziedzina matematyki zajmująca się tą tematyką to **kombinatoryka**.
- Pojęcia związane z próbami szacowania prawdopodobieństwa występowania zdarzeń definiuje **teoria prawdopodobieństwa**.

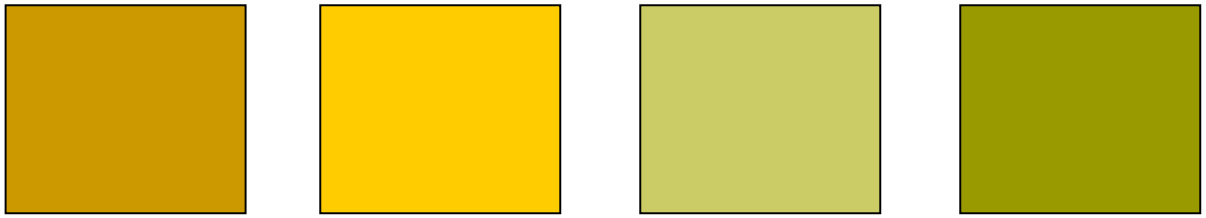
- Zacznijmy od **kombinatoryki...**

Wariacje z powtórzeniami

- Jednym z najprostszych, ale też najważniejszych problemów jest analiza **listy elementów**, z których każdemu należy przypisać jedną z wartości należących do stałego zbioru.
- Należy określić możliwą liczbę różnych przyporządkowań (*wariacji z powtórzeniami*) wartości do elementów.
- Przykład:

4 kwadraty, każdy można pokolorować jednym z 3 kolorów.

Ile możliwych pokolorowań? $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$



Wariacje z powtórzeniami

- Mamy listę **n**-elementów. Istnieje zbiór **k**-wartości z których każda może być przyporządkowana do jakiegoś elementu. Przyporządkowanie jest listą **n** wartości **$(n_1, n_2,...n_n)$**. Gdzie każda z **$n_1, n_2,...n_n$** jest jedną z wartości **k**.
  - Istnieje **k^n** różnych przyporządkowań.

Twierdzenie:
S(n): liczba możliwych sposobów przyporządkowania dowolnej z k wartości do każdego z n elementów wynosi k^n.

Wariacje z powtórzeniami

- **Podstawa:**

  Przypadek podstawowy to **n=1**. Jeżeli mamy **1** element możemy wybrać dla niego dowolną spośród **k** wartości. Istnieje wiec **k** różnych przyporządkowań. Ponieważ $k^1=k$, podstawa indukcji jest prawdziwa.

- **Indukcja:**

  Załóżmy że **S(n)** jest prawdziwe i rozważmy **S(n+1)**,określające że istnieje k^{n+1} możliwych przyporządkowań jednej z **k** wartości do każdego z **n+1** elementów.

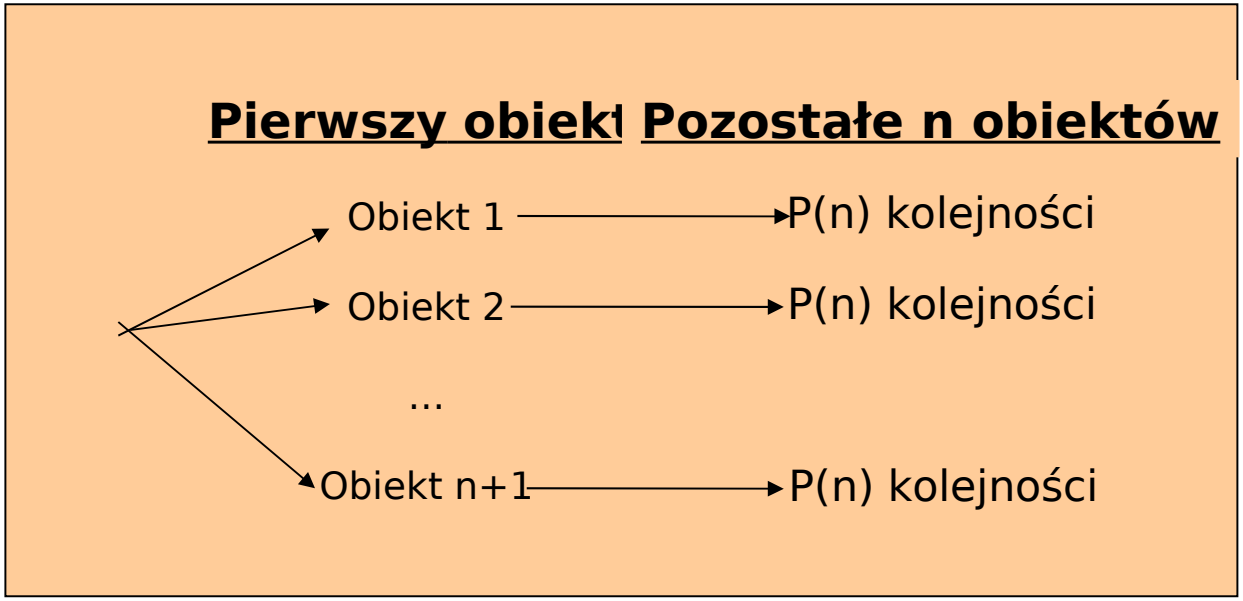
  Wiemy, że istnieje **k** możliwości doboru wartości dla pierwszego elementu. Zgodnie z hipotezą indukcyjną, istnieje k^n przyporządkowań wartości do pozostałych **n** elementów. Łączna liczba przyporządkowań wynosi $k \bullet k^n = k^{n+1}$. Cnd.

Permutacje

- Mając **n** różnych obiektów, na ile różnych sposobów można je ustawić w jednej lini?
  - Każde takie uporządkowanie nazywamy **permutacją**.
  - Liczbę permutacji **n** obiektów zapisujemy jako **P(n)**.

Jak obliczyć P(n+1)?

- Problem: mamy **n+1** obiektów $(a_1, a_2,\ldots,a_n, a_{n+1})$ które mają zostać ustawione.
- Ilość możliwych wyników ustawień jest **P(n+1)**



Permutacje n+1 obiektów

Jak obliczyć P(n+1)?

- **Twierdzenie**:

  P(n) = n! dla wszystkich **n ≥ 1**

- **Podstawa**:

  Dla **n=1, P(1)=1** określa że istnieje jedna permutacja dla jednego obiektu.

- **Indukcja**:

  Załóżmy ze **P(n) = n!**

  Wówczas wg. naszego twierdzenia: **P(n+1)=(n+1)!**

  Rozpoczynamy od stwierdzenia że **P(n+1)=(n+1) • P(n)**

  Zgodnie z hipotezą indukcyjną **P(n)=n!**, zatem **P(n+1)=(n+1) • n!**

  Zatem **P(n+1)=(n+1) • n! =(n+1) • n • (n-1) • (n-2) • ... • 1 = (n+1)!**, czyli nasze twierdzenie jest poprawne. Cnd.

- Jednym z interesujących zastosowań wzoru na liczbę permutacji jest dowód na to że **algorytmy sortujące musza działać w czasie co najmniej proporcjonalnym do (n log n), dla n elementów do posortowania**, chyba że wykorzystują jakieś specjalne własności sortowanych elementów.

Wariacje bez powtórzeń

- Niekiedy chcemy wybrać tylko niektóre spośród elementów zbioru i nadać im określony porządek.
- Uogólniamy opisaną poprzednio funkcję P(n) reprezentującą liczbę permutacji, aby otrzymać **dwuargumentową funkcje P(n,m)**, którą definiujemy jako ilość możliwych sposobów wybrania **m elementów z n-elementowego zbioru**, przy czym **istotną** rolę odgrywa **kolejność wybierania elementów**, natomiast nieważne jest uporządkowanie elementów nie wybranych.
- Zatem **P(n) = P(n,n)**.

Wariacje bez powtórzeń

Przykład:

- Ile istnieje sposobów utworzenia sekwencji **m** liter ze zbioru **n** liter, jeżeli żadna litera nie może występować więcej niż raz?
- Na sam początek możemy zauważyć warunek, by zadanie miało sens: $n \geq m$
- Pierwszą literę możemy wybrać na n sposobów (wybieramy ze zbioru **n**-elementowego), drugą na **n-1** sposobów (gdyż nie możemy wybrać tej samej litery co poprzednio), trzecią na **n-2** sposoby…
- Ostatnią na **n-(m-1)** sposobów.

Twierdzenie: $P(n,m) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot n-(m-1)$ **dla wszystkich** $m \leq n$

Twierdzenie: $P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$ **dla wszystkich** $m \leq n$

Kombinacje

- Kombinacja to każdy podzbiór zbioru skończonego. Kombinacją ***m***-elementową zbioru ***n***-elementowego **A** nazywa się każdy ***m***-elementowy podzbiór zbioru **A** (**0≤*m*≤*n***). Używa się też terminu "kombinacja z ***n*** elementów po ***m*** elementów" lub wręcz **"kombinacja z *n* po *m*"**
- Taką funkcję zapisujemy jako:

$$\binom{n}{m} = \frac{P(n,m)}{P(m)} = \frac{n!}{(n-m)! \cdot m!}$$

Wyznaczanie liczby kombinacji

Podstawa: $\binom{n}{0}=1$ dla dowolnego $n\geq 1$.
Oznacza to że istnieje tylko jeden sposób wybrania **zero** elementów ze zbioru **n**-elementowego – wybranie niczego.
Także $\binom{n}{n}=1$, ponieważ jedynym sposobem wybrania **n**-elementów ze zbioru **n**-elementowego jest wybranie ich wszystkich.

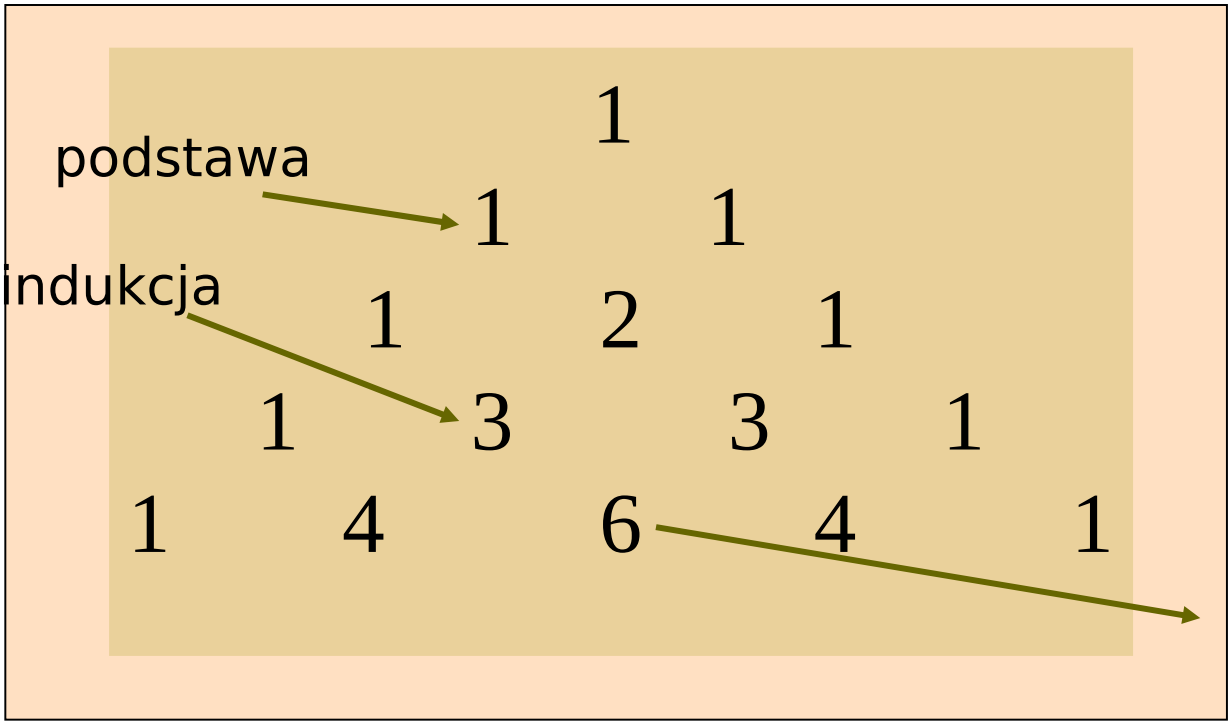
Indukcja: Jeśli $0< m< n$, to $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m}+\binom{n-1}{m-1}$.
Oznacza to, że jeżeli chcemy wybrać **m** elementów ze zbioru **n**-elementowego, możemy albo:

- nie wybrać pierwszego elementu, po czym wybrać m elementów z pozostałych n-1 elementów. Taką liczbę możliwości wyraża $\binom{n-1}{m}$.
- wybrać pierwszy element, po czym wybrać m-1 elementów z pozostałych n-1 elementów. Taka liczbę możliwości wyraża $\binom{n-1}{m-1}$.

Trójkąt Pascala

- Rekurencję przy obliczaniu liczby kombinacji często ilustruje się przy pomocy **trójkąta Pascala**.

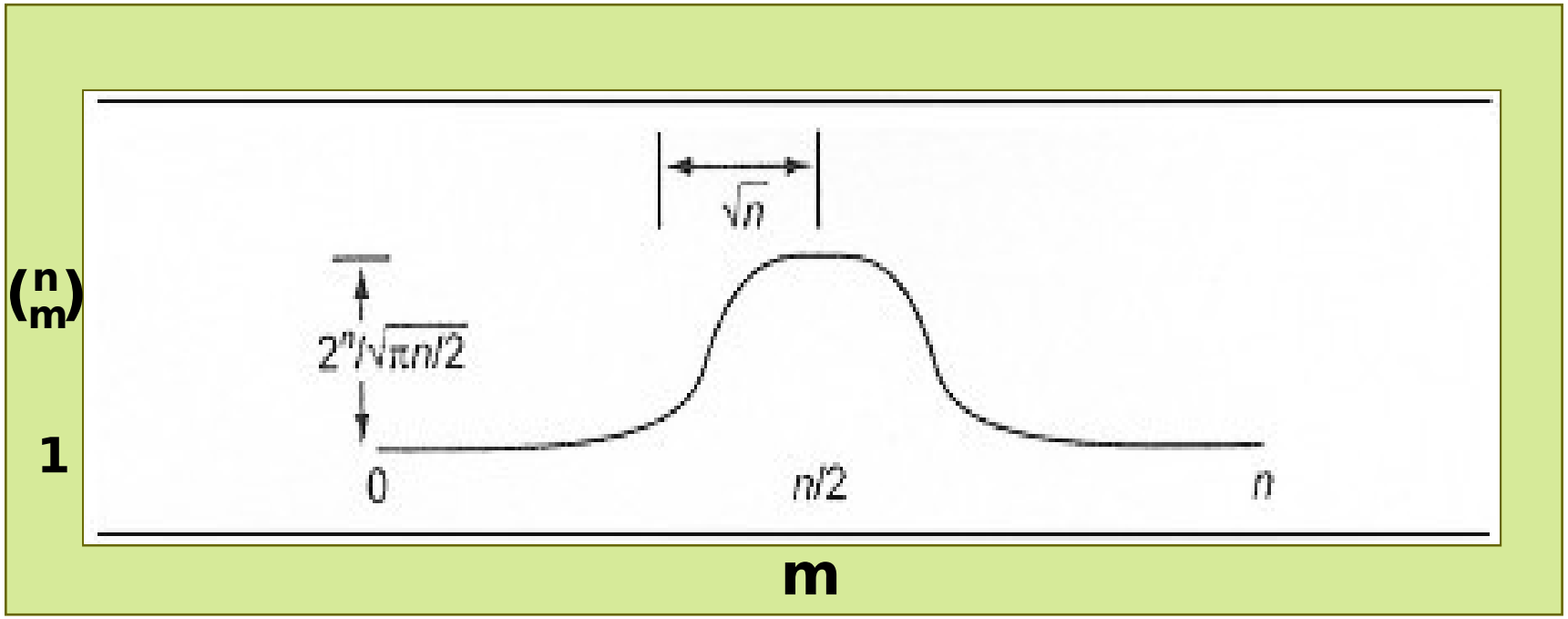
$\binom{n}{m}$ = **(m+1)** liczba w **(n+1)** wierszu



$\binom{4}{2}$ = 4!/(2! x 2!)
= 6

Interesujące własności funkcji $\binom{n}{m}$

- To również są współczynniki rozkładu dwuwyrazowego wielomianu (dwumianu) $(x+y)^n$
- $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} = 2^n$
- Wykres funkcji $\binom{n}{m}$ dla stałej dużej wartości **n**:



Łączenie reguł kombinatorycznych

- Typowy problem kombinatoryczny wymaga **łączenia przedstawionych reguł** (cegiełek) w bardziej skomplikowane struktury.
- Techniki których używamy to:
  - prowadzenie obliczeń jako **sekwencji wyborów**;
  - prowadzenie obliczeń jako **różnicy** innych obliczeń (np. wszystkich wyborów – nieprawidłowych wyborów);
  - prowadzenie obliczeń jako **sumy rozwiązań** dla podprzypadków które są wzajemnie rozłączne.