

Teoretyczne podstawy informatyki



Wykład 7:

Grafowy model danych

<http://hibiscus.if.uj.edu.pl/~erichter/Dydaktyka2010/TPI-2010>

Graf

- Graf to jest relacja binarna.
- Dla grafów mamy ogromne możliwości wizualizacji jako **zbiór punktów** (zwanych **wierzchołkami**) **połączonych liniami lub strzałkami** (nazwanych **krawędziami**). Pod tym względem **graf stanowi uogólnienie drzewiastego modelu danych**.
- Podobnie jak drzewa, grafy występują w różnych postaciach: grafów **skierowanych** i **nieskierowanych** lub **etykietowanych** i **niezaetykietowanych**.
- Grafy są przydatne do analizy szerokiego zakresu problemów: obliczanie odległości, znajdowanie cykliczności w relacjach, reprezentacji struktury programów, reprezentacji relacji binarnych, reprezentacji automatów i układów elektronicznych.

Relacje

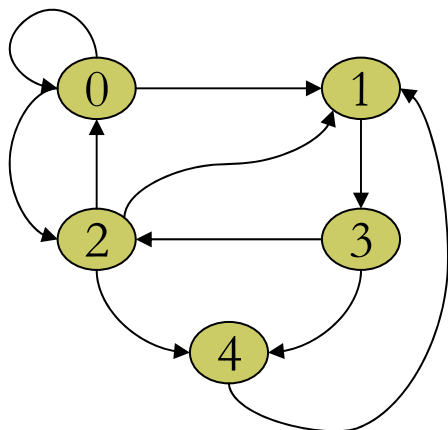
- Chociaż założyliśmy, że w ogólności elementy należące do zbiorów są niepodzielne, w praktyce często korzystnym rozwiązaniem jest przypisanie elementom pewnych struktur.
- Ważną strukturą dla elementów jest **lista o stałej długości zwana krotką**.
- Każdy element takiej listy nazywamy **składową krotki**.
- Zbiór elementów, z których każdy jest krotką o takiej samej liczności – powiedzmy **k** - nazywamy **relacją**. Licznością takiej relacji jest **k**.
- **Jeśli licznosc wynosi 2 mówimy o krotce lub relacji binarnej.**
- **Iloczyn kartezjański $A \times B$:**
 - Jest to zbiór par, z których pierwszy element pochodzi ze zbioru **A**, drugi ze zbioru **B**, czyli
$$A \times B = \{ (a, b) : a \in A \text{ oraz } b \in B \}$$
 - Iloczyn kartezjański nie ma własności przemienności, **$A \times B \neq B \times A$**
 - K-elementowy iloczyn kartezjański $A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_k$ to zbiór k-krotek (a_1, a_2, \dots, a_k) .

Podstawowe pojęcia

□ Graf skierowany (ang. *directed graph*)

Składa się z następujących elementów:

- Zbioru V wierzchołków (ang. *nodes, vertices*)
- Relacji binarnej E na zbiorze V . Relacje E nazywa się zbiorem krawędzi (ang. *edges*) grafu skierowanego. Krawędzie stanowią zatem pary wierzchołków (u,v) .



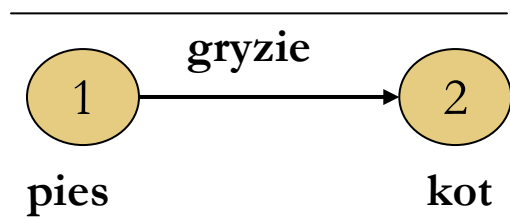
$$V = \{0,1,2,3,4\}$$

$$E = \{ (0,0), (0,1), (0,2), (1,3), (2,0), (2,1), (2,4), (3,2), (3,4), (4,1) \}$$

Podstawowe pojęcia

□ Etykiety:

- Podobnie jak dla drzew, dla grafów istnieje możliwość przypisania do każdego wierzchołka etykiety (ang. *label*).
- Nie należy mylić nazwy wierzchołka z jego etykietą. Nazwy wierzchołków muszą być niepowtarzalne, ale kilka wierzchołków może być oznaczonych tą samą etykietą.



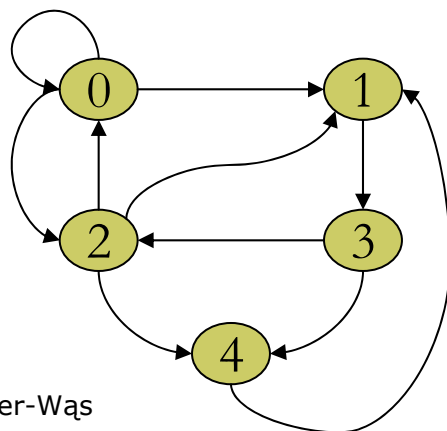
□ Drogi:

- Droga (ang. *path*) w grafie skierowanym stanowi listę wierzchołków, (n_1, n_2, \dots, n_k) taka, że występuje krawędź łącząca każdy wierzchołek z następnym, to znaczy $(n_i, n_{i+1}) \in E$ dla $i=1, 2, \dots, k$. Długość (ang. *length*) drogi wynosi $k-1$, co stanowi liczbę krawędzi należących do tej samej drogi.

Podstawowe pojęcia

□ Grafy cykliczne i acykliczne:

- **Cykl** (ang. *cycle*) w grafie skierowanym jest drogą o długości **1** lub więcej, która zaczyna się i kończy w **tym samym** wierzchołku.
- Długość cyklu jest długością drogi. Cykl jest **prosty** (ang. *simple*) jeżeli żaden wierzchołek (oprócz pierwszego) nie pojawia się na nim więcej niż raz.
- Jeżeli istnieje cykl nieprosty zawierający wierzchołek **n**, to można znaleźć prosty cykl który zawiera **n**. Jeżeli graf posiada jeden lub więcej cykli to mówimy że jest **grafem cyklicznym** (ang. *cyclic*). Jeśli cykle nie występują to, graf określa się mianem **acyklicznego** (ang. *acyclic*).



Przykłady cykli prostych:

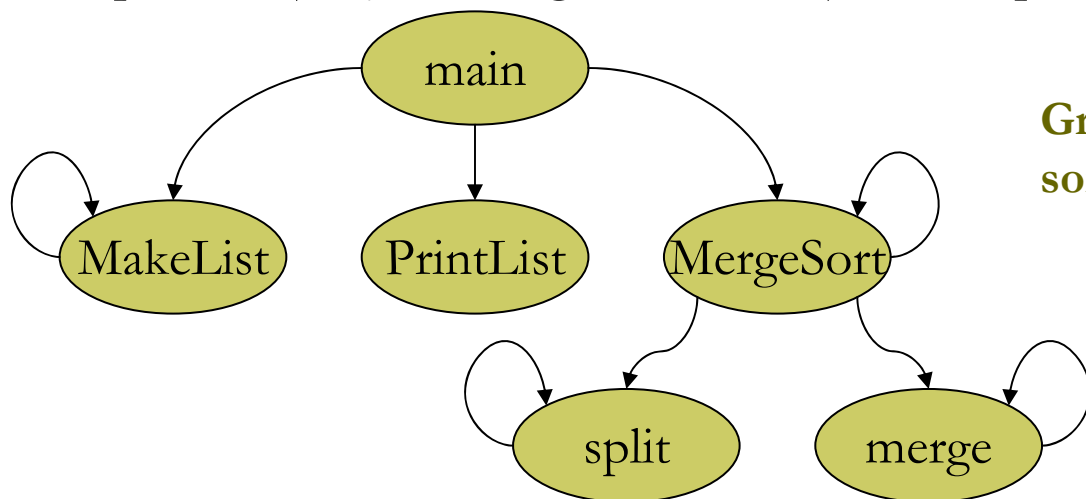
(0,0), (0,2,0), (1,3,2,1), (1,3,2,4,1)

Przykład cyklu nieprostego:

(0,2,1,3,2,0)

Grafy wywołań

- Wywołania dokonywane przez zestaw funkcji można reprezentować za pomocą grafu skierowanego, zwanego grafem wywołań. Jego wierzchołki stanowią funkcje, a krawędź (P, Q) istnieje wówczas, gdy funkcja P wywołuje funkcję Q .
- Istnienie cyklu w grafie implikuje występowanie w algorytmie rekurencji.
- **Rekurencja** w której funkcja wywołuje samą siebie nazywamy **bezpośrednią** (ang. *direct*).
- Czasem mamy do czynienia z **rekurencją pośrednią** (ang. *indirect*) która reprezentuje cykl o długości większej niż 1, np. (P, Q, R, P) .



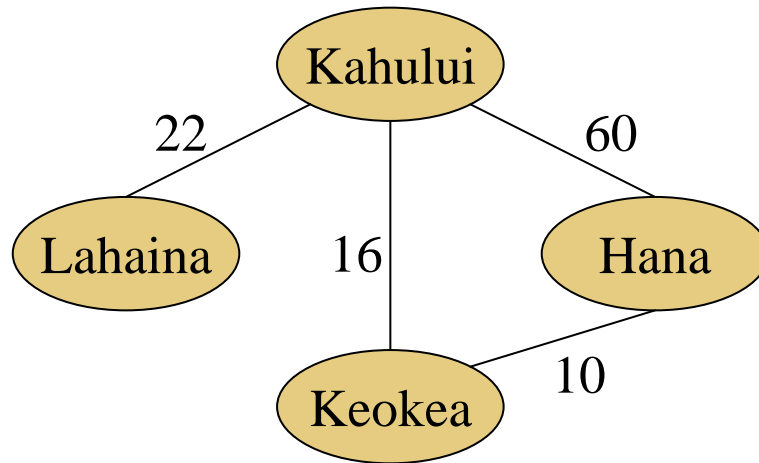
Graf wywołań dla algorytmu sortowania przez scalanie

Rekurencja bezpośrednia

Grafy nieskierowane

- Czasem zasadne jest połączenie wierzchołków krawędziami, które nie posiadają zaznaczonego kierunku. Z formalnego punktu widzenia taka krawędź jest zbiorem dwóch wierzchołków.
- Zapis $\{u,v\}$ mówi ze wierzchołki u oraz v są połączone w dwóch kierunkach. Jeśli $\{u,v\}$ jest krawędzią nieskierowaną, wierzchołki u i v określa się jako **sąsiednie** (ang. *adjacent*) lub mianem **sąsiadów** (ang. *neighbors*).
- Graf zawierający krawędzie nieskierowane, czyli graf z relacją symetryczności krawędzi, nosi nazwę grafu **nieskierowanego** (ang. *undirected graph*).

Grafy nieskierowane

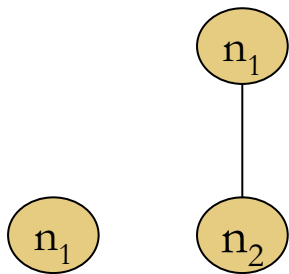


Graf nieskierowany reprezentujący drogi na wyspie Hawajów Maui.

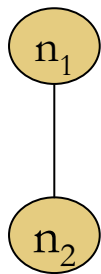
- Droga to lista wierzchołków. Nieco trudniej jest sprecyzować co to jest cykl, tak aby nie była to każda lista $(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k, v_{k-1}, \dots, v_2, v_1)$

Pewne pojęcia z teorii grafów

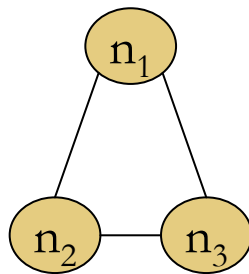
- **Teoria grafów** jest dziedziną matematyki zajmującą się właściwościami grafów.
- **Grafy pełne:**
 - Nieskierowany graf posiadający krawędzie pomiędzy każdą parą różnych wierzchołków nosi nazwę grafu pełnego (ang. *complete graph*). Graf pełny o n wierzchołkach oznacza się przez K_n .
 - Liczba krawędzi w nieskierowanym grafie K_n wynosi $n(n-1)/2$, w skierowanym grafie K_n wynosi n^2 .



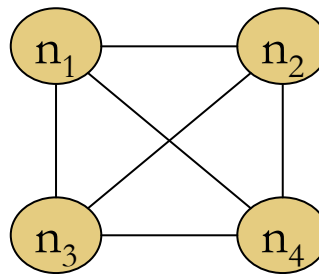
K_1



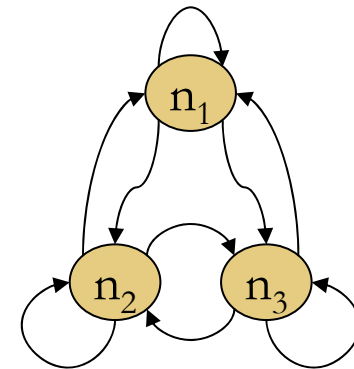
K_2



K_3



K_4

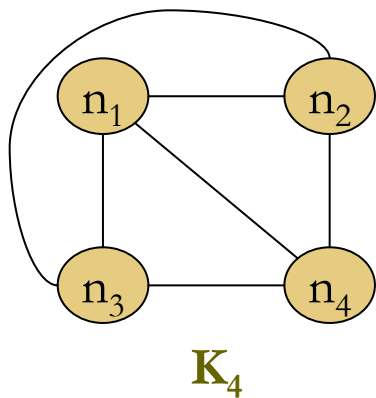


K_3

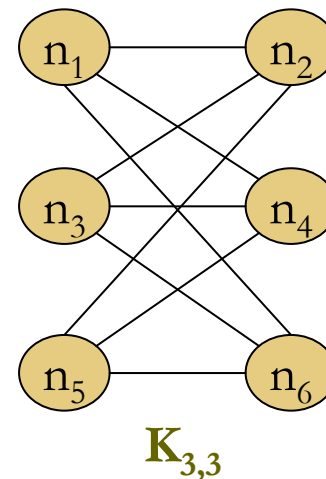
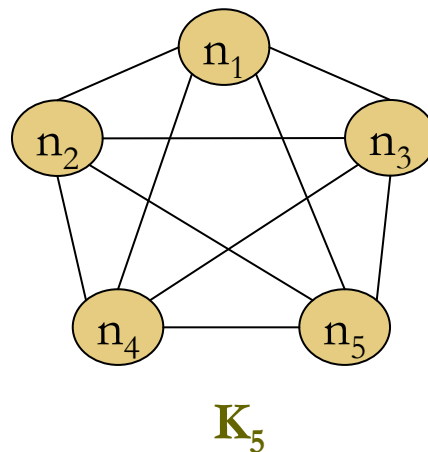
Grafy planarne i nieplanarne

- O grafie nieskierowanym mówi się że jest **planarny** (ang. *planar*) wówczas, gdy istnieje możliwość rozmieszczenia jego wierzchołków na płaszczyźnie, a następnie narysowania jego krawędzi jako linii ciągłych które się nie przecinają.
- Grafy **nieplanarne** (ang. *nonplanar*) to takie które nie posiadają reprezentacji płaskiej.

Reprezentacja planarna:

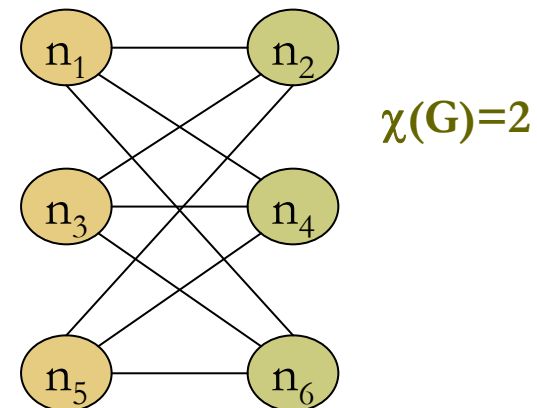
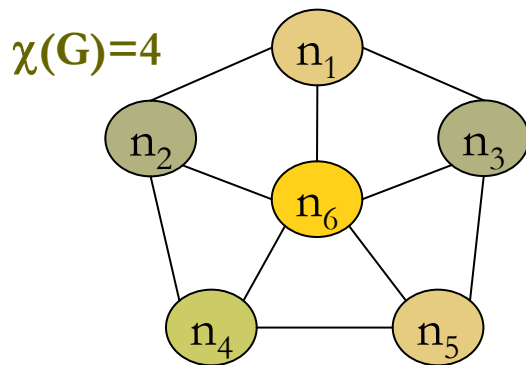


Najprostsze grafy nieplanarne:



Zastosowania planarności i kolorowanie grafów

- Planarność ma duże zastosowanie do graficznych reprezentacji w informatyce dla projektowania różnego rodzaju układów (np. scalonych, bramek, etc.)
- **Kolorowanie grafu** (ang. *graph coloring*) polega na przypisaniu do każdego wierzchołka pewnego koloru, tak aby żadne dwa wierzchołki połączone krawędzią nie miały tego samego koloru.
- Minimalna liczba kolorów potrzebna do takiej operacji nazwana jest **liczbą chromatyczną grafu** (ang. *chromatic number*), oznaczaną $\chi(G)$.
 - Jeżeli graf jest pełny to jego liczba chromatyczna jest równą liczbie wierzchołków
 - Jeżeli graf możemy pokolorować przy pomocy dwóch kolorów to nazywamy go **dwudzielnym** (ang. *bipartite graph*). Np. $K_{3,3}$.



Sposoby implementacji grafów

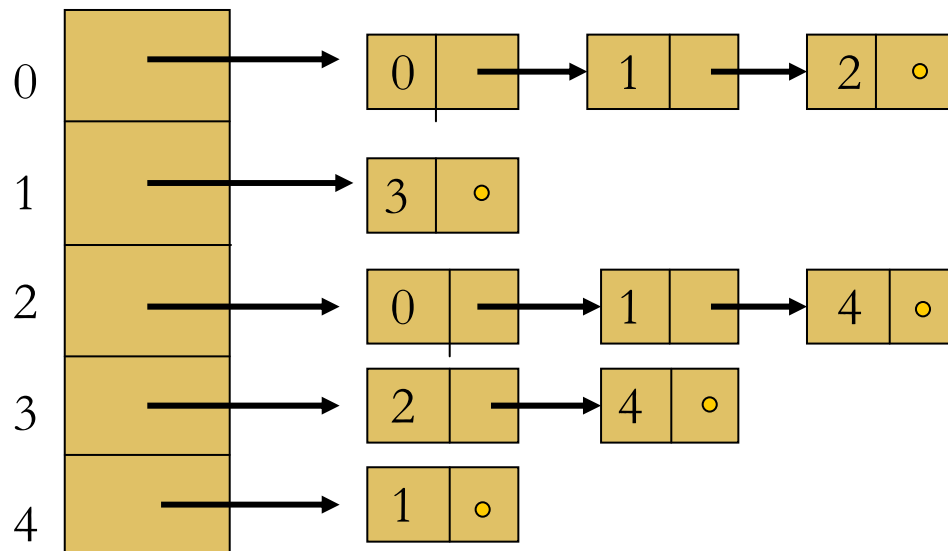
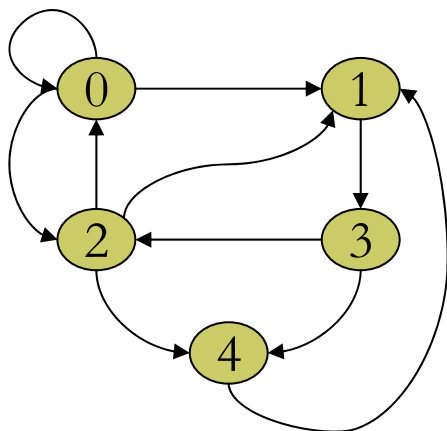
- Istnieją **dwie standardowe metody reprezentacji grafów**.
 - Pierwsza z nich, **listy sąsiedztwa** (ang. *adjacency lists*), jest, ogólnie rzecz biorąc, podobna do implementacji relacji binarnych.
 - Druga, **macierze sąsiedztwa** (ang. *adjacency matrices*), to nowy sposób reprezentowania relacji binarnych, który jest bardziej odpowiedni dla relacji, w przypadku którym liczba istniejących par stanowi znaczącą część całkowitej liczby par, jakie mogłyby teoretycznie istnieć w danej dziedzinie.
- Wierzchołki są ponumerowane kolejnymi liczbami całkowitymi **0,1,....., MAX-1** lub oznaczone za pomocą innego adekwatnego typu wyliczeniowego (używamy poniżej typu **NODE** jako synonimy typu wyliczeniowego).
- Wówczas można skorzystać z podejścia opartego na wektorze własnym.
- Element **successors[u]** zawiera wskaźnik do listy jednokierunkowej wszystkich bezpośrednich następników wierzchołka **u**. Następni mogą występować w dowolnej kolejności na liście jednokierunkowej.

Listy sąsiedztwa:

```
typedef struct CELL *LIST;  
struct CELL {  
    NODE nodeName;  
    LIST next;  
}  
LIST successors[MAX]
```

Reprezentacja grafu za pomocą list sąsiedztwa

- Listy sąsiedztwa zostały posortowane wg. kolejności, ale następniki mogą występować w **dowolnej kolejności** na odpowiedniej liście sąsiedztwa.

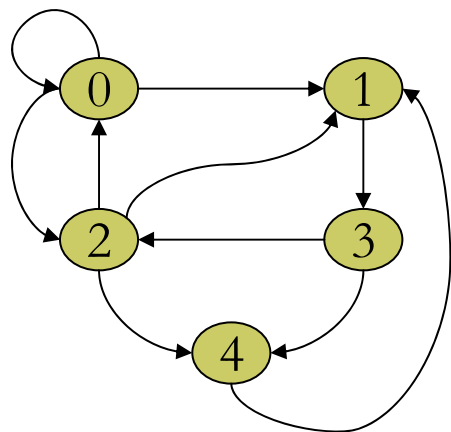


Reprezentacja grafu za pomocą macierzy sąsiedztwa

- Tworzymy dwuwymiarową tablicę;

BOOLEAN `vertices`[MAX][MAX];

w której element `vertices`[*u*][*v*] ma wartość **TRUE** wówczas, gdy istnieje krawędź (*u*, *v*), zaś **FALSE**, w przeciwnym przypadku.



	0	1	2	3	4
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
2	1	1	0	0	1
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	0	0

Porównanie macierzy sąsiedztwa z listami sąsiedztwa.

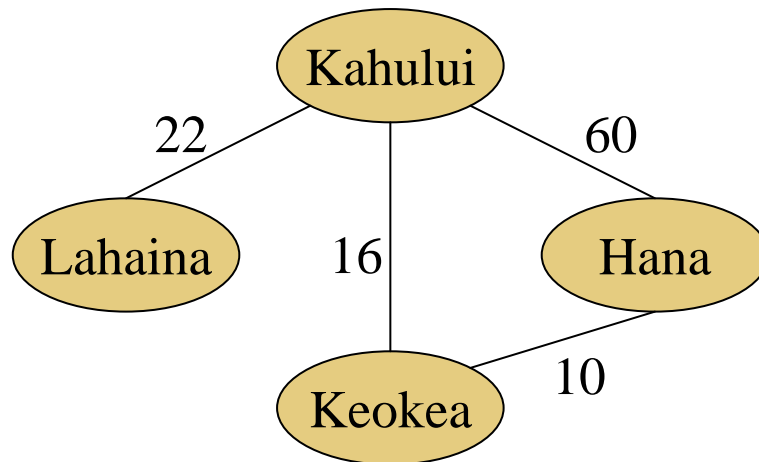
- ❑ **Macierze sąsiedztwa** są preferowanym sposobem reprezentacji grafów wówczas, gdy **grafy są gęste** (ang. *dense*), to znaczy, kiedy liczba krawędzi jest bliska maksymalnej możliwej ich liczby.
- ❑ Dla grafu skierowanego o **n** wierzchołkach maksymalna liczba krawędzi wynosi **n^2** .
- ❑ Jeśli **graf jest rzadki** (ang. *sparse*) to reprezentacja oparta na listach sąsiedztwa może pozwolić zaoszczędzić pamięć.
- ❑ Istotne różnice między przedstawionymi reprezentacjami grafów są widoczne już przy wykonywaniu prostych operacji.

Preferowany sposób reprezentacji:

OPERACJA	GRAF GESTY	GRAF RZADKI
Wyszukiwanie krawędzi	Macierz sąsiedztwa	Obie
Znajdowanie następników	Obie	Lista sąsiedztwa
Znajdowanie poprzedników	Macierz sąsiedztwa	Obie

Spójna składowa grafu nieskierowanego

- Każdy graf nieskierowany można podzielić na jedną lub większą liczbę **spójnych składowych** (ang. *connected components*).
- Każda spójna składowa to taki zbiór wierzchołków, że dla każdych dwóch z tych wierzchołków istnieje łącząca je ścieżka. Jeżeli graf składa się z jednej spójnej składowej to mówimy że jest **spójny** (ang. *connected*).



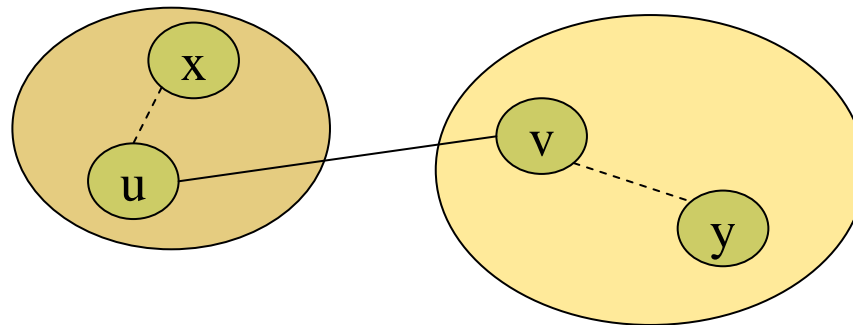
To jest graf spójny

Spójne składowe jako klasy równoważności

- Pojęcie **spójnych składowych** można potraktować formalnie jako klasy równoważności relacji równoważności **P** zdefiniowanej na wierzchołkach grafu nieskierowanego jako **uPv** wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje droga z wierzchołka **u** do **v**.
- **Sprawdzenie czy P jest relacją równoważności**
 - Relacja **P** jest zwrotna, to znaczy zachodzi **uPu** dla dowolnego wierzchołka **u**, gdyż istnieje droga o długości **0** z dowolnego wierzchołka do niego samego.
 - Relacja **P** jest symetryczna. Jeśli zachodzi **uPv**, to istnieje droga z wierzchołka **u** do **v**. Ponieważ graf jest **nieskierowany**, odwrotny porządek wierzchołków również stanowi drogę. Stąd zachodzi **vPu**.
 - Relacja **P** jest przechodnia. Załóżmy, że relacje **uPw** oraz **wPv** są prawdziwe. Wówczas istnieje pewna droga, na przykład **(x₁, x₂, ..., x_j)** z **u do w**. Zatem **u=x₁** oraz **w=x_j**. Ponadto istnieje droga **(y₁, y₂, ..., y_k)** z wierzchołka **w do v**, gdzie **w=y₁** oraz **v=y_k**. Składając obie drogi razem otrzymujemy drogę z **u do v**, czyli **(u=x₁, x₂, ..., x_j=w=y₁, y₂, ..., y_k=v)**.
 - Relacja **P** dzieli graf na **klasy równoważności**. Każda klasa równoważności zdefiniowana relacją drogi odpowiada spójnej składowej tego grafu.

Algorytm wyznaczania spójnych składowych

- Chcemy określić spójne składowe grafu G . Przeprowadzamy rozumowanie indukcyjne.
- **Podstawa:**
 - Graf G_0 zawiera jedynie wierzchołki grafu G i żadnej jego krawędzi. Każdy wierzchołek stanowi odrębną spójną składową.
- **Indukcja:**
 - Zakładamy, że znamy już spójne składowe grafu G_i po rozpatrzeniu pierwszych i krawędzi, a obecnie rozpatrujemy $(i+1)$ krawędź $\{u, v\}$.
 - jeżeli wierzchołki u, v należą do jednej spójnej składowej to nic się nie zmienia
 - jeżeli do dwóch różnych, to łączymy te dwie spójne składowe w jedną.



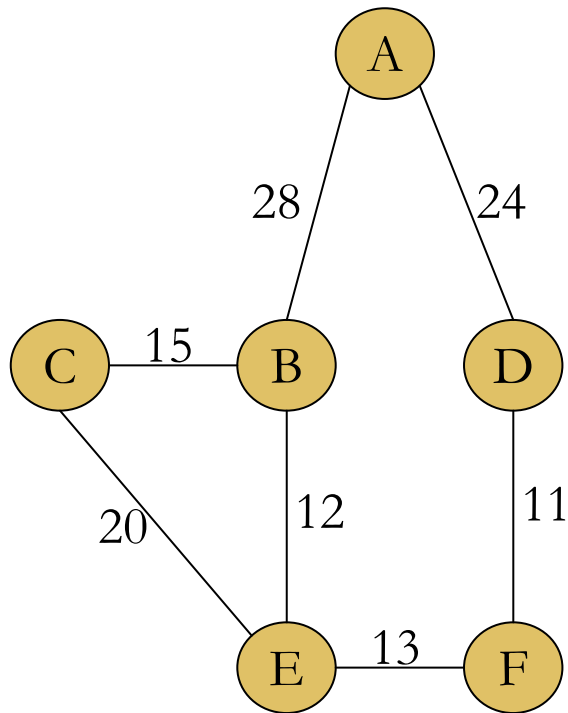
Struktura danych dla wyznaczania spójnych składowych

- Biorąc pod uwagę przedstawiony algorytm, musimy zapewnić szybkość wykonywalność następujących operacji:
 1. gdy jest określony wierzchołek to znajdź jego bieżącą spójną składową
 2. połącz dwie spójne składowe w jedną
- Zaskakująco dobre wyniki daje ustawienie wierzchołków każdej składowej w strukturze drzewiastej, gdzie spójna składowa jest reprezentowana przez korzeń.
 - aby wykonać operacje (1) należy przejść do korzenia
 - aby wykonać operacje (2) wystarczy korzeń jednej składowej określić jako potomka korzenia składowej drugiej.
 - Przyjmijmy zasadę że korzeń drzewa o mniejszej wysokości czynimy potomkiem.
- Przy takiej konstrukcji czas wykonania instrukcji (1) jest $O(\log n)$, czas wykonania instrukcji (2) jest $O(1)$. Wyznaczenie wszystkich spójnych składowych to $O(m \log n)$ gdzie m jest liczbą krawędzi a n liczbą wierzchołków.

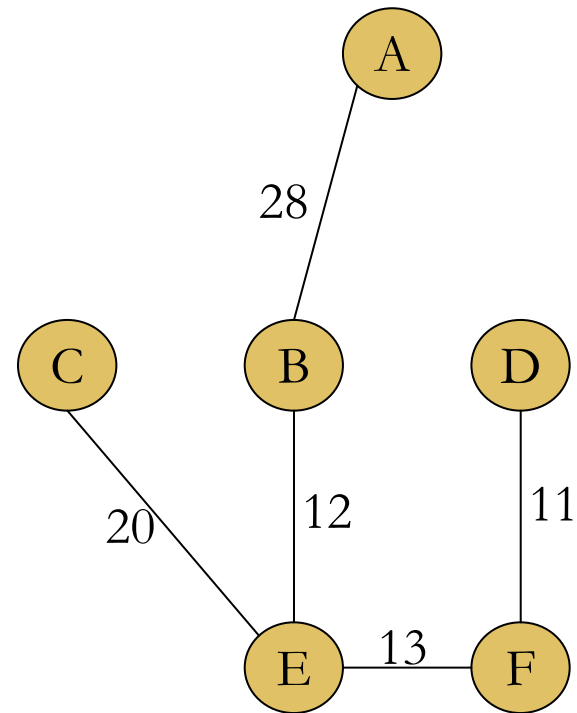
Minimalne drzewa rozpinające

- **Drzewo rozpinające** (ang. *spanning tree*) grafu nieskierowanego **G** stanowi zbiór wierzchołków tego grafu wraz z podzbiorem jego krawędzi, takich że:
 - łączą one wszystkie wierzchołki, czyli istnieje droga między dwoma dowolnymi wierzchołkami która składa się tylko z krawędzi drzewa rozpinającego.
 - tworzą one drzewo nie posiadające korzenia, nieuporządkowane. Oznacza to że nie istnieją żadne (proste) cykle.
- Jeśli graf **G** stanowi pojedynczą spójną składową to drzewo rozpinające zawsze istnieje. **Minimalne drzewo rozpinające** (ang. *minimal spanning tree*) to drzewo rozpinające, w którym suma etykiet jego krawędzi jest najmniejsza ze wszystkich możliwych do utworzenia drzew rozpinających tego grafu.

Minimalne drzewa rozpinające



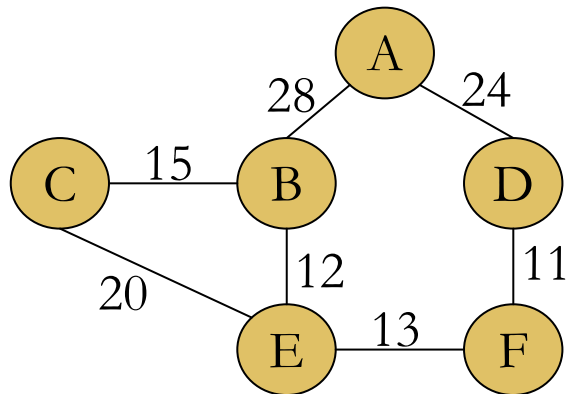
Graf nieskierowany



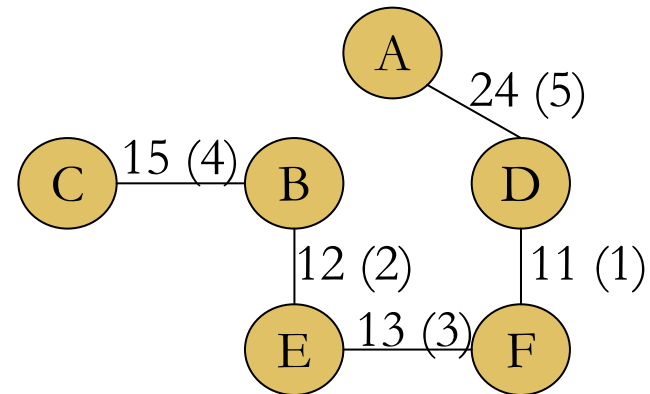
Drzewo rozpinające

Znajdowanie minimalnego drzewa rozpinającego

- Istnieje wiele algorytmów. Jeden z nich to algorytm Kruskala, który stanowi proste rozszerzenie algorytmu znajdowania spójnych składowych. Wymagane zmiany to:
 - należy rozpatrywać krawędzie w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet,
 - należy dołączyć krawędź do drzewa rozpinającego tylko w takim wypadku gdy jej końce należą do dwóch różnych spójnych składowych.



Graf nieskierowany



Minimalne drzewo rozpinające

(w nawiasach podano kolejność dodawanych krawędzi)

Znajdowanie minimalnego drzewa rozpinającego

- ❑ **Algorytm Kruskala** jest dobrym przykładem **algorytmu zachłannego** (ang. *greedy algorithm*), w przypadku którego podejmowany jest szereg decyzji, z których każdą stanowi wybranie opcji najlepszej w danym momencie. Lokalnie podejmowane decyzje polegają w tym przypadku na wyborze krawędzi dodawanej do formowanego drzewa rozpinającego.
- ❑ Za każdym razem wybierana jest krawędź o najmniejszej wartości etykiety, która nie narusza definicji drzewa rozpinającego, zabraniającej utworzenia cyklu.
- ❑ Dla algorytmu Kruskala można wykazać, że jego rezultat jest optymalny globalnie, to znaczy że daje on w wyniku drzewo rozpinające o minimalnej wadze.
- ❑ Czas wykonania algorytmu jest $O(m \log m)$ gdzie m to jest większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

- Niech G będzie nieskierowanym grafem spójnym.
(Dla niektórych etykiet dopuszczamy dodanie nieskończenie malej wartości tak aby wszystkie etykiety były różne, graf G będzie miał wobec tego unikatowe minimalne drzewo rozpinające, które będzie jednym spośród minimalnych drzew rozpinających grafu G o oryginalnych wagach).
- Niech ciąg e_1, e_2, \dots, e_m oznacza wszystkie krawędzie grafu G w kolejności zgodnej z rosnącą wartością ich etykiet, rozpoczynając od najmniejszej.
- Niech K będzie drzewem rozpinającym grafu G o odpowiednio zmodyfikowanych etykietach, utworzonym przez zastosowanie algorytmu Kruskala, a T niech będzie unikatowym minimalnym drzewem rozpinającym grafu G .

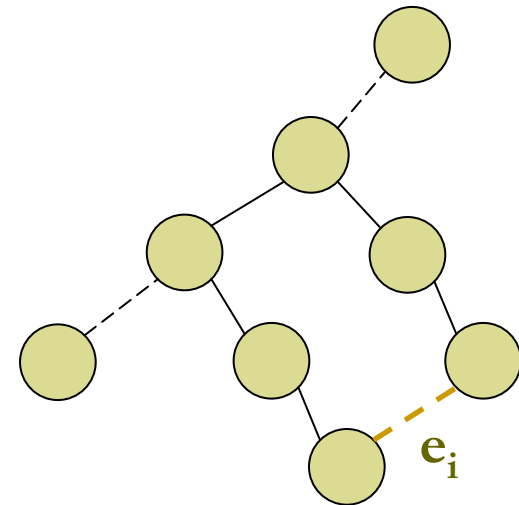
Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

- Należy udowodnić że \mathbf{K} i \mathbf{T} stanowią to samo drzewo. Jeśli są różne musi istnieć co najmniej jedna krawędź, która należy do jednego z nich a nie należy do drugiego.
- Niech e_i oznacza pierwsza taka krawędź spośród uporządkowanych krawędzi, to znaczy każda z krawędzi e_1, e_2, \dots, e_{i-1} albo należy do obu drzew \mathbf{K} i \mathbf{T} albo nie należy do żadnego z nich.
- Istnieją dwa przypadki w zależności czy krawędź e_i należy do drzewa \mathbf{K} czy do drzewa \mathbf{T} . W każdym z tych przypadków wykażemy sprzeczność, co będzie stanowić dowód, że e_i nie może istnieć, a stąd że $\mathbf{K}=\mathbf{T}$, oraz że \mathbf{K} stanowi minimalne drzewo rozpinające grafu \mathbf{G} .

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

□ Przypadek 1:

- krawędź e_i należy do T , ale nie należy do K .
- Jeżeli algorytm Kruskala odrzuca e_i , oznacza to że e_i formuje cykl z pewną drogą P , utworzoną z uprzednio wybranych krawędzi drzewa K .
- Jeżeli krawędzie drogi P należą to K to należą także do T .
- A więc $P + e_i$ utworzyłoby cykl w T co jest sprzeczne z definicją drzewa rozpinającego. Stąd niemożliwe jest aby e_i należała do T a nie należała do K .

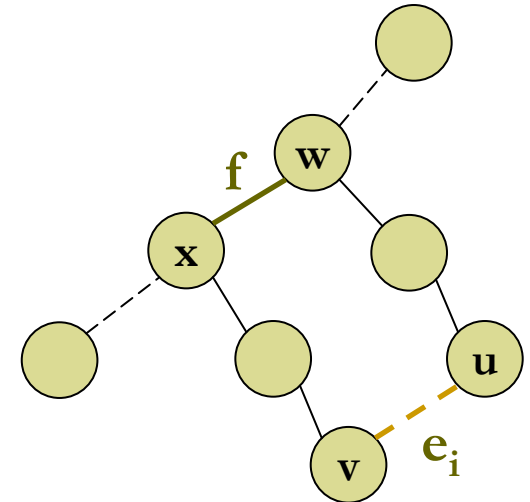


Droga P (linia ciągła) należy zarówno do drzewa T jak i K , krawędź e_i należy tylko do T .

Uzasadnienie poprawności algorytmu Kruskala

□ Przypadek 2:

- krawędź e_i należy do K , ale nie należy do T .
Niech krawędź e_i łączy wierzchołki u i v .
Ponieważ drzewo T jest spójne, musi istnieć w T pewna acykliczna droga z wierzchołka u do v . Niech nosi ona nazwę Q . Ponieważ w skład Q nie wchodzi e_i , $Q + e_i$ tworzy cykl prosty w grafie G .
 1. krawędź e_i posiada najwyższą wartość etykiety. Musiałoby to oznaczać że K zawiera cykl co jest niemożliwe.
 2. na drodze Q istnieje krawędź f która ma wartość etykiety wyższą niż e_i . Można by więc usunąć f a wprowadzić e_i nie niszcząc spójności. A więc rozpięte drzewo miałoby wartość mniejsza niż wartość dla T co jest w sprzeczności z początkowym twierdzeniem że T jest minimalne.

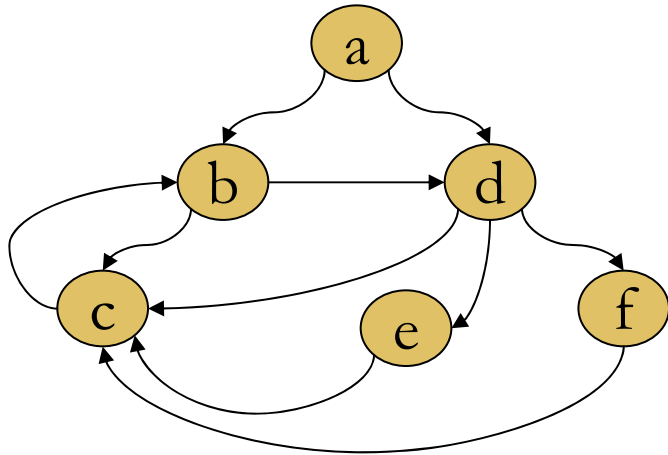


Droga Q (linia ciągła) należy do drzewa T , można dodać krawędź e_i i usunąć krawędź f

Algorytm przeszukiwania w głąb

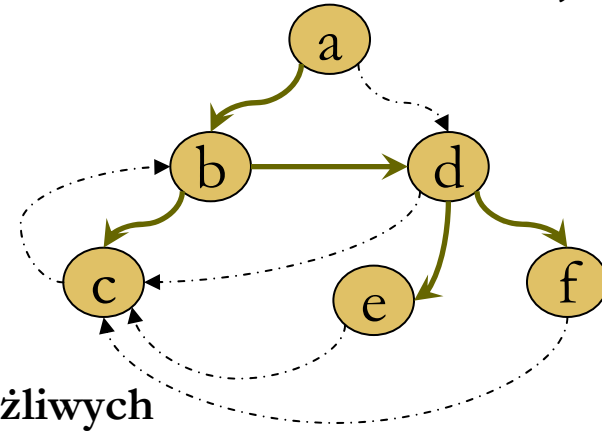
- ❑ Jest to podstawowa metoda badania grafów skierowanych.
- ❑ Bardzo podobna do stosowanych dla drzew, w których startuje się od korzenia i rekurencyjnie bada wierzchołki potomne każdego odwiedzonego wierzchołka.
- ❑ Trudność polega na tym że w grafie mogą pojawiać się cykle... Należy wobec tego znaczyć wierzchołki już odwiedzone i nie wracać więcej do takich wierzchołków.
- ❑ Z uwagi na fakt, że w celu uniknięcia dwukrotnego odwiedzenia tego samego wierzchołka jest on odpowiednio oznaczany, graf w trakcie jego badania zachowuje się podobnie do drzewa.
- ❑ W rzeczywistości można narysować drzewo, którego krawędzie rodzic-potomek będą niektórymi krawędziami przeszukiwanego grafu G .
- ❑ Takie drzewo nosi nazwę **drzewa przeszukiwania w głąb** (ang. *depth-first-search*) dla danego grafu.

Algorytm przeszukiwania w głąb

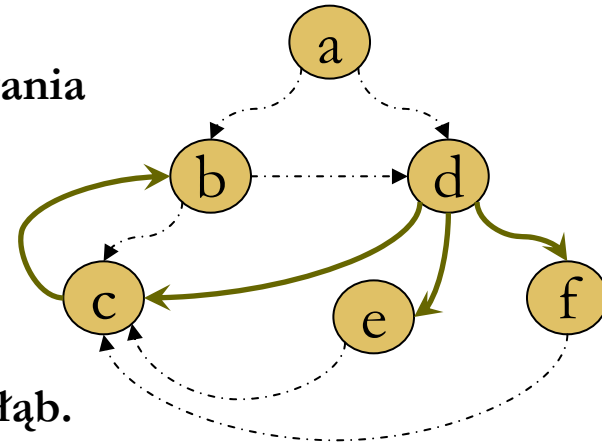


Graf skierowany

Las przeszukiwania:
dwa drzewa o korzeniach a, d

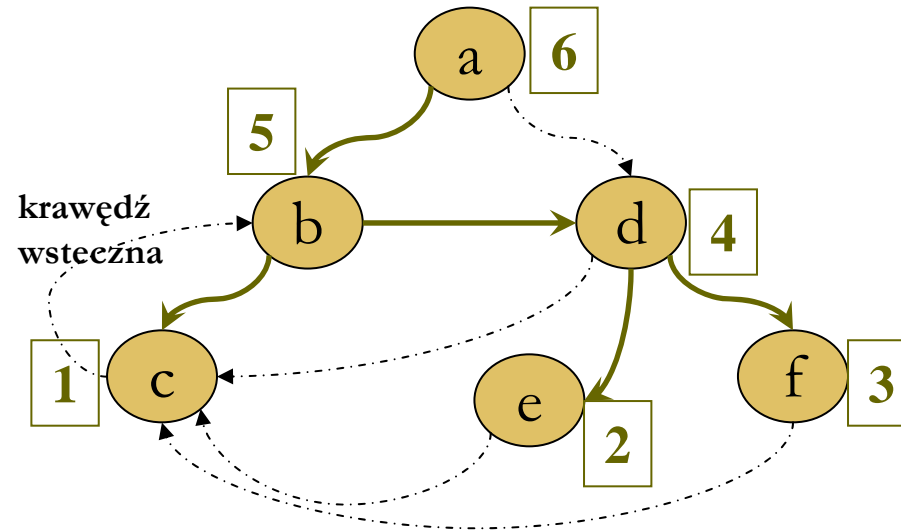


Jedno z możliwych
drzew
przeszukiwania



Las przeszukiwania w głąb.

Drzewo przeszukiwania w głąb



- Po (podczas) konstruowaniu drzewa przeszukiwania w głąb można ponumerować jego wierzchołki w **kolejności wstecznej** (ang. *post-order*).

Rekurencyjna funkcja przeszukiwania w głąb: void dfs

```
enum MARKTYPE {VISITED, UNVISITED};  
typedef struct{  
    enum MARKTYPE mark;  
    LIST successors;  
} GRAPH[MAX];
```

```
typedef struct CELL *LIST;  
struct CELL {  
    NODE nodeName;  
    LIST next;  
};
```

```
void dfs(NODE u, GRAPH G)  
{  
    LIST p; /* lista sąsiedztwa dla wierzchołka u */  
    NODE v; /* wierzchołek w komórce wskazywanej przez p */  
  
    G[u].mark = VISITED;  
    p = G[u].successors;  
    while (p != NULL) {  
        v = p->nodeName;  
        if (G[v].mark == UNVISITED) dfs(v, G);  
        p = p->next;  
    }  
}
```


Znajdowanie cykli w grafie skierowanym

- Podczas przeszukiwania w głąb grafu skierowanego G można wszystkim wierzchołkom przypisać numery zgodne z kolejnością wsteczną w czasie rzędu $O(m)$.
- Krawędzie wsteczne to takie dla których początki są równe lub mniejsze końcom ze względu na numerację wsteczną.
- Zawsze gdy istnieje krawędź wsteczna w grafie musi istnieć cykl.
- Prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne. Aby stwierdzić czy w grafie występuje cykl należy przeprowadzić numerację wsteczną a następnie sprawdzić wszystkie krawędzie.
- Całkowity czas wykonania testu cykliczności to $O(m)$, gdzie m to większa z wartości liczby wierzchołków i liczby krawędzi.

Sortowanie topologiczne

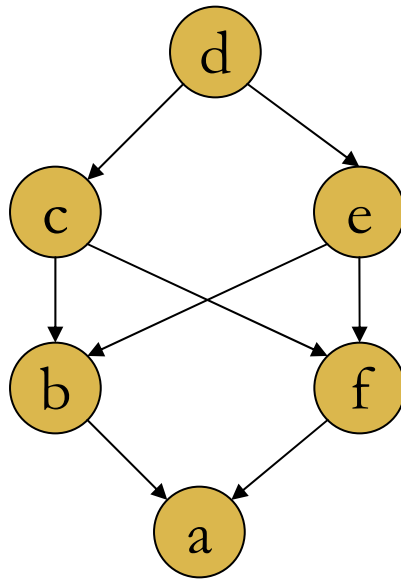
- Załóżmy, że graf skierowany G jest acykliczny.
- Dla każdego grafu możemy określić las poszukiwania w głąb, określając numerację wsteczną jego wierzchołków.
- Załóżmy, że (n_1, n_2, \dots, n_k) określa listę wierzchołków grafu G w kolejności odwrotnej do numeracji wstecznej. To znaczy: n_1 jest wierzchołkiem opatrzonym numerem n , n_2 wierzchołkiem opatrzonym numerem $n-1$ i ogólnie wierzchołek n_i jest opatrzony numerem $n-i+1$.
- Kolejność wierzchołków na tej liście ma ta własność, że wszystkie krawędzie grafu G biegną od początku do końca, tzn. początek poprzedza koniec.

Sortowanie topologiczne

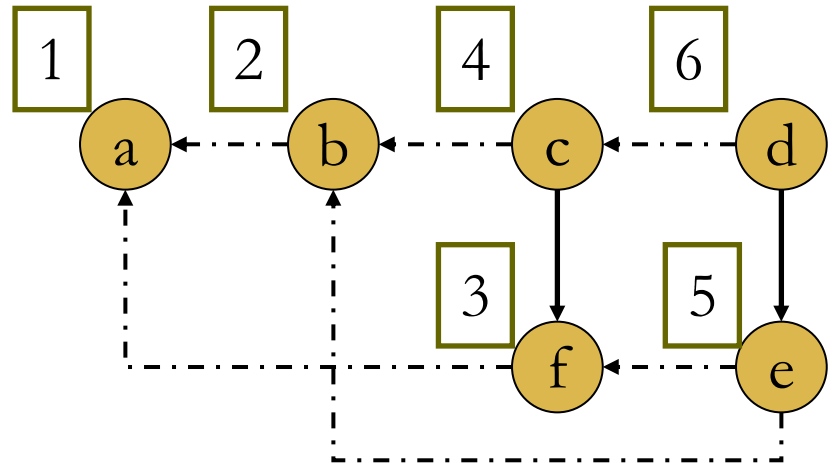
- Takie uporządkowanie nazywamy **topologicznym** (ang. *topological order*), a proces znajdowania takiego uporządkowania to **sortowanie topologiczne** (ang. *topological sorting*).
- Jedynie grafy acykliczne posiadają uporządkowanie topologiczne.
- Wykonując poszukiwanie w głąb możemy je określić w czasie **$O(m)$** .
- Jedną z możliwości: odkładać kolejno znalezione wierzchołki „na stos”. Po zakończeniu lista znajdująca się na stosie będzie reprezentować uporządkowanie topologiczne grafu.

Sortowanie topologiczne

Uporządkowanie topologiczne to **(d,e,c,f,b,a)**



Skierowany graf cykliczny



Las przeszukiwania w głąb

Sortowanie topologiczne - zastosowania

- ❑ **Uporządkowanie topologiczne** przydaje się wówczas, gdy istnieją pewne ograniczenia odnośnie kolejności w jakiej mają być wykonywane zadania.
- ❑ Jeśli krawędź wiodącą od wierzchołka **u** do wierzchołka **v** jest rysowana wówczas, gdy zadanie **u** musi zostać wykonane przed zadaniem **v**, to uporządkowaniem zapewniającym wykonanie wszystkich zadań jest właśnie uporządkowanie topologiczne.
- ❑ Podobny przykład to graf wywołań nierekurencyjnego zbioru funkcji, kiedy należy przeanalizować każdą funkcję dopiero po dokonaniu analizy funkcji ją wywołującej.
- ❑ Jeśli krawędzie wiodą od funkcji wywołujących do wywoływanych, kolejność, w której należy przeprowadzić takie analizy, to **odwrócenie porządku topologicznego**, czyli uporządkowanie wsteczne.
- ❑ Zapewnia to że każda funkcja zostanie przeanalizowana dopiero po dokonaniu analizy wszystkich innych wywoływanych przez nią funkcji.

Sortowanie topologiczne - zastosowania

- **Istnienie cyklu** w grafie reprezentującym priorytety zadań mówi o tym, że nie istnieje takie uporządkowanie, dzięki któremu możliwe byłoby wykonanie wszystkich zadań.
- **Istnienie cyklu** w grafie wywołań pozwala stwierdzić występowanie rekurencji.

Problem osiągalności

- Naturalne pytanie związane z grafem skierowanym jest:
 - które wierzchołki są osiągalne z danego wierzchołka **u** przy założeniu, że po grafie można się poruszać tylko zgodnie z kierunkiem krawędzi?
Taki zbiór wierzchołków określa się mianem **zbioru osiągalności** (ang. *reachable set*) danego wierzchołka **u**.

- Możemy wykorzystać rekurencyjną funkcję poszukiwania w głąb.
- Całkowity czas wykonania takiego zapytania to **$O(mn)$** .

Znajdowanie spójnych składowych

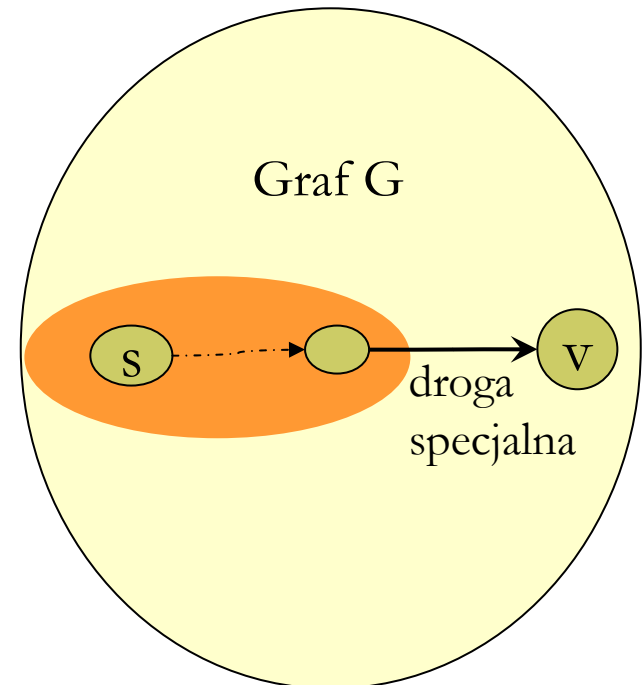
- Do znajdowania spójnych składowych możemy użyć algorytmu poszukiwania w głąb.
- Traktujemy graf nieskierowany jako graf skierowany, w którym każda krawędź nieskierowana została zastąpiona dwiema krawędziami skierowanymi wiodącymi w obu kierunkach.
- Do reprezentacji grafu używamy list sąsiedztwa.
- Tworzymy las przeszukiwania w głąb grafu skierowanego. Każde drzewo w tym lesie odpowiada jednej składowej spójności grafu nieskierowanego.
- Czas wykonania algorytmu $O(m)$ (przy użyciu struktury drzewiastej, patrz poprzedni wykład, czas wykonania wynosi $O(m \log n)$).

Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych dróg.

- Rozpatrujemy graf **G** (skierowany lub nieskierowany), w którym wszystkie krawędzie zaetykietowano wartościami reprezentującymi ich długości.
- **Długość** (ang. *distance*) danej drogi stanowi wartość sumy etykiet związanych z nią krawędzi. Minimalna odległość z wierzchołka **u** do wierzchołka **v** to minimalna długość którejś z dróg od **u** do **v**.

Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych dróg.

- Traktujemy wierzchołek **s** jako wierzchołek źródłowy. W etapie pośrednim wykonywania algorytmu w grafie **G** istnieją tzw. **wierzchołki ustalone** (ang. *settled*), tzn. takie dla których znane są odległości minimalne. W szczególności zbiór takich wierzchołków zawiera również wierzchołek **s**.
- Dla nieustalonego wierzchołka **v** należy zapamiętać długość **najkrótszej drogi specjalnej** (ang. *special path*) czyli takiej która rozpoczyna się w wierzchołku źródłowym, wiedzie przez ustalone wierzchołki, i na ostatnim etapie przechodzi z obszaru ustalonego do wierzchołka **v**.



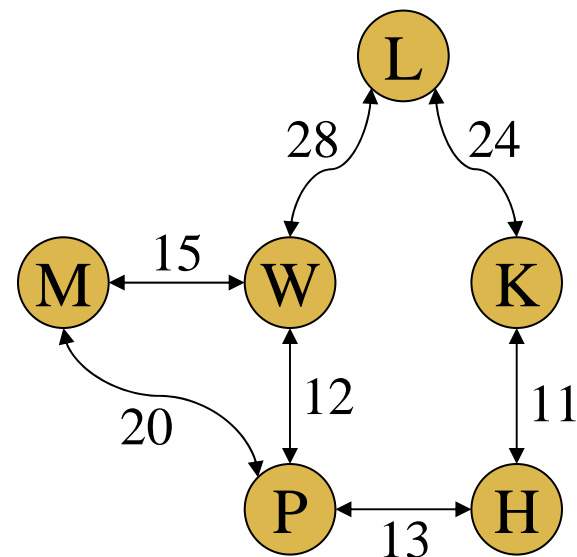
Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych dróg.

- Dla każdego wierzchołka u zapamiętujemy wartość $\mathbf{dist}(u)$.
- Jeśli u jest wierzchołkiem ustalonym, to $\mathbf{dist}(u)$ jest długością najkrótszej drogi ze źródła do wierzchołka u .
- Jeśli u nie jest wierzchołkiem ustalonym, to $\mathbf{dist}(u)$ jest długością drogi specjalnej ze źródła do u .
- Na czym polega **ustalanie wierzchołków**:
 - znajdujemy wierzchołek v który jest nieustalony ale posiada najmniejszą $\mathbf{dist}(v)$ ze wszystkich wierzchołków nieustalonych
 - przyjmujemy wartość $\mathbf{dist}(v)$ za minimalną odległość z s do v
 - dostosowujemy wartości wszystkich $\mathbf{dist}(u)$ dla innych wierzchołków, które nie są ustalone, wykorzystując fakt, że wierzchołek v jest już ustalony.
 - Czyli porównujemy stare $\mathbf{dist}(u)$ z wartością $\mathbf{dist}(v) + \mathbf{etykieta}(v, u)$ jeżeli taka (v, u) krawędź istnieje.
- Czas wykonania algorytmu jest $O(m \log n)$.

Algorytm Dijkstry znajdowania najkrótszych dróg.

Etapy wykonania algorytmu Dijkstry

MIASTO	ETAPY ustalania wierzchołków				
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
H	0*	0*	0*	0*	0*
P	13	13	13*	13*	13*
M	INF	INF	33	33	33*
W	INF	INF	25	25*	25*
L	INF	35	35	35	35
K	11	11*	11*	11*	11*



Indukcyjny dowód poprawności algorytmu

- W celu wykazania poprawności algorytmu Dijkstry należy przyjąć, że etykiety krawędzi są nieujemne.
- Indukcyjny dowód poprawności względem k prowadzi do stwierdzenia że:
 1. dla każdego wierzchołka ustalonego u , wartość $\text{dist}(u)$ jest minimalną odległością z s do u , a najkrótsza droga do u składa się tylko z wierzchołków ustalonych.
 2. dla każdego nieustalonego wierzchołka u , wartość $\text{dist}(u)$ jest minimalną długością drogi specjalnej z s do u (jeśli droga nie istnieje wartość wynosi INF).

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu

□ Podstawa:

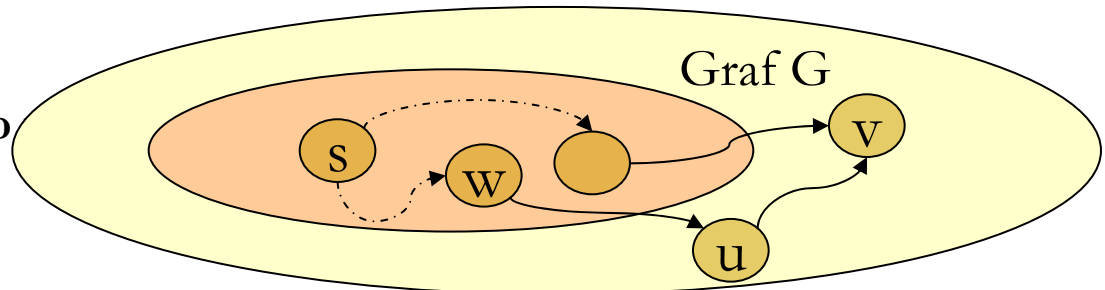
- Dla $k=1$ wierzchołek s jest jedynym wierzchołkiem ustalonym. Inicjalizujemy $\text{dist}(s)$ wartością 0 , co spełnia warunek (1).
- Dla każdego innego wierzchołka u , $\text{dist}(u)$ jest inicjalizowane wartością etykiety krawędzi (s, u) , o ile taka istnieje. Jeżeli nie istnieje, wartością inicjalizacji jest INF .
Zatem spełniony jest również warunek (2).

Indukcyjny dowód poprawności algorytmu

□ Krok indukcyjny:

- Załóżmy, że warunki (1) i (2) są spełnione po ustaleniu k wierzchołków oraz niech v będzie $(k+1)$ ustalonym wierzchołkiem.
- Warunek (1) jest wciąż spełniony ponieważ $\text{dist}(v)$ jest najmniejszą długością drogi z s do v .
 - Załóżmy, że tak nie jest. Musiała by więc istnieć hipotetyczna krótsza droga do v wiodąca przez w i u . Jednakże wierzchołek v został obrany jako $k+1$ ustalony, co oznacza, że w tym momencie $\text{dist}(u)$ nie może być mniejsze od $\text{dist}(v)$, gdyż wówczas jako $(k+1)$ wierzchołek wybrany zostałby wierzchołek u .
 - Na podstawie warunku (2) hipotezy indukcyjnej wiadomo, że $\text{dist}(u)$ jest minimalną długością drogi specjalnej wiodącej do u . Jednak droga z s przez w do u jest drogą specjalną, tak więc jej długość równa jest co najmniej $\text{dist}(u)$. Stąd domniemana krótsza droga z s do v wiodąca przez w i u ma długość równą co najmniej $\text{dist}(v)$, ponieważ pierwsza jej część, - z s do u - ma długość $\text{dist}(u)$, a $\text{dist}(u) \geq \text{dist}(v)$. Stąd warunek (1) jest spełniony dla $k+1$ wierzchołków.

Hipotetyczna krótsza droga do wiodąca przez w i u .

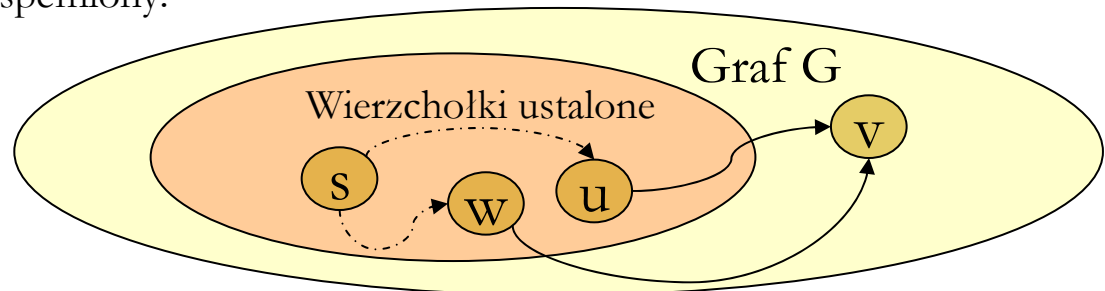


Indukcyjny dowód poprawności algorytmu

□ Krok indukcyjny – ciąg dalszy:

- Teraz należy pokazać, że warunek (2) jest spełniony po dodaniu do wierzchołków ustalonych wierzchołka v .
 - Weźmy pod uwagę pewien wierzchołek u , który wciąż pozostaje nieustalony po dodaniu v do wierzchołków ustalonych. W najkrótszej drodze specjalnej do u musi istnieć pewien wierzchołek przedostatni. Wierzchołkiem tym może być zarówno v , jak i pewien inny wierzchołek w .
 - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest v . Długość drogi z s przez v do u wynosi $\text{dist}(v) + \text{wartość etykiety } v \rightarrow u$.
 - Przyjmijmy, że wierzchołkiem przedostatnim jest w . Na podstawie warunku (1) hipotezy indukcyjnej można stwierdzić, że najkrótsza droga z s do w składa się jedynie z wierzchołków, które zostały ustalone przed v , stąd wierzchołek v nie występuje w tej drodze.
 - A więc długość drogi specjalnej do u się nie zmienia po dodaniu v do wierzchołków ustalonych.
 - Ponieważ w momencie ustalania wierzchołka v przeprowadzona jest operacja dostosowywania $\text{dist}(u)$, warunek (2) jest spełniony.

Dwie możliwości określenia przedostatniego wierzchołka w drodze specjalnej do u .



Algorytm Floyda-Warshalla znajdowania najkrótszych dróg.

- Jeśli potrzebne jest poznanie minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków w grafie o n wierzchołkach, które posiadają etykiety o wartościach nieujemnych, można uruchomić **algorytm Dijkstry** dla **każdego z n wierzchołków** jako wierzchołka **źródłowego**.
- Czas wykonania algorytmu Dijkstry wynosi $O(m \log n)$, gdzie m oznacza większą wartość z liczby wierzchołków i liczby krawędzi. Znalezienie w ten sposób minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków zajmuje czas **rzędu $O(m n \log n)$** .
- Jeśli m jest bliskie swojej maksymalnej wartości $m \approx n^2$ to można skorzystać z implementacji algorytmu Dijkstry który działa w czasie $O(n^2)$. Wykonanie go n razy daje czas **rzędu $O(n^3)$** .
- Istnieje inny algorytm znajdowania minimalnych odległości między wszystkimi parami wierzchołków, noszący nazwę **algorytmu Floyda-Warshalla**.
- Jego wykonanie zajmuje czas **rzędu $O(n^3)$** . Operuje na macierzach sąsiedztwa a nie listach sąsiedztwa i jest koncepcyjnie prostszy.

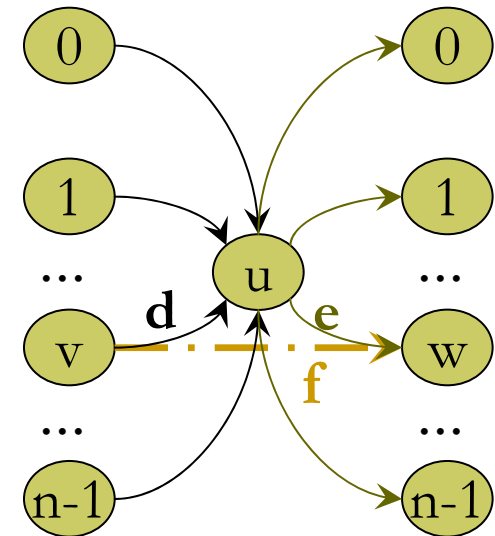
Algorytm Floyda-Warshalla znajdowania najkrótszych dróg.

- Podstawa algorytmu jest działanie polegające na rozpatrywaniu po kolei każdego wierzchołka grafu jako **elementu centralnego** (ang. *pivot*).
- Kiedy wierzchołek **u** jest elementem centralnym, staramy się wykorzystać fakt, że **u** jest wierzchołkiem pośrednim między wszystkimi parami wierzchołków.
- Dla każdej pary wierzchołków, na przykład **v** i **w**, jeśli suma etykiet krawędzi **(v, u)** oraz **(u, w)** (na rysunku **d+e**), jest mniejsza od bieżąco rozpatrywanej etykiety **f** krawędzi wiodącej od **v** do **w**, to wartość **f** jest zastępowana wartością **d+e**.

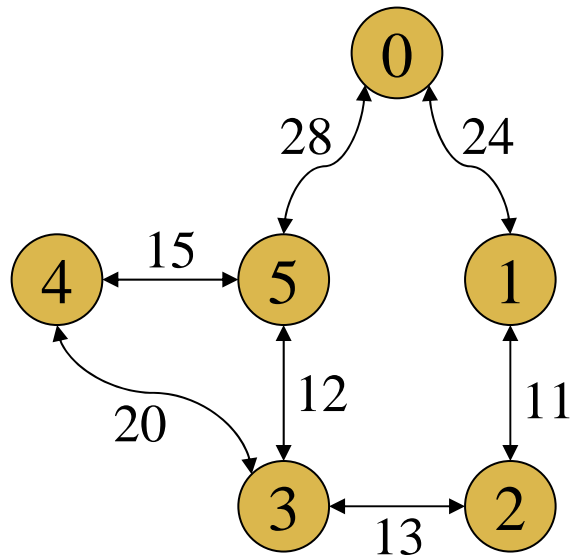
```
Node u, v, w;
```

```
for (v = 0; w < MAX; v++)
  for (w=0; w < MAX; w++)
    dist[v][w] = edge[v][w];
for (u=0; u < MAX; u++)
  for (v=0; v < MAX; v++)
    for (w=0; w < MAX; w++)
      if( dist[v][u]+dist[u][w] < dist[v][w])
        dist[v][w] = dist [v][u] + dist [u][w];
```

edge[v][w] –etykieta krawędzi, wierzchołki numerowane



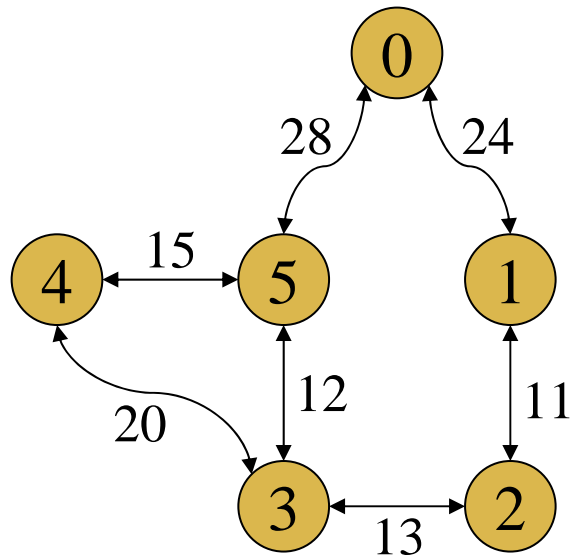
Algorytm Floyda-Warshalla - Przykład



Macierz edge, która odzwierciedla początkową postać macierzy dist

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	INF	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	INF
2	INF	11	0	13	INF	INF
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	INF	INF	12	15	0

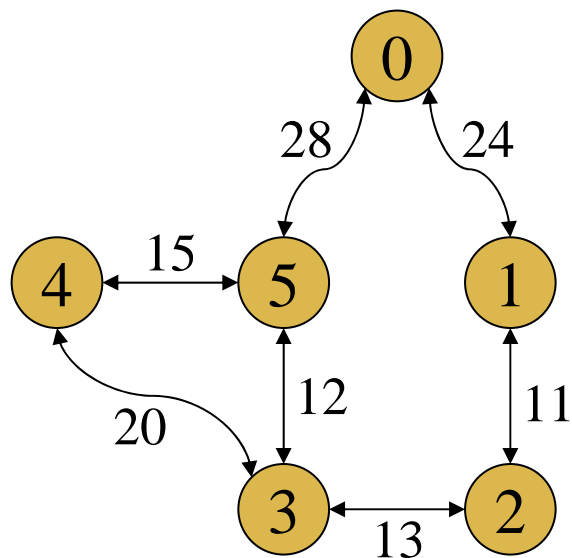
Algorytm Floyda-Warshalla - Przykład



Macierz dist, po użyciu wierzchołka 0 jako elementu centralnego

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	INF	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	52
2	INF	11	0	13	INF	INF
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	52	INF	12	15	0

Algorytm Floyda-Warshalla - Przykład

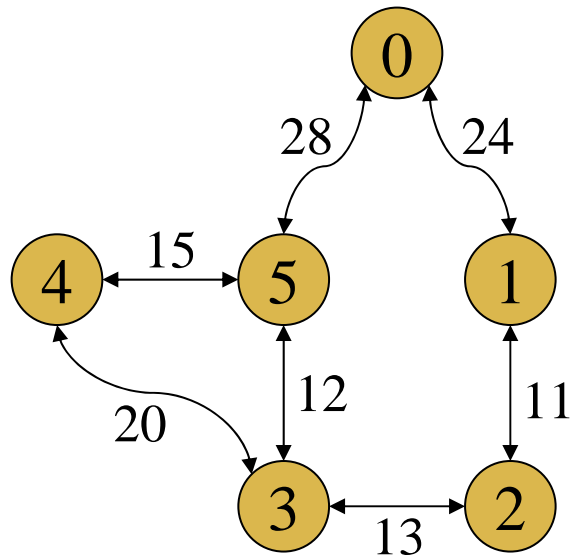


Macierz dist, po użyciu wierzchołka 1 jako elementu centralnego

	0	1	2	3	4	5
0	0	24	35	INF	INF	28
1	24	0	11	INF	INF	52
2	35	11	0	13	INF	63
3	INF	INF	13	0	20	12
4	INF	INF	INF	20	0	15
5	28	52	63	12	15	0

itd... itd...

Algorytm Floyda-Warshalla - Przykład



Ostateczna postać macierzy dist.

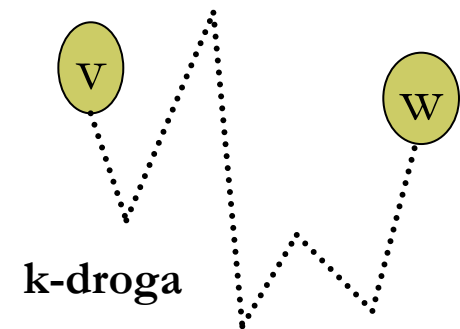
	0	1	2	3	4	5
0	0	24	35	40	43	28
1	24	0	11	24	44	52
2	35	11	0	13	33	25
3	40	24	13	0	20	12
4	43	44	33	20	0	15
5	28	36	25	12	15	0

Uzasadnienie poprawności algorytmu Floyda-Warshalla

- Na dowolnym etapie działania algorytmu **Floyda-Warshalla** odległość z wierzchołka **v** do wierzchołka **w** stanowi długość najkrótszej z tych dróg, które wiedzą jedynie przez wierzchołki użyte dotąd jako elementy centralne.
- Ponieważ wszystkie wierzchołki zostają w końcu użyte jako elementy centralne, elementy **dist[v][w]** zawierają po zakończeniu działań minimalne długości wszystkich możliwych dróg.
- Definiujemy **k**-drogę z wierzchołka **v** do wierzchołka **w** jako drogę z **v** do **w** taką, że żaden jej wierzchołek pośredni nie ma numeru wyższego od **k**.
- Należy zauważyć, że nie ma ograniczenia odnośnie tego, że **v** lub **w** mają mieć wartość **k** lub mniejszą.
- **k=-1** oznacza że droga nie posiada wierzchołków pośrednich.

numery wyższe od **k**

numery niższe od **k**



Dowód indukcyjny

□ Teza indukcyjna $S(k)$:

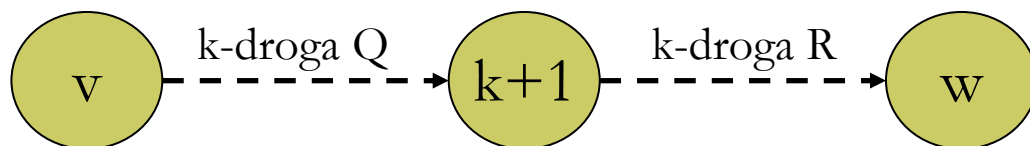
- jeżeli etykiety krawędzi mają wartości nieujemne, to po przebiegu k – pętli, element $\text{dist}[v][w]$ ma wartość najkrótszej k – drogi z v do w lub ma wartość INF , jeżeli taka droga nie istnieje.

□ Podstawa:

- Podstawą jest warunek $k = -1$. Krawędzie i drogi składające się z pojedynczego wierzchołka są jedynymi (-1) drogami.

□ Krok indukcyjny

- Załóżmy że $S(k)$ jest spełnione i rozważmy co się dzieje z elementami $\text{dist}[v][w]$ w czasie $k+1$ przebiegu pętli.
- Załóżmy, że P jest najkrótszą $(k+1)$ – drogą wiodącą z v do w . Mamy do czynienia z dwoma przypadkami, w zależności czy droga P prowadzi przez wierzchołek $k+1$.



k -drogę P można rozbić na dwie k -drogi, Q oraz R .

Dowód indukcyjny

□ Przypadek 1:

- Jeżeli P jest k -drogą, to znaczy, kiedy P nie wiedzie przez wierzchołek $k+1$, to na podstawie hipotezy indukcyjnej wartość elementu $\text{dist}[v][w]$ jest równa długości P po zakończeniu k -tej iteracji. Nie można zmienić wartości $\text{dist}[v][w]$ podczas przebiegu wykonywanego dla wierzchołka $k+1$ traktowanego jako element centralny, gdyż nie istnieją żadne krótsze $(k+1)$ -drogi.

□ Przypadek 2:

- Jeżeli P jest $(k+1)$ -drogą, można założyć, że P przechodzi przez wierzchołek $k+1$ tylko raz, gdyż cykl nigdy nie może spowodować zmniejszenia odległości (przy założeniu że wszystkie etykiety mają wartości nieujemne).
- Stąd droga P składa się z k -drogi Q , wiodącej od wierzchołka v do $k+1$, oraz k -drogi R , wiodącej od wierzchołka $k+1$ do w . Na podstawie hipotezy indukcyjnej wartości elementów $\text{dist}[v][k+1]$ oraz $\text{dist}[k+1][w]$ będą długościami dróg odpowiednio, Q i R , po zakończeniu k -tej iteracji.

Dowód indukcyjny

- Ostatecznie wnioskujemy, że w $(k+1)$ przebiegu, wartością elementu $\text{dist}[v][w]$ staje się długość najkrótszej $(k+1)$ -drogi dla wszystkich wierzchołków v oraz w .
- Jest to twierdzenie $S(k+1)$, co oznacza koniec kroku indukcyjnego.
- Weźmy teraz, że $k=n-1$. Oznacza to, że wiemy iż po zakończeniu wszystkich n przebiegów, wartość $\text{dist}[v][w]$ będzie minimalną odległością dowolnej $(n-1)$ -drogi wiodącej z wierzchołka v do w . Ponieważ każda droga jest $(n-1)$ drogą, więc $\text{dist}[v][w]$ jest minimalną długością drogi wiodącej z wierzchołka v do w .

Podsumowanie informacji o algorytmach grafowych

PROBLEM	ALGORYTM(Y)	CZAS WYKONANIA
Minimalne drzewo rozpinające	Algorytm Kruskala	$O(m \log n)$
Znajdowanie cykli	Przeszukiwanie w głąb	$O(m)$
Uporządkowanie topologiczne	Przeszukiwanie w głąb	$O(m)$
Osiągalność w przypadku pojedynczego źródła	Przeszukiwanie w głąb	$O(m)$
Spójne składowe	Przeszukiwanie w głąb	$O(m)$
Najkrótsza droga dla pojedyncz. źródła	Algorytm Dijskry	$O(m \log n)$
Najkrótsza droga dla wszystkich par	Algorytm Dijskry	$O(m n \log n)$
	Algorytm Floyd	$O(n^3)$