Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 6b:
Model danych oparty na drzewach

http://hibiscus.if.uj.edu.pl/~erichter/Dydaktyka2010/TPI-2010

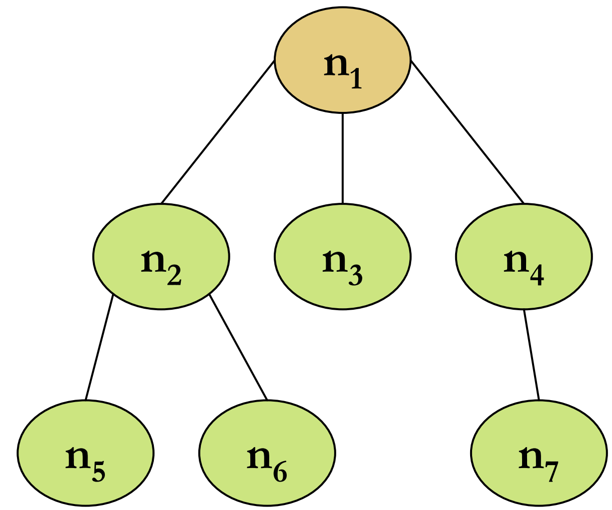
Model danych oparty na drzewach

- Istnieje wiele sytuacji w których przetwarzane informacje mają strukturę hierarchiczną lub zagnieżdżoną, jak drzewo genealogiczne lub diagram struktury organizacyjnej.

- Abstrakcje modelujące strukturę hierarchiczną nazywamy **drzewem** – jest to jeden z najbardziej podstawowych modeli danych w informatyce.

Podstawowa terminologia

- **Drzewa** są zbiorami punktów, zwanych **węzłami** lub **wierzchołkami**, oraz połączeń, zwanych **krawędziami**.
- Krawędź łączy dwa różne węzły.
- Aby struktura zbudowana z węzłów połączonych krawędziami była drzewem musi spełniać pewne warunki:
  - W każdym drzewie wyróżniamy jeden węzeł zwany **korzeniem n_1** (ang. **root**)
  - Każdy węzeł **c** nie będący korzeniem jest połączony krawędzią z innym węzłem zwanym **rodzicem p** (ang. **parent**) węzła **c**. Węzeł **c** nazywamy także dzieckiem (ang. **child**) węzła **p**.
  - Każdy węzeł **c** nie będący korzeniem ma dokładnie jednego rodzica.
  - Każdy węzeł ma dowolną liczbę dzieci.
  - Drzewo jest **spójne** (ang. **connected**) w tym sensie że jeżeli rozpoczniemy analizę od dowolnego węzła **c** nie będącego korzeniem i przejdziemy do rodzica tego węzła, następnie do rodzica tego rodzica, itd., osiągniemy w końcu korzeń.



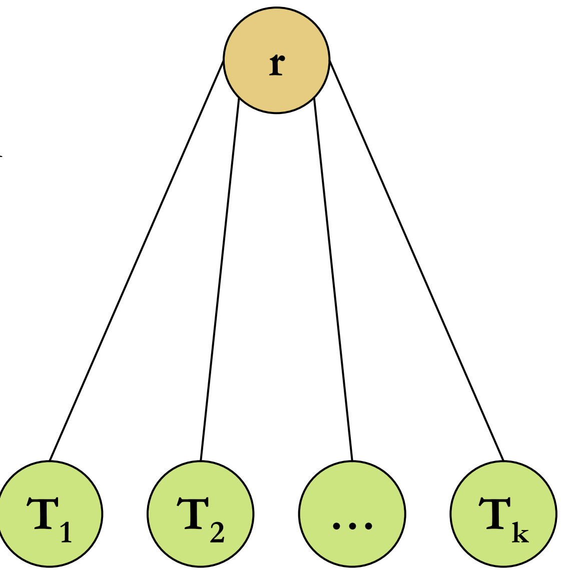
n_1 = rodzic n_2, n_3, n_4

n_2 = rodzic n_5, n_6

n_6 = dziecko n_2

Rekurencyjna definicja drzew

- **Podstawa**: Pojedynczy węzeł **n** jest drzewem. Mówimy że **n** jest korzeniem drzewa złożonego z jednego węzła.
- **Indukcja**: Niech **r** będzie nowym węzłem oraz niech $T_1, T_2, \ldots, T_k$ będą drzewami zawierającymi odpowiednio korzenie $c_1, c_2, \ldots, c_k$. Załóżmy że żaden węzeł nie występuje więcej niż raz w drzewach $T_1, T_2, \ldots, T_k$, oraz że **r**, będący „nowym” węzłem, nie występuje w żadnym z tych drzew. Nowe drzewo **T** tworzymy z węzła **r** i drzew $T_1, T_2, \ldots, T_k$ w następujący sposób:
  - węzeł **r** staje się korzeniem drzewa **T**;
  - dodajemy **k** krawędzi, po jednej łącząc **r** z każdym z węzłów $c_1, c_2, \ldots, c_k$, otrzymując w ten sposób strukturę w której każdy z tych węzłów jest dzieckiem korzenia **r**. Inny sposób interpretacji tego kroku to uczynienie z węzła **r** rodzica każdego z korzeni drzew $T_1, T_2, \ldots, T_k$.



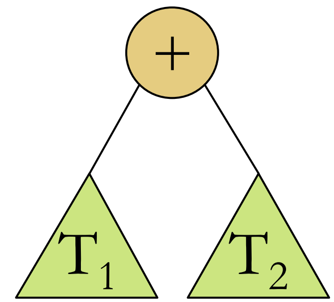
Podstawowa terminologia

- Relacje rodzic-dziecko można w naturalny sposób rozszerzyć do **relacji przodków i potomków**.
- **Ścieżką** nazywamy ciąg węzłów, takich że poprzedni jest rodzicem następnego. Węzły na ścieżce to potomkowie (przodkowie). Jeżeli ciąg węzłów (n_1, n_2, …, n_k) jest ścieżka, to **długość ścieżki** wynosi **k-1**. (długość ścieżki dla pojedynczego węzła wynosi **0**). Jeżeli ścieżka ma długość **>=1**, to węzeł m_1 nazywamy właściwym przodkiem węzła m_k, a węzeł m_k właściwym potomkiem węzła m_1.
- W dowolnym drzewie **T**, dowolny węzeł **n** wraz z jego potomkami nazywamy **poddrzewem**.
- **Liściem** (ang. **leaf**) nazywamy węzeł drzewa który nie ma potomków.
- **Węzeł wewnętrzny** to taki węzeł który ma jednego lub większą liczbę potomków.
- **Wysokość drzewa** to długość najdłuższej ścieżki od korzenia do liścia.
- **Głębokość węzła** to długość drogi od korzenia do tego węzła.

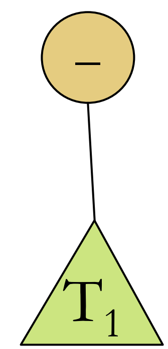
Drzewa zaetykietowane i drzewa wyrażeń.

- **Drzewo zaetykietowane** to takie w którym z każdym węzłem drzewa związana jest jakaś etykieta lub wartość. Możemy reprezentować wyrażenia matematyczne za pomocą drzew zaetykietowanych.
- Definicja drzewa zaetykietowanego dla wyrażeń arytmetycznych zawierających operandy dwuargumentowe +,-,•,/ oraz operator jednoargumentowy -.
  - **Podstawa:** Pojedynczy operand niepodzielny jest wyrażeniem.

    Reprezentujące go drzewo składa się z pojedynczego węzła, którego etykietą jest ten operand.
  - **Indukcja:** Jeśli $\mathbf{E_1}$ oraz $\mathbf{E_2}$ są wyrażeniami reprezentowanymi odpowiednio przez drzewa $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, wyrażenie $\mathbf{(E_1 + E_2)}$ reprezentowane jest przez drzewo którego korzeniem jest węzeł o etykiecie **+**. Korzeń ten ma dwoje dzieci, którego korzeniami są odpowiednio korzenie drzew $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$.

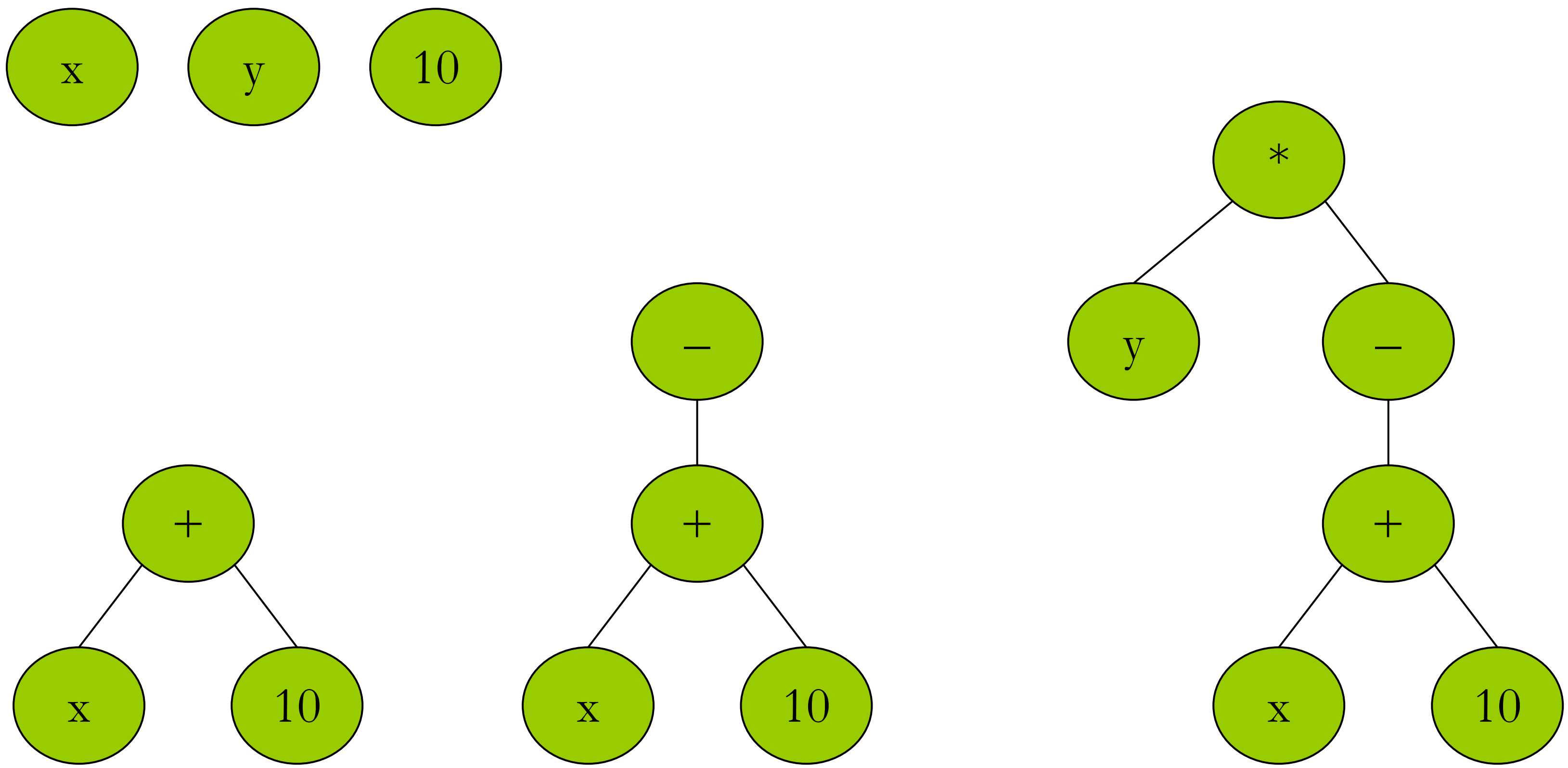


$E_1 + E_2$



$(– E_1)$

Konstrukcja drzew wyrażeń



(x + 10)　　(- (x + 10))　　(y * - (x + 10))

Struktura danych dla drzew

- Do reprezentowania drzew możemy używać wiele różnych struktur danych. Wybór odpowiedniej struktury zależy od konkretnych operacji które planujemy wykonać na budowanych drzewach.
- **Przykład:**
  - Jeżeli jedynym planowanym działaniem jest lokalizowanie rodziców danych węzłów, zupełnie wystarczającą będzie struktura składająca się z etykiety węzła i wskaźnika do struktury reprezentującej jego rodzica.
- W ogólności, węzły drzewa możemy reprezentować za pomocą struktur, których pola łączą węzły w drzewa w sposób podobny do łączenia za pomocą wskaźnika do struktury korzenia.

Struktura danych dla drzew

- Kiedy mówimy o reprezentowaniu drzew, w pierwszej kolejności mamy na myśli sposób reprezentowania węzłów.
- Różnica miedzy reprezentacjami dotyczy miejsca w pamięci komputera gdzie przechowywana jest struktura zawierająca węzły.
- W języku **C** możemy stworzyć przestrzeń dla struktur reprezentujących wierzchołki za pomocą funkcji **malloc** ze standartowej biblioteki **stdhlib.h**, co powoduje, że do umieszczonych w pamięci węzłów mamy dostęp tylko za pomocą wskaźników.
- Rozwiązaniem alternatywnym jest stworzenie tablicy struktur i wykorzystanie jej elementów do reprezentowania węzłów. Możemy uzyskać dostęp do węzłów nie wykorzystując ścieżek w drzewie.
- Wadą jest z góry określony rozmiar tablicy (musi istnieć ograniczenie maksymalnego rozmiaru drzewa).

Tablica wskaźników jako reprezentacja drzewa

- Jednym z najprostszych sposobów reprezentowania drzewa jest wykorzystanie dla każdego węzła struktury składającej się z pola lub pól reprezentujących etykietę oraz tablicy wskaźników do dzieci tego węzła.

```
typedef struct NODE *pNODE
struct NODE{
    int info;
    pNODE children[BF];
};
```

info			
p_0	p_1	…	P_{bf-1}

- **Info** reprezentuje **etykietę węzła**.
- Stała **bf** jest **rozmiarem tablicy wskaźników.** Reprezentuje maksymalną liczbę dzieci dowolnego węzła, czyli **czynnik rozgałęzienia** (ang. **branching factor**).
- **i**-ty element tablicy reprezentującej węzeł zawiera wskaźnik do **i**-tego dziecka tego węzła.
- Brakujące połączenia możemy reprezentować za pomocą wskaźnika pustego **NULL**.

Reprezentacje drzewa

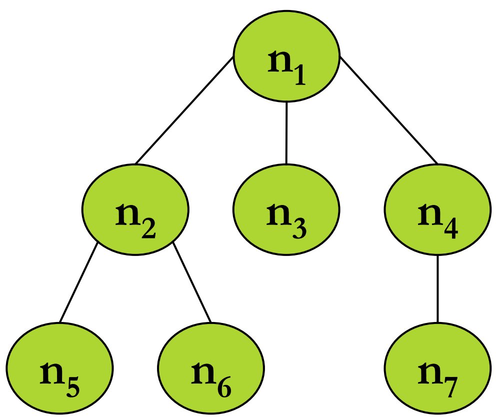
- Wykorzystujemy **listę jednokierunkową** reprezentującą dzieci węzła. Przestrzeń zajmowana przez listę jest dla węzła proporcjonalna do liczby jego dzieci.
- Znaczącą wadą tego rozwiązania jest efektywność czasowa – uzyskanie dostępu do **i**-tego dziecka wymaga czasu ***O*(i),** ponieważ musimy przejść przez całą listę o długości **i-1**, by dostać się do **i**-tego węzła.
- Dla porównania, jeżeli zastosujemy tablicę wskaźników do dzieci, do **i**-tego dziecka dostajemy się w czasie ***O*(1),** niezależnie od wartości **i.**

Reprezentacje drzewa

- W reprezentacji drzew zwanej **skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** (ang. left-most-child-right-sibling), w każdym węźle umieszczamy jedynie wskaźniki do skrajnie lewego dziecka; węzeł nie zawiera wskaźników do żadnego ze swoich pozostałych dzieci.
- Aby odnaleźć drugi i wszystkie kolejne dzieci węzła **n**, tworzymy listę jednokierunkowa tych dzieci w której każde dziecko **c** wskazuje na znajdujące się bezpośrednio po jego prawej stronie dziecko węzła **n**.
- Wskazany węzeł nazywamy **prawym elementem siostrzanym** węzła **c**.

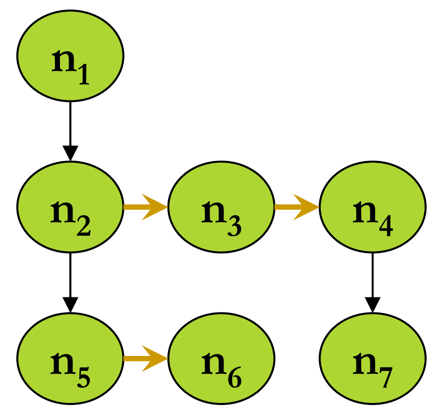
Reprezentacje drzewa

Drzewo złożone z 7 węzłów



info – etykieta
leftmostChild – informacja o węźle
rightSibling – część listy jednokierunkowej dzieci rodzica tego węzła

Reprezentacja skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany



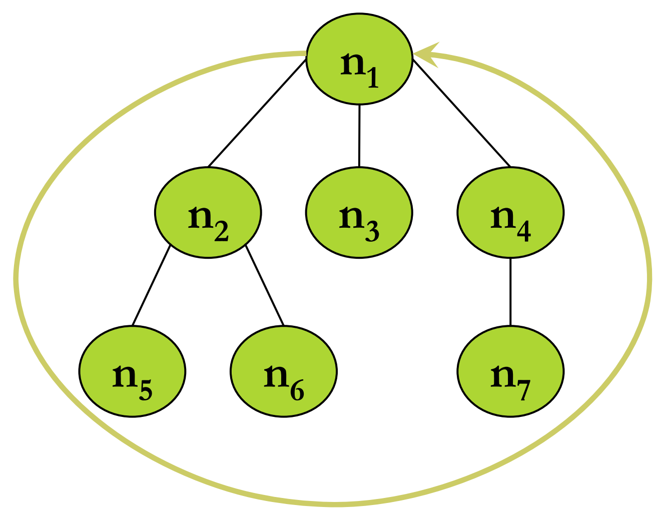

```
typedef struct NODE *pNODE;
struct NODE{
        int info;
        pNODE leftmostChild, rightSibling;
};
```

Reprezentacje drzewa

- **Reprezentacja oparta na tablicy wskaźników** umożliwia nam dostęp do **i**-tego dziecka dowolnego węzła w czasie ***O*(1)**. Taka reprezentacja wiąże się jednak ze znacznym marnotrawstwem przestrzeni pamięciowej, jeśli tylko kilka węzłów ma wiele dzieci. W takim wypadku większość wskaźników w tablicy **children** będzie równa **NULL**.
- **Reprezentacja skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** wymaga mniejszej przestrzeni pamięciowej. Nie wymaga również istnienia maksymalnego czynnika rozgałęzienie węzłów. Możemy reprezentować węzły z dowolna wartością tego czynnika, nie modyfikując jednocześnie struktury danych.

Rekurencja w drzewach

- Użyteczność drzew wynika z liczby możliwych operacji rekurencyjnych, które możemy na nich wykonać w naturalny i jasny sposób (chcemy drzewa przeglądać).
- Prosta rekurencja zwraca etykiety węzłów w **porządku wzdłużnym** (ang. **pre-order listing**), czyli: korzeń, lewe poddrzewo, prawe poddrzewo.
- Inną powszechnie stosowaną metodą do przeglądania węzłów drzewa jest tzw. **przeszukiwanie wsteczne** (ang. **post-order listing**), czyli lewe poddrzewo, prawe poddrzewo, korzeń.



Drzewa binarne

- **W drzewie binarnym węzeł może mieć co najwyżej dwoje bezpośrednich potomków.**
- **Rekurencyjna definicja drzewa binarnego:**
- **Podstawa**:
  - Drzewo puste jest drzewem binarnym.
- **Indukcja**:
  - Jeśli **r** jest węzłem oraz $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$ są drzewami binarnymi, istnieje drzewo binarne z korzeniem **r**, lewym poddrzewem $\mathbf{T_1}$ i prawym poddrzewem $\mathbf{T_2}$. Korzeń drzewa $\mathbf{T_1}$ jest lewym dzieckiem węzła **r**, chyba że $\mathbf{T_1}$ jest drzewem pustym. Podobnie korzeń drzewa $\mathbf{T_2}$ jest prawym dzieckiem węzła **r**, chyba że $\mathbf{T_2}$ jest drzewem pustym.
  - Większość terminologii wprowadzonej przy okazji drzew stosuje się oczywiście też do drzew binarnych.
- **Różnica**: drzewa binarne wymagają rozróżnienia lewego od prawego dziecka, zwykle drzewa tego nie wymagają. Drzewa binarne to **NIE** są zwykle drzewa, w których węzły mogą mieć co najwyżej dwójkę dzieci.

Drzewa przeszukiwania binarnego

- Jest to zaetykietowane drzewo binarne dla którego etykiety należą do zbioru w którym możliwe jest zdefiniowanie relacji mniejszości.
- Dla każdego węzła **x** spełnione są następujące własność:
  - wszystkie węzły w lewym poddrzewie maja etykiety mniejsze od etykiety węzła **x**
  - wszystkie w prawym poddrzewie maja etykiety większe od etykiety węzła **x**.
- **Wyszukiwanie elementu:**
  - **Podstawa**:
    - Jeśli drzewo **T** jest puste, to na pewno nie zawiera elementu **x**.
    - Jeśli **T** nie jest puste i szukana wartość **x** znajduje się w korzeniu, drzewo zawiera **x**.
  - **Indukcja**:
    - Jeśli **T** nie jest puste, ale nie zawiera szukanego elementu **x** w korzeniu, niech **y** będzie elementem w korzeniu drzewa **T**.
    - Jeśli **x<y**, szukamy wartości **x** tylko w lewym poddrzewie korzenia **y**.
    - Jeśli **x>y**, szukamy wartości **x** tylko w prawym poddrzewie korzenia **y**.
- **Własność drzewa przeszukiwania binarnego gwarantuje, że szukanej wartości x na pewno nie ma w poddrzewie, którego nie przeszukujemy.**

Drzewa przeszukiwania binarnego

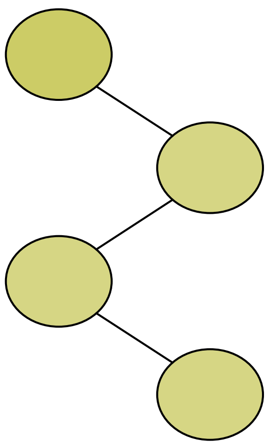
- **Wstawianie elementu:**
  - **Podstawa**:
    - Jeśli drzewo **T** jest drzewem pustym, zastępujemy **T** drzewem składającym się z pojedynczego węzła zawierającego element **x**.
    - Jeśli drzewo **T** nie jest puste oraz jego korzeń zawiera element **x**, to **x** znajduje się już w drzewie i nie wykonujemy żadnych dodatkowych kroków.
  - **Indukcja**:
    - Jeśli **T** nie jest puste i nie zawiera elementu **x** w swoim korzeniu, niech **y** będzie elementem w korzeniu drzewa **T**.
    - Jeśli **x<y**, wstawiamy wartość **x** do lewego poddrzewa **T**.
    - Jeśli **x>y**, wstawiamy wartość **x** do prawego poddrzewa **T**.

Drzewa przeszukiwania binarnego

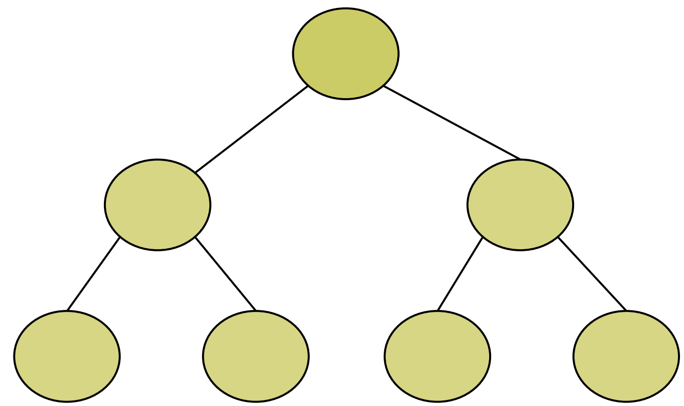
- **Usuwanie elementu:**
- Usuwanie elementu **x** z drzewa przeszukiwania binarnego jest zadaniem nieco bardziej skomplikowanym od znajdowania czy wstawiania danego elementu. Musimy zachować własność drzewa przeszukiwania binarnego.
- Lokalizujemy **x**, oznaczmy węzeł w którym się on znajduje poprzez **v**.
  - Jeśli drzewo nie zawiera **x** to nie robimy nic.
  - Jeżeli **v** jest liściem to go usuwamy.
  - Jeśli **v** jest wewnętrznym węzłem i węzeł ten ma tylko jedno dziecko, przypisujemy węzłowi **v** wartość **dziecka v**, a następnie usuwamy **dziecko v**. (W ten sposób że **dziecko dziecka v**, staje się **dzieckiem v**, a **rodzicem dziecka dziecka v** staje się **v**).
  - Jeżeli węzeł **v** ma dwoje dzieci, oznaczmy poprzez **y** najmniejszą wartość w prawym poddrzewie **v**. Następnie przypisujemy węzłowi **v** wartość **y**, i usuwamy **y** z prawego poddrzewa **v**.

Drzewa binarne

Zdegenerowane drzewo binarne



Pełne drzewo binarne



Wysokość drzewa złożonego z **k**-węzłów to **k-1**.
Czyli **h = *O*(k).**
Operacje insert, delete, find wymagają średnio ***O*(k)**.

Drzewo o wysokości **h** ma **k=2^{h+1}-1** węzłów.
Czyli **h = *O*(log k)**.
Operacje insert, delete, find wymagają średnio ***O*(log k)**.

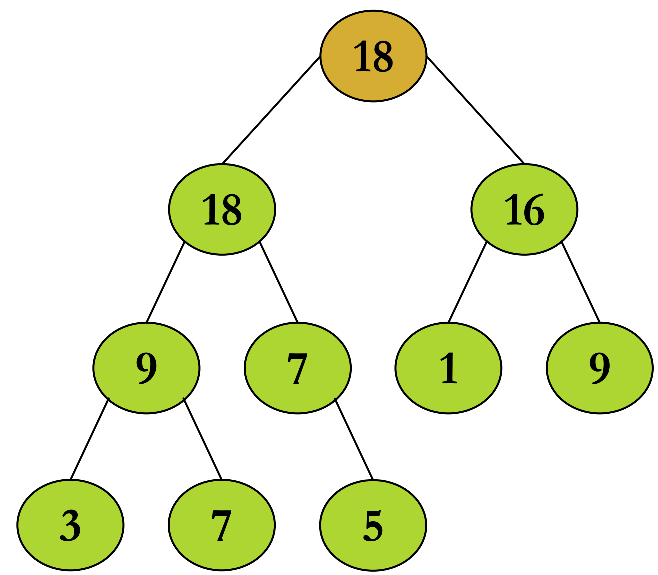
Słownik

- Często stosowaną w programach komputerowych strukturą danych jest zbiór, na którym chcemy wykonywać operacje:
  - wstawianie nowych elementów do zbioru (ang. **insert**)
  - usuwanie elementów ze zbioru (ang. **delete**)
  - wyszukiwanie jakiegoś elementu w celu sprawdzenia, czy znajduje się w danym zbiorze (ang. **find**)
- Taki zbiór będziemy nazywać **słownikiem** (niezależnie od tego jakie elementy zawiera). Drzewo przeszukiwania binarnego umożliwia stosunkowo efektywną **implementację** słownika.
- Czas wykonania każdej z operacji na słowniku reprezentowanym przez drzewo przeszukiwania binarnego złożone z **n** węzłów jest proporcjonalny do wysokości tego drzewa **h**.

Abstrakcyjny typ danych = słownik
Abstrakcyjna implementacja = drzewo przeszukiwania binarnego

Drzewa binarne częściowo uporządkowane

- Jest to **zaetykietowane drzewo binarne** o następujących własnościach:
  - Etykietami węzłów są elementy z przypisanymi priorytetami; priorytet może być wartością elementu lub przynajmniej jednego z jego komponentów.
  - Element przechowywany w węźle musi mieć co najmniej tak duży priorytet jak element znajdujący się w dzieciach tego węzła. Element znajdujący się w korzeniu dowolnego poddrzewa jest wiec największym elementem tego poddrzewa.



Kolejka priorytetowa

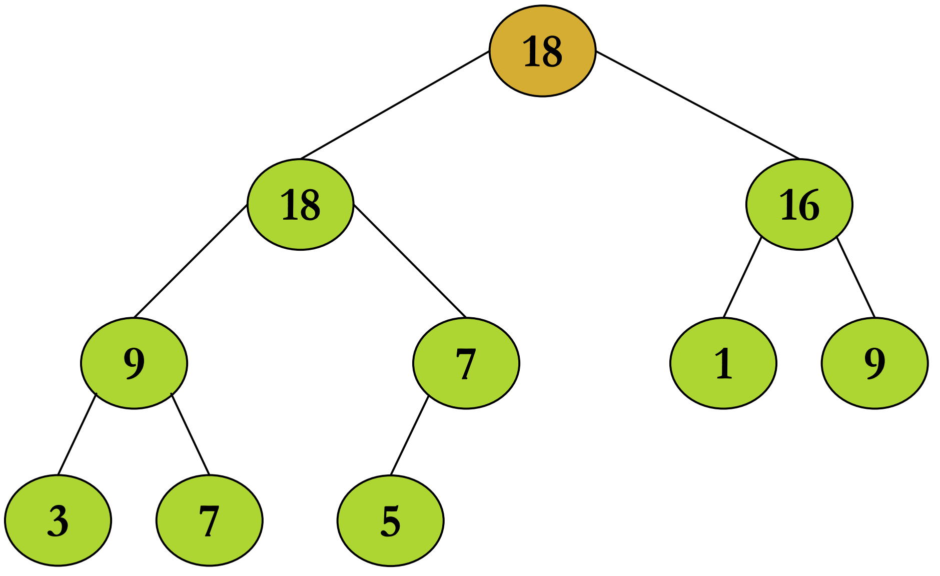
- Inny typ danych to zbiór elementów, z których każdy jest związany z określonym priorytetem. Przykładowo, elementy mogą być strukturami, zaś priorytet może być wartością jednego z pól takiej struktury. Chcemy wykonywać operacje:
  - wstawianie nowych elementów do zbioru (ang. **insert**)
  - znalezienie i usuniecie ze zbioru elementu o najwyższym priorytecie (ang. **deletemax**)
- Taki zbiór będziemy nazywać **kolejką priorytetowa** (niezależnie od tego jakie elementy zawiera).
- Drzewo binarne częściowo uporządkowane umożliwia stosunkowo efektywną **implementację** kolejki priorytetowej.
- Efektywna (używając kopca) tzn. ***O*(log n)**.

Abstrakcyjny typ danych = kolejka priorytetowa
Abstrakcyjna implementacja = zrównoważone drzewo binarne częściowo uporządkowane

Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane i kopce

- Mówimy że drzewo uporządkowane jest **zrównoważone** (ang. **balanced**), jeśli na wszystkich poziomach poza najniższym zawiera wszystkie możliwe węzły oraz liście na najniższym poziomie są ułożone od lewej strony. Spełnienie tego warunku oznacza, że jeśli drzewo składa się z **n** węzłów, to **żadna ścieżka od korzenia do któregokolwiek z tych węzłów nie jest dłuższa niż $\log_2 n$.**
- **Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane** można implementować za pomocą tablicowej struktury danych zwanej **kopcem** (ang. **heap**), która umożliwia szybką i zwięzłą implementację kolejek priorytetowych. Kopiec jest to po prostu tablica **A**, której sposób indeksowania reprezentujemy w specyficzny sposób. Zapisuje się kolejne poziomy, zawsze porządkując od lewej do prawej.

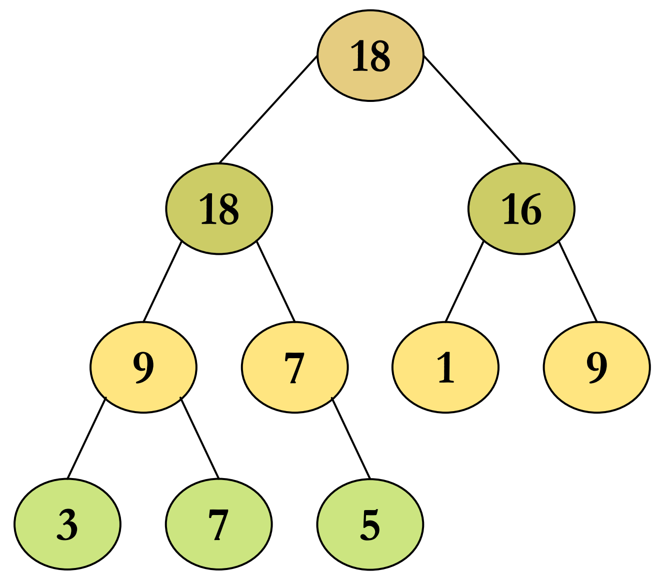
Zrównoważone drzewa częściowo uporządkowane i kopce



Stóg dla zrównoważonego częściowo uporządkowanego drzewa.

A[1]	A[2]	A[3]	A[4]	A[5]	A[6]	A[7]	A[8]	A[9]	A[10]
18	18	16	9	7	1	9	3	7	5

- Rozpoczynamy od korzenia **A[1]**; nie wykorzystujemy **A[0]**.
- Po korzeniu zapisujemy kolejne poziomy, w każdym poziomie węzły porządkujemy od lewej do prawej.
- Lewe dziecko korzenia znajduje się w **A[2]**; prawe dziecko korzenia umieszczamy w **A[3]**.
- W ogólności, lewe dziecko węzła zapisane w **A[i]** znajduje się w **A[2i]**, prawe dziecko tego samego węzła znajduje się w **A[2i+1]**, jeśli oczywiście te dzieci istnieją w drzewie uporządkowanym.
- Taka reprezentacja jest możliwa dzięki **własnościom drzewa zrównoważonego**.
- Z **własności drzewa częściowo uporządkowanego** wynika, że jeśli **A[i]** ma dwójkę dzieci, to **A[i]** jest co najmniej tak duże, jak **A[2i]** i **A[2i+1]**, oraz jeśli **A[i]** ma jedno dziecko, to **A[i]** nie jest mniejsze niż **A[2i]**.

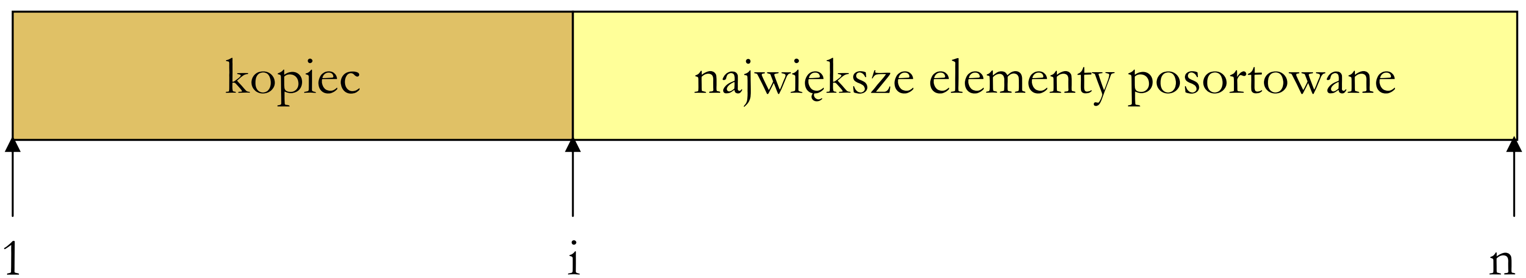


Operacje kolejki priorytetowej na kopcu

- Reprezentujemy kopiec za pomocą globalnej tablicy liczb całkowitych **A[1,...,MAX]**. Przypuśćmy, że mamy kopiec złożony z **n-1** elementów, który spełnia własność drzewa częściowo uporządkowanego.
- **Operacja insert::**
  - Dodajemy **n**-ty element w **A[n]**.
  - Własność drzewa uporządkowanego jest nadal spełniona we wszystkich elementach tablicy, poza (być może) elementem **A[n]** i jego rodzicem.
  - Jeśli element **A[n]** jest większy od elementu **A[n/2]**, czyli jego rodzica, musimy wymienić te elementy ze sobą (ta operacje nazywamy **sortowanie bąbelkowe w górę** (ang. **bubbleUp**).
  - Może teraz zaistnieć konflikt z własnością drzewa częściowo uporządkowanego pomiędzy elementem **A[n/2]** i jego rodzicem. Sprawdzamy i ewentualnie wymieniamy ich pozycje.
  - Itd.
- **Operacja deletemax:**
  - **A[1]** przypisujemy wartość **-∞** , po czym wykorzystujemy analogiczną procedurę co powyżej, czyli: **sortowanie bąbelkowe w dół** (ang. **bubbleDown**) niech **k** oznacza pozycję w tablicy liścia do którego zejdzie wartość **-∞**. **A[k]** przypiszmy wartość **A[n]**. Po czym wykonajmy procedure sortowania bąbelkowego w górę. Kopiec będzie teraz reprezentowany przez tablicę **A[1, …, n-1]**.
  - Wykonywanie operacji **insert** i **deletemax** wymaga czasu ***O*(log n)**.

Sortowanie przez kopcowanie – sortowanie za pomocą zrównoważonych drzew częściowo uporządkowanych

- Za pomocą tego algorytmu sortujemy tablice **A[1,…n]** w dwóch etapach:
  - algorytm nadaje tablicy **A** własność drzewa częściowo uporządkowanego
  - wielokrotnie wybiera największy z pozostałych elementów z kopca aż do momentu, w którym na kopcu znajduje się tylko jeden (najmniejszy) element co oznacza że tablica jest posortowana.



- Wykonanie operacji **sortowania przez kopcowanie** wymaga czasu $\boldsymbol{O}$**(nlogn)**. Dla porównania sortowanie przez wybieranie wymaga czasu $\boldsymbol{O}(\mathbf{n}^2)$.

Poziomy implementacji

- Dwa abstrakcyjne typy danych:

  słownik i kolejka priorytetowa
- Omówiliśmy dwie różne abstrakcyjne implementacje i wybraliśmy konkretne struktury danych dla każdej z tych abstrakcyjnych implementacji.

Abstrakcyjny typ danych	Abstrakcyjna implementacja	Struktura danych
Słownik	Drzewo przeszukiwania binarnego	Struktura lewe dziecko – prawe dziecko
Kolejka priorytetowa	Zrównoważone drzewo częściowo uporządkowane	Kopiec

Podsumowanie

- Ważnym modelem danych reprezentującym **informacje hierarchiczne** są **drzewa.**
- Do implementowania drzew możemy wykorzystać **wiele różnych struktur danych** (także takich) które wymagają połączenia tablic ze wskaźnikami. **Wybór struktury danych zależy od operacji wykonywanych na drzewie.**
- Dwiema najważniejszymi reprezentacjami węzłów drzewa są **skrajnie lewy potomek-prawy element siostrzany** oraz **tree** (tablica wskaźników do dzieci).
- Drzewa nadają się doskonale do stosowania na nich algorytmów i dowodów rekurencyjnych.
- **Drzewo binarne** jest jednym z wariantów modelu drzewa, w którym każdy węzeł ma (opcjonalne) lewe i prawe dziecko.
- **Drzewo przeszukiwania binarnego** jest zaetykietowanym drzewem binarnym, które spełnia ***„własność drzewa przeszukiwania binarnego”.***

Podsumowanie

- Będący abstrakcyjnym typem danych, **słownik** jest zbiorem, na którym można wykonywać operacje **insert, delete, find**. **Efektywna implementacja słownika to drzewo przeszukiwania binarnego**.
- Innym abstrakcyjnym typem danych jest **kolejka priorytetowa**, czyli zbiór na którym możemy wykonywać operacje **insert** i **deletemax**.
- **Drzewo częściowo uporządkowane** jest zaetykietowanym drzewem binarnym spełniającym warunek, że żadna etykieta w żadnym węźle nie jest mniejsza od etykiety żadnego z jego dzieci.
- **Zrównoważone drzewo częściowo uporządkowane** (węzły całkowicie wypełniają wszystkie poziomy od korzenia do najniższego, w którym zajmowane są tylko skrajnie lewe pozycje) możemy implementować za pomocą **kopca**. Struktura ta umożliwia implementację operacji na kolejce priorytetowej wykonywanych w czasie ***O*(log n)** oraz działającego w czasie ***O*(n log n)** algorytmu sortującego, zwanego sortowaniem przez kopcowanie.