Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 4:
Iteracja, indukcja i rekurencja

http://hibiscus.if.uj.edu.pl/~erichter/Dydaktyka2009/TPI-2009

Słowem wstępu

- Iteracja, indukcja i rekurencja to podstawowe zagadnienia pojawiające się przy wielu typach modeli danych, struktur danych czy algorytmów.

Iteracja

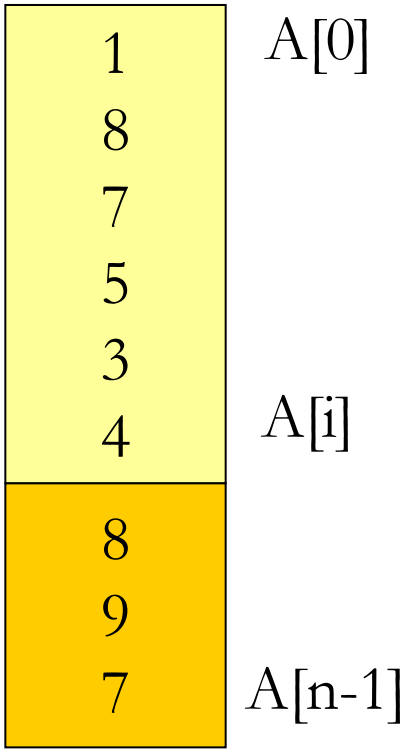
- Źródłem potęgi komputerów jest zdolność do wielokrotnego wykonywania tego samego zadania lub jego różnych wersji.
- W informatyce z pojęciem iteracji (ang. iteration) można się spotkać przy różnych okazjach. Wiele zagadnień związanych z modelami danych, np. listami, opiera się na powtórzeniach typu:
  - *lista jest albo pusta, albo składa się z jednego elementu poprzedzającego inny, kolejny element itd....*

Iteracja

- Programy i algorytmy wykorzystują iteracje do wielokrotnego wykonywania określonych zadań bez konieczności definiowania ogromnej liczby pojedynczych kroków, np. w przypadku zadania
  - *wykonaj dany krok 1000 razy.*
- Najprostszym sposobem wielokrotnego wykonania sekwencji operacji jest wykorzystanie konstrukcji iteracyjnej, jaką jest instrukcja **for** lub **while** w języku C.

Prosty przykład iteracji

- Mamy tablicę **n** liczb całkowitych, sprawdzamy czy jakaś liczba całkowita „**x**” jest elementem tej tablicy.
- Algorytm przegląda całą tablice, po napotkaniu **A[i] = x** kończy działanie.



- Jeżeli **A[0] = x** to algorytm ***O*(1)**.
- Jeżeli **A[n-1] = x** to algorytm ***O*(n)**.

- $E(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (c\,i + d) \bullet (1/n) = c \bullet (n-1) / 2 + d$
- $E(f) \sim c \bullet n/2$ dla dużego n

Iteratory

- Iteracje, poza organizacją pętli wykonujących obliczenia, używane są powszechnie do przetwarzania tablic. Możliwe jest przetwarzanie w kolejności indeksów malejących oraz w kolejności indeksów rosnących.
- Potrzebujemy też bardziej poręcznego mechanizmu, separującego logikę związaną z wyborem elementów od reszty kodu. Mechanizm taki zwany jest **iteratorem** lub **enumeratorem**, dostarcza możliwości iterowania po dowolnym zbiorze danych określonym przez jakąś strukturę danych lub inny bardziej ogólny schemat.
- Iterator ma umożliwić wykonywanie operacji: następny, poprzedni, ostatni, pierwszy, bieżący, itp…
- **Iterator to jest pewna koncepcja, implementacja zależy od języka programowania.**

Predykatory

- Iteratorem filtrującym nazywamy iterator działający na bazie innego iteratora i procedury klasyfikującej (akceptującej lub odrzucającej) elementy zwracane przez ten ostatni.
- Procedura taka nosi nazwę **predykatora**.
- Iterator filtrujący ignoruje wszystkie te elementy które nie spełniają warunków określonych przez predykator.

Rekurencja

- Zagadnieniem blisko związanym z powtórzeniami (iteracją) jest rekurencja (ang. recursion) – technika, w której definiuje się pewne pojęcie bezpośrednio lub pośrednio na podstawie tego samego pojęcia.
- Np. można zdefiniować pojęcie lista stwierdzeniem:
  - *lista jest albo pusta, albo jest sklejeniem elementu i listy*
- Definicje rekurencyjne są szeroko stosowane do specyfikacji gramatyk języków programowania (patrz następne wykłady).

Rekurencja

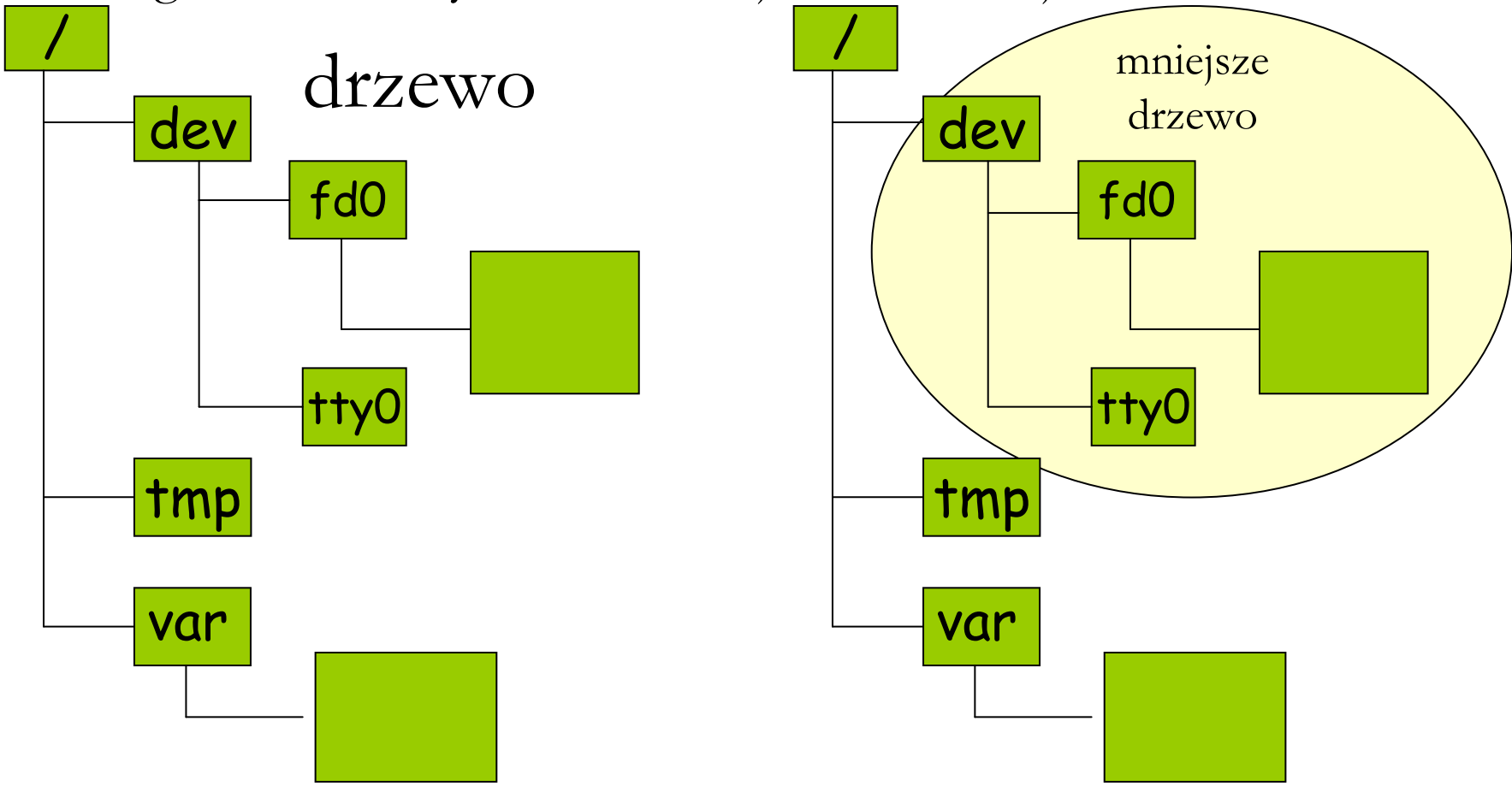
„ Żeby zrozumiec rekurencję trzeba najpierw zrozumieć rekurencję”

(autor nieznany)

- Rozpatrzmy system plików, jak na dysku komputera. W systemie tym istnieje katalog najwyższego poziomu (root), w którym znajdują się pliki i podkatalogi. Owa zagnieżdżona struktura bywa nazywana powszechnie drzewem katalogów (directory tree) – drzewo to zakorzenione jest w katalogu najwyższego poziomu, zaś pliki mogą być uważane za liście tego drzewa.

Rekurencja

Każda z gałęzi może być traktowana jak inne mniejsze drzewo.



Rekurencja

- Podobieństwo dwóch obiektów różniących się między sobą skalą lub granulacją jest interesującą koncepcją niezwykle użyteczną w rozwiązywaniu problemów.
- Strategia podziału oryginalnego problemu na „mniejsze" podproblemy tej samej natury - zwana strategią „dziel i zwyciężaj" (divide and conquer) – jest jednym z przykładów rekurencji.
- Rekurencja jest w pewnym sensie przykładem wielokrotnego wykorzystywania tych samych rzeczy: metoda wywołuje samą siebie.

Definicja rekurencyjna

- Definicja rekurencyjna składa się z dwóch części.
  - W pierwszej, zwanej **podstawową** lub **warunkiem początkowym**, są wyliczone elementy podstawowe, stanowiące części składowe wszystkich pozostałych elementów zbioru.
  - W drugiej części, zwanej **krokiem indukcyjnym**, są podane reguły umożliwiające konstruowanie nowych obiektów z elementów podstawowych lub obiektów zbudowanych wcześniej.
- Reguły te można stosować wielokrotnie, tworząc nowe obiekty.

Definicja rekurencyjna

Rekurencyjna definicja funkcji silnia !

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n = 0 \text{ (podstawa)} \\ n \bullet (n-1)! & \text{jeśli } n > 0 \text{ (indukcja)} \end{cases}$$

Rekurencyjna definicja ciągu Fibonacciego?

$F(n) = n$ jeśli $n < 2$

$F(n) = F(n-2)+F(n-1)$ jeśli $n \geq 2$

Rekurencja

- Rekurencja jest zaimplementowana w wielu językach programowania.
  - Np. w języku C, funkcja **f** może wywołać samą siebie albo bezpośrednio z poziomu funkcji **f**, albo pośrednio wywołując inną funkcję (która wywołuje inną funkcję, która wywołuje inną funkcje, ... , która wywołuje funkcję **f**).
- Często można opracować algorytmy rekurencyjne, naśladując definicje rekurencyjne zawarte w specyfikacji programu, który jest implementowany.

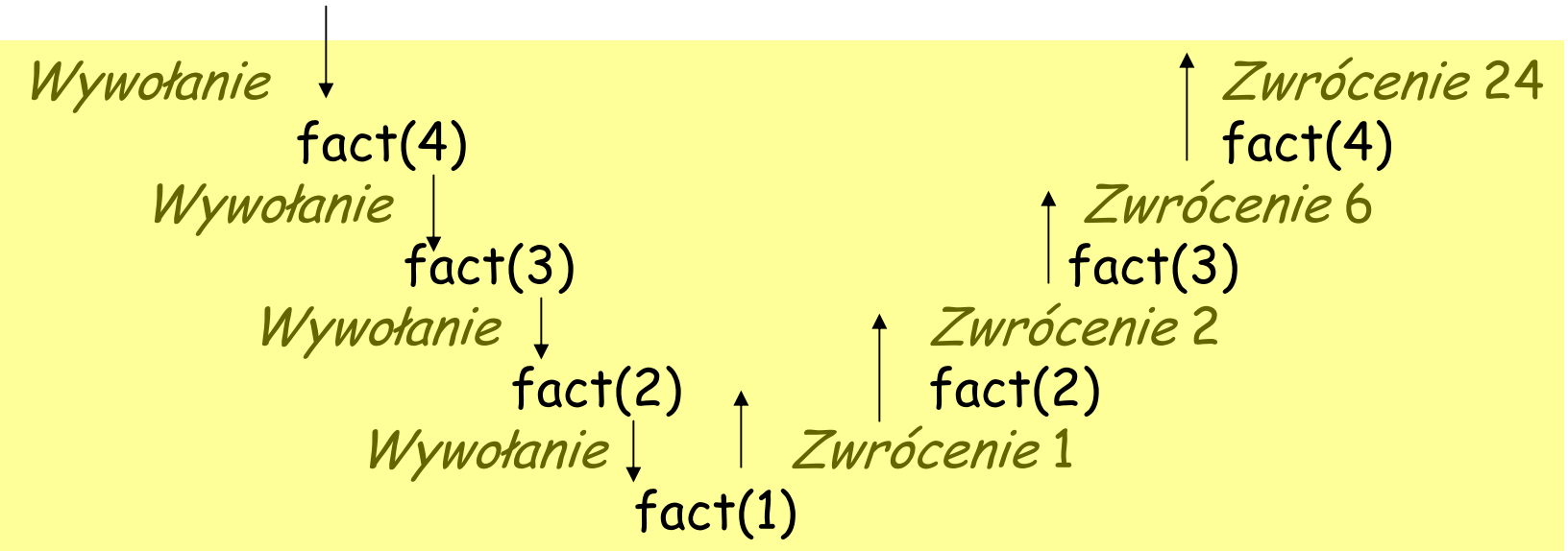
Definicja rekurencyjna

- Implementacja w języku C jest prosta… ale kod źródłowy nie sugeruje jak to się odbywa. Jak funkcja wywołująca sama siebie może w ogóle działać i jeszcze dawać prawidłowy wynik?

- Realizacja (pomysł od E. W. Dijkstry) przy pomocy stosu i systemu operacyjnego (patrz następne wykłady).

Funkcja rekurencyjna obliczająca n! dla n ≥ 1

```
int fact(int n)
{
  if (n ≤ 1)
     return 1; /*podstawa*/
  else
     return n · fact(n-1) /* indukcja*/
}
```



Rekurencja czy iteracja… czyli nie nadużywać rekurencji

Jak obliczać ciąg Fibonacciego?

$F(n) = n$ jeśli $n < 2$

$F(n) = F(n-2)+F(n-1)$ jeśli $n \geq 2$

Iteracja:

```
IterativeFib (int n) {
    if (n < 2)  return n;
    else {
        int tmp, current =1, last=0;
        for (i=2, i<=n, ++i) {
            tmp=current;
            current+=last;
            last=tmp;
        }
        return current;
    }
}
```

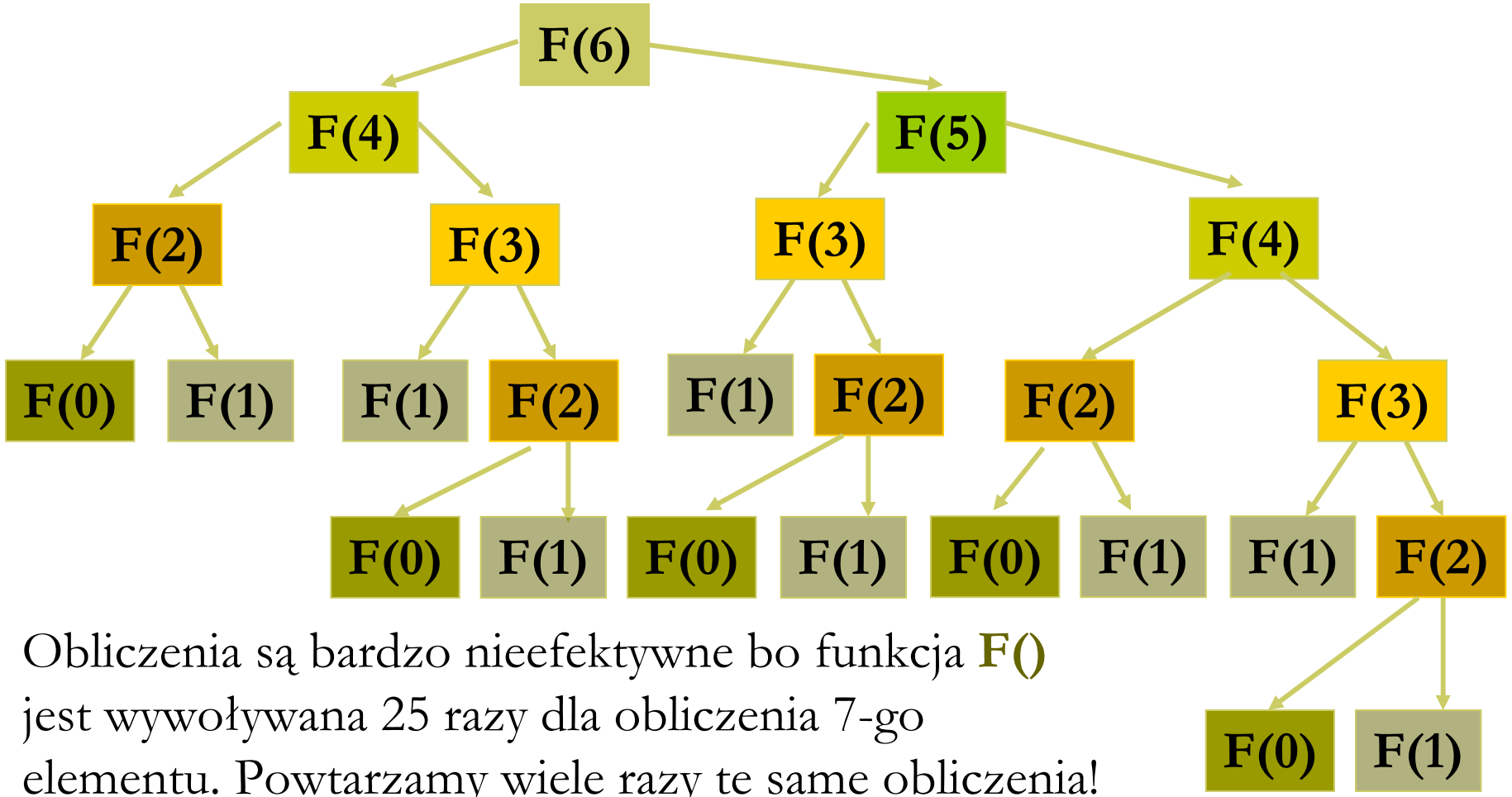
Rekurencja:

```
Fib (int n)
{
    if (n < 2)
        return n;
    else
        return  Fib(n-2) + Fib(n-1);
}
```

Można pokazać ze liczba wywołań funkcji **Fib()** jest **2·Fib(n+1)-1** w celu obliczenia wartości **Fib(n).**

Trzeba mieć dobry pomysł na prosty algorytm iteracyjny.

Jak rozwija się rekurencja dla obliczeń liczby Fibonacciego?



Obliczenia są bardzo nieefektywne bo funkcja **F()** jest wywoływana 25 razy dla obliczenia 7-go elementu. Powtarzamy wiele razy te same obliczenia!

Rekurencja czy iteracja… czyli nie nadużywać rekurencji

- **Jak obliczać ciąg Fibonacciego?**
  - $F(n) = n$ jeśli $n < 2$
  - $F(n) = F(n-2)+F(n-1)$ jeśli $n \geq 2$

n	liczba dodawań	Przypisania	
		Algorytm iteracyjny	Algorytm rekurencyjny
6	5	15	25
10	9	27	177
15	14	42	1973
20	19	57	21891
25	24	72	242785
30	29	87	2692537

- Algorytm rekurencyjny jest $O(2^n)$, to zbyt wysoka cena za prostotę! ($3 \cdot 10^6$ wywołań dla **F(30)**).
- Algorytm iteracyjny jest $O(n)$.

Rekurencja czy iteracja…

- Każdy problem mający rozwiązanie rekurencyjne daje się także rozwiązać w sposób iteracyjny, choć jego rozwiązanie iteracyjne może być mniej czytelne w porównaniu z rekurencyjnym, a niekiedy wręcz sztuczne.
- Rekurencja może być ponadto symulowana w sposób iteracyjny, przy użyciu struktur danych zwanych stosami (patrz dalsze wykłady).

Rekurencja czy iteracja…

- Istnieje powszechne przekonanie że nauczenie się programowania iteracyjnego czy też stosowania nierekurencyjnych wywołań funkcji jest łatwiejsze niż nauczenie się programowania rekurencyjnego.
- Po zdobyciu odpowiedniego doświadczenia,często okazuje się że programowanie rekurencyjne jest równie łatwe.
- Programy rekurencyjne są często mniejsze i łatwiejsze do zrozumienia od ich iteracyjnych odpowiedników.
- Co ważniejsze, niektóre problemy (szczególnie niektóre problemy wyszukiwania) są znacznie łatwiejsze do rozwiązania za pomocą programów rekurencyjnych.

Indukcja

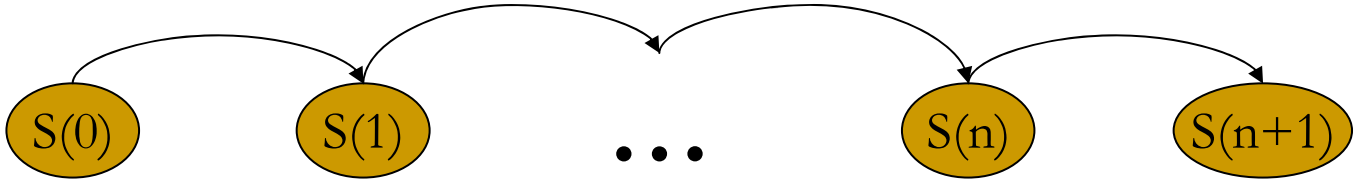
- Zagadnieniem również związanym z iteracja i rekurencja jest indukcja (ang. induction):
  - **technika stosowana w matematyce do dowodzenia, że twierdzenie S(n) jest prawdziwe dla wszystkich nieujemnych liczb całkowitych n lub, uogólniając, dla wszystkich liczb całkowitych ≥ od pewnego ograniczenia dolnego.**

Indukcja

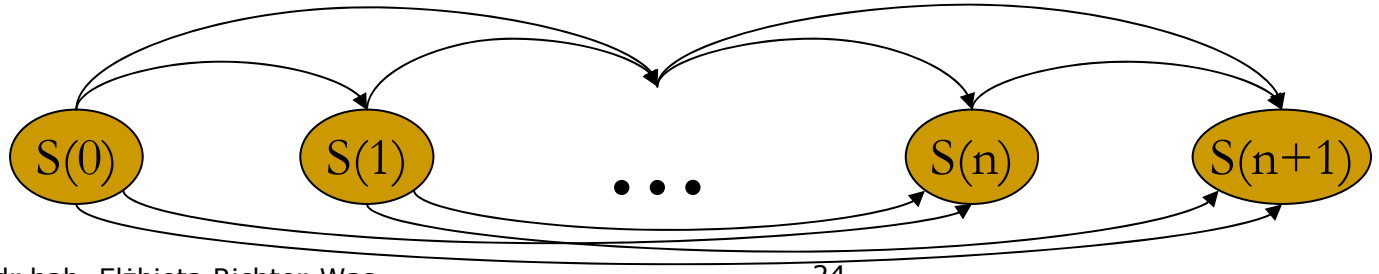
- Niech **S(n)** będzie dowolnym twierdzeniem dotyczącym liczby całkowitej **n**. W najprostszej formie dowodu indukcyjnego (**indukcja częściowa**) twierdzenia **S(n)** dowodzi się dwóch faktów:
  - **Przypadku podstawowego:** za który często przyjmuje się twierdzenie **S(0)**. Przypadkiem podstawowym może jednak być równie dobrze **S(k)** dla dowolnej liczby całkowitej **k**. Dowodzi się wówczas prawdziwości twierdzenia **S(n)** dla **n≥k**.
  - **Kroku indukcyjnego:** gdzie dowodzi się, że dla wszystkich **n ≥ 0** (lub wszystkich **n ≥ k**), prawdziwość **S(n)** implikuje prawdziwość **S(n+1)**.

Indukcja zupełna i częściowa

- **Indukcja częściowa (słaba):** wykorzystujemy wyłącznie hipotezę indukcyjna **S(n)** do wykazania prawdziwości **S(n+1)**.



- **Indukcja zupełna (silna):** Możemy wykorzystać każdą z wartości **S(i)**, od **podstawy** aż do **n** do wykazania prawdziwości **S(n+1)**.



Indukcja zupełna i częściowa

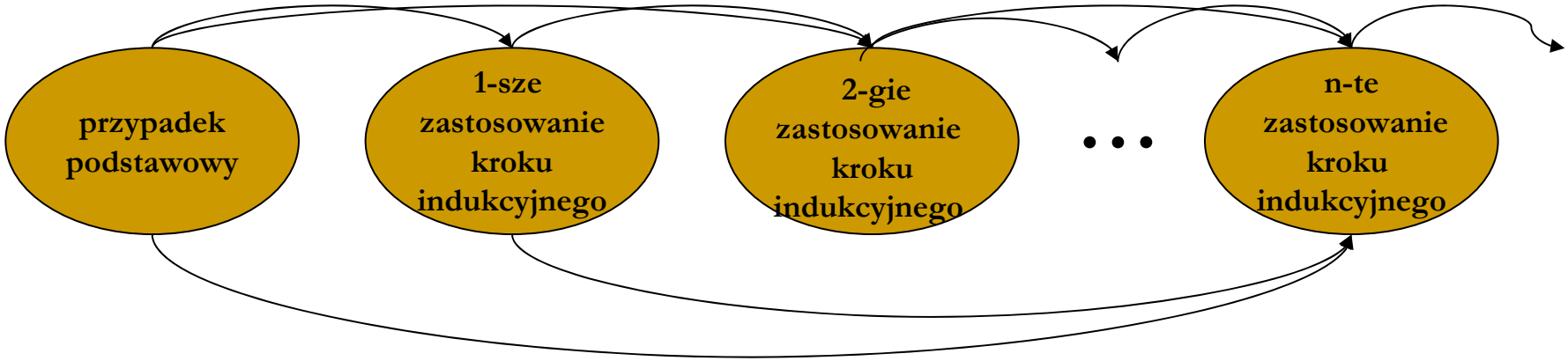
- Dla **indukcji zupełnej** dowodzimy, że twierdzenie **S(n)**, dla wszystkich **n ≥ 0** jest prawdziwe na podstawie dwóch faktów:
  - **Przypadku podstawowego:** dowodzi się prawdziwości **S(0)** (lub **S(k)** jeżeli to jest przypadek podstawowy)
  - **Kroku indukcyjnego:** gdzie dowodzi się, że dla wszystkich **n≥0** (lub wszystkich **n≥k**), że prawdziwość twierdzeń **S(0), S(1), S(2), …, S(n)** implikuje prawdziwość **S(n+1)**.

Indukcja zupełna i częściowa

- **Indukcje z większą liczba przypadków podstawowych:**
  Niekiedy przydatne jest wykorzystanie więcej niż jednego przypadku podstawowego:
  - **Przypadek podstawowy:** dowodzi się poprawności wszystkich przypadków podstawowych, czyli **$S(i_0)$, $S(i_1)$, $S(i_2)$, …, $S(i_m)$**.
  - **Krok indukcyjny:** gdzie dowodzi się, że dla wszystkich **$n \geq i_m$** (lub wszystkich **$n>k$**), ze prawdziwość twierdzeń **$S(i_0)$, $S(i_1)$, $S(i_2)$, …, $S(n)$** dla **$n \geq i_m$**, implikuje prawdziwość **$S(n+1)$**.

Definicje indukcyjne (raz jeszcze)

- W definicji indukcyjnej (zwanej tez rekursywną) definiuje się jedną lub więcej klas reprezentujących ściśle powiązane ze sobą obiekty (lub fakty) na bazie tych samych obiektów.
- **Definicja rekurencyjna powinna zawierać:**
  - jedną lub więcej reguł podstawowych, z których niektóre definiują pewne obiekty proste,
  - jedną lub więcej reguł indukcyjnych, za pomocą których definiuje się większe obiekty na bazie mniejszych z tego samego zbioru.



Definicje indukcyjne

- Istnieje ścisłe powiązanie pojęć dowodów indukcyjnych, definicji rekurencyjnych oraz programów rekurencyjnych.
- Każde opiera się na „kroku podstawowym” i „kroku indukcyjnym”.
- W „zwykłych” („częściowych”) indukcjach kolejne kroki zależą wyłącznie od kroków poprzednich.
- Często zachodzi konieczność przeprowadzania dowodów za pomocą indukcji zupełnej, w której każdy krok może zależeć od wszystkich wcześniejszych.

- **Indukcja ma zasadnicze znaczenie w dowodzeniu poprawności programów lub ich fragmentów**

Elementy technik sortowania

- Najprostszym sposobem wielokrotnego wykonania sekwencji operacji jest wykorzystanie **konstrukcji iteracyjnej** (instrukcje **for**, **while** w języku C).
- **Przykład:**
  - Przypuśćmy że mamy listę liczb całkowitych (7, 4, 2, 8, 9, 7, 7, 2, 1).
  - Sortujemy tę listę (w porządku niemalejącym) permutując ją do postaci (1, 2, 2, 4, 7, 7, 7, 8, 9).
  - Należy zauważyć, że sortowanie nie tylko porządkuje wartości, tak że każda jest równa lub mniejsza kolejnej liczbie z listy, ale także zachowuje liczbę wystąpień każdej wartości.
- Algorytm sortujący pobiera na wejściu dowolna listę i zwraca jako wynik listę posortowaną. Każdy element występujący w liście pierwotnej występuje również w liście posortowanej.

Elementy technik sortowania

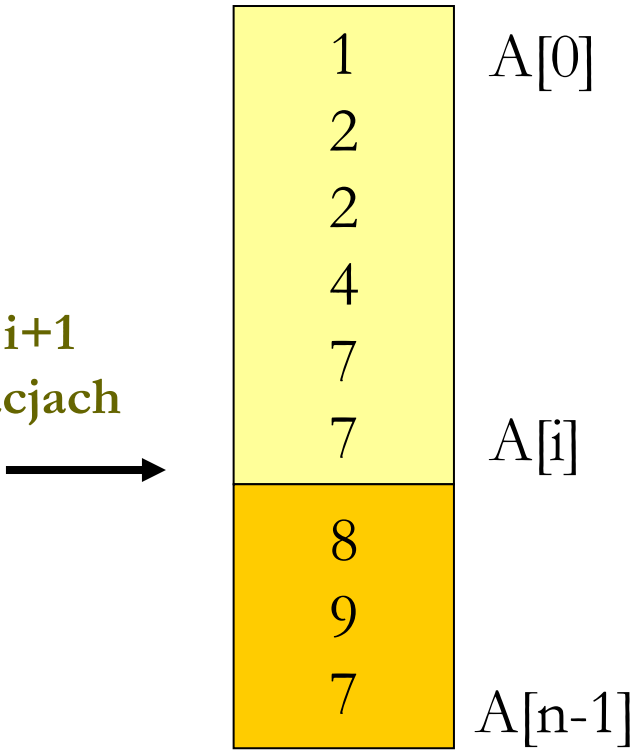
Listę elementów dowolnego typu można sortować wówczas, gdy istnieje możliwość zdefiniowania miedzy nimi relacji mniejszości oznaczanej typowo ” < ”

- Jeżeli elementami do posortowania są liczby całkowite lub rzeczywiste, symbol ” < ” oznacza znaną wszystkim relacje mniejszości
- Jeżeli elementami są ciągi znaków, można np. stosować „porządek leksykograficzny”.
- Jeżeli elementy są skomplikowane (struktury) to możemy do posortowania wykorzystać część każdego elementu (jedno konkretne pole).

Sortowanie przez wybieranie – iteracyjny alg. sortujący

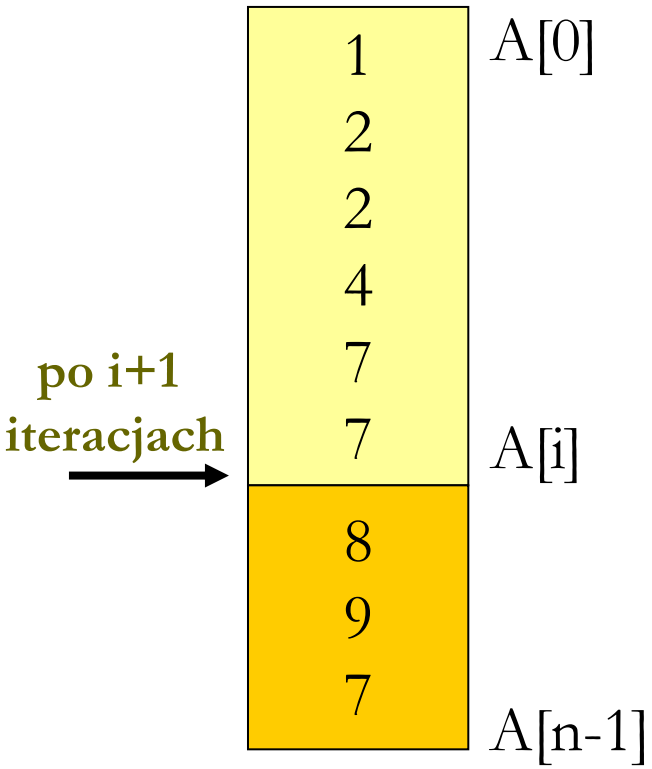
- Mamy tablicę **A** zawierającą **n** liczb całkowitych które chcemy posortować w porządku niemalejącym. Można to zrobić wielokrotnie powtarzając krok:
  - wyszukaj najmniejszy element nieposortowanej części tablicy
  - wymień go z ostatnim elementem znajdującym się na pierwszej pozycji nieposortowanej części tablicy
- **Pierwsza iteracja**: wybiera najmniejszy element w **A[0, n-1]**, zamienia z elementem na pozycji **A[0]**;
- **Druga iteracja**: wybiera najmniejszy element w **A[1, n-1]**, zamienia z elementem na pozycji **A[1]**;
- **Trzecia iteracja:** …
- **I-ta iteracja wymaga przejrzenia (n-i) elementów.**

po i+1 iteracjach



Sortowanie przez wybieranie – rekurencyjny alg. sortujący

- Mamy tablicę **A** zawierająca **n** liczb całkowitych które chcemy posortować w porządku niemalejącym.
- Można to robić rekurencyjnie
  - wybieramy najmniejszy element z reszty tablicy **A** (czyli z **A[i, …, n-1]**),
  - wymieniamy wybrany w poprzednim kroku element z elementem **A[i]**,
  - sortujemy resztę tablicy czyli **A[i+1, …, n-1]**.
- **Podstawa:**
  - Jeśli **i = n-1**, to pozostaje do posortowania jedynie ostatni element tablicy. Ponieważ pojedynczy element jest zawsze posortowany nie trzeba podejmować żadnych działań.
- **Indukcja:**
  - Jeśli **i < n-1**, to należy znaleźć najmniejszy element w tablicy **A[i, …, n-1]**, wymienić go z elementem **A[i]** i rekurencyjnie posortować tablice **A[i+1,...,n-1]**.
- Kompletny algorytm realizujący powyższą rekurencję rozpoczyna się od **i=0**.



Sortowanie przez „dzielenie i scalanie” – rekurencyjny algorytm sortujący

- Najlepszy opis **sortowania przez scalanie** opiera się na rekurencji i ilustruje równocześnie bardzo korzystne zastosowanie techniki „dziel i zwyciężaj”.
- Listę **(a_1, a_2, a_3, …, a_n)** sortuje się **dzieląc** na **dwie listy** o dwukrotnie mniejszych rozmiarach. Następnie obie listy są sortowane osobno.
  Aby zakończyć proces sortowania oryginalnej listy **n**-elementów, **obie listy zostają scalone** przy pomocy specjalnego algorytmu.
- **Scalanie:**
  - Prostym sposobem scalania dwóch list jest analiza od ich początków. W każdym kroku należy znaleźć mniejszy z dwóch elementów będących aktualnie na czele list, wybrać go jako kolejny element łączonej listy i usunąć go z “pierwotnej listy”, wskazując na kolejny pierwszy element. W przypadku równych pierwszych elementów można dodawać je do łączonej listy w dowolnej kolejności.

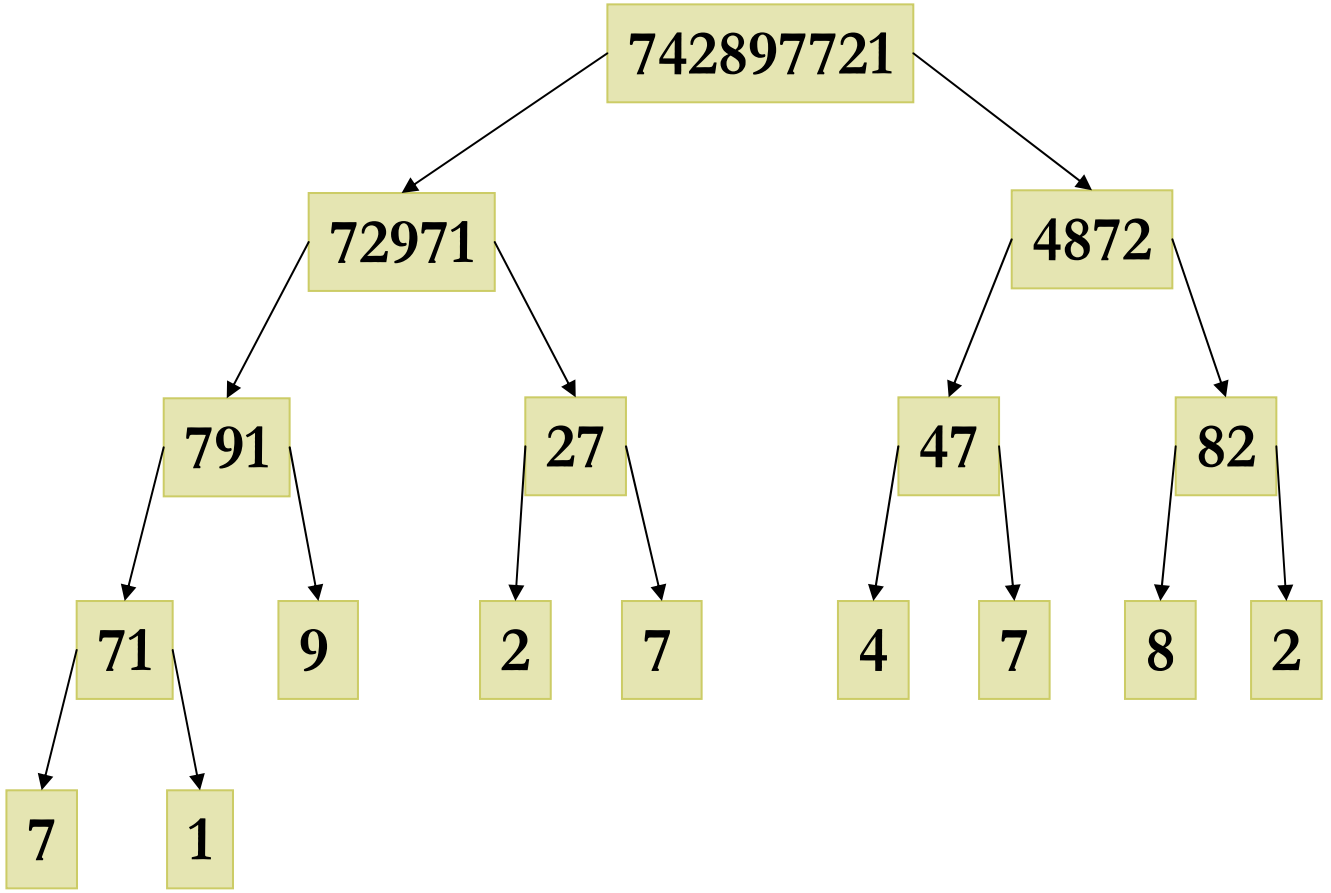
Sortowanie przez „dzielenie i scalanie” – rekurencyjny algorytm sortujący

- **Podstawa:**
  - Jeśli lista do posortowania jest pusta lub jednoelementowa, zostaje zwrócona ta sama lista – jest ona już posortowana.

- **Krok indukcyjny:**
  - Jeżeli lista ma nie mniej niż 2 elementy to podziel listę na dwie (np. elementy o parzystym indeksie i elementy o nieparzystym indeksie).
    Posortuj każdą z dwóch list osobno i scal.

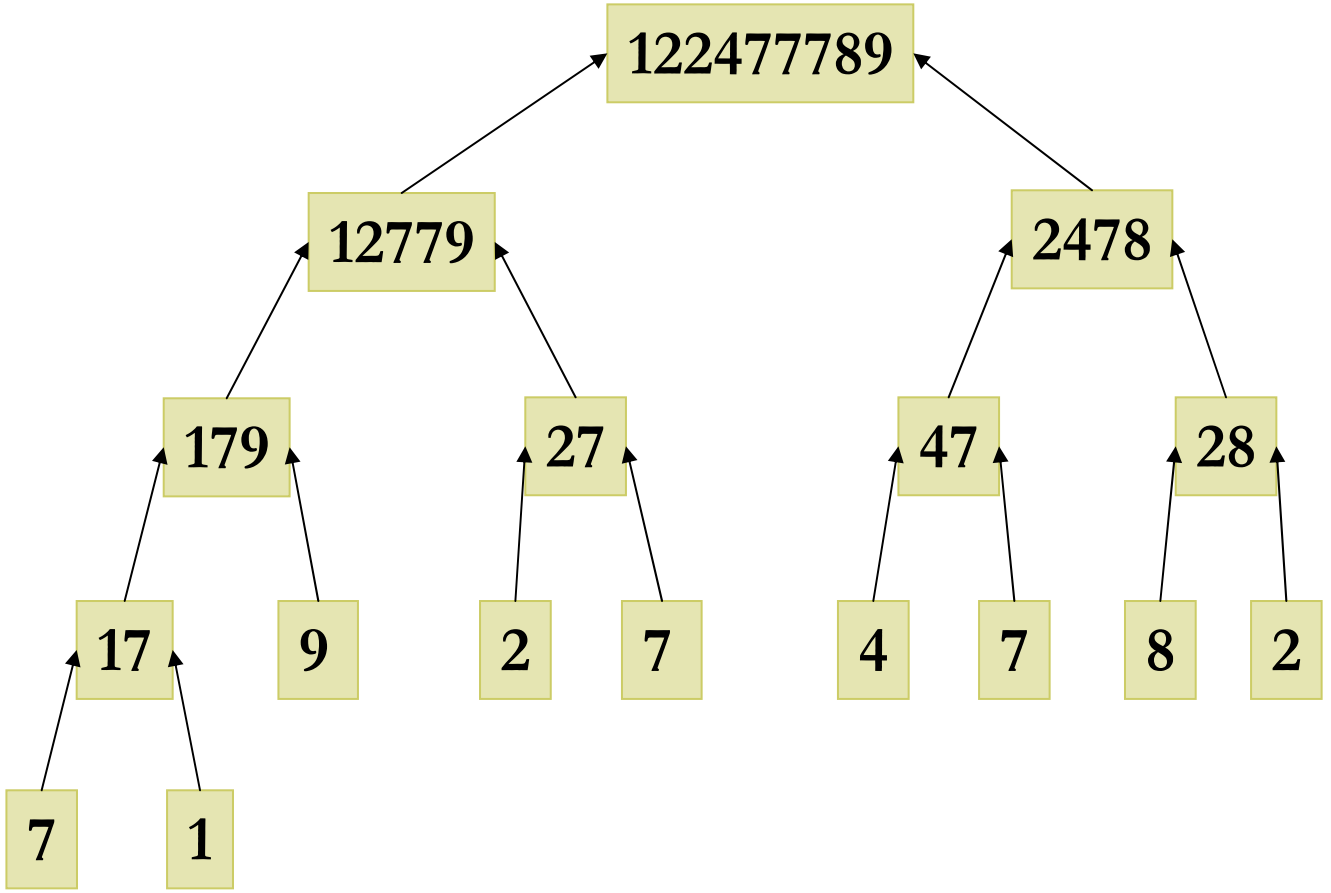
Rekurencyjne dzielenie i scalanie – przykład

- **Dzielenie:**



Rekurencyjne dzielenie i scalanie – przykład

- **Scalanie:**



Techniki sortowania

- Istnieje wiele różnych sposobów sortowania:
  - sortowanie przez wybieranie jest łatwym ale wolnym sposobem sortowania,
  - sortowanie przez scalanie jest szybszym ale tez bardziej skomplikowanym algorytmem,
  - inne algorytmy sortowania: patrz następne wykłady.
- Można pokazać że algorytm sortowania przez **wybieranie** zachowuje się jak $O(n^2)$, natomiast algorytm sortowania przez **scalanie** $O(n \log n)$.
- To są tylko ograniczenia górne, w praktyce już dla kilkudziesięciu elementów sortowanie przez scalanie jest szybsze.
- Dla małych **n** algorytm sortowania przez wybieranie jest szybszy niż sortowania przez scalanie. Wobec tego optymalne będzie używanie go jako elementu algorytmu sortowania przez scalanie.
- Często rozważamy modyfikację algorytmu sortowania przez scalanie, w której doprowadzamy do podziału na **n/k** list, a każdą z nich sortujemy przez wybieranie (a wiec nie doprowadzamy aż do list **2**-elementowych!).

Podsumowanie

- Jak wskazuje praktyka programistyczna, większość algorytmów daje się zaliczyć do jednej z dwóch kategorii: pierwszą z nich tworzą algorytmy o charakterze iteracyjnym, drugą – zdecydowanie mniejszą – o charakterze rekurencyjnym.
- Dla wielu problemów znane jest tylko rozwiązanie rekurencyjne.
- Istnieje ściśle powiązanie dowodów indukcyjnych, definicji rekurencyjnych oraz programów rekurencyjnych. Każde opiera się na podstawie i kroku indukcyjnym.
- W indukcjach częściowych kolejne kroki zależą wyłącznie od kroków poprzednich.
- Często zachodzi konieczność przeprowadzania dowodów za pomocą indukcji zupełnej, w której każdy krok może zależeć od wszystkich wcześniejszych.
- Indukcja ma zasadnicze znaczenie w dowodzeniu poprawności działania programów lub ich fragmentów.