Zestaw zadań nr. 4

- Zadanie 1
  Udowodnij, że
  a) $\Sigma_{i=1}^{n}$ jest $O(n^3)$
  b) $an^k/lg(n)$ jest $O(n^k)$, ale nie $\Theta(n^k)$
  c) $n^{1,1} + nlg(n)$ jest $\Theta(n^{1,1})$
  d) 2^n jest $O(n!)$, a $n!$ nie jest $O(2^n)$

- Zadanie 2
  Pokaż przez **indukcje matematyczną**, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 zachodzą równości:

  a) $1 - 2 + 3 - 4 + ... + (2n - 1) - 2n = -n$
  b) $1 + 3 + 6 + ... + n(n + 1)/2 = n(n + 1)(n + 2)/6$
  c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (n(n + 1)/2)^2$
  d) $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + ... + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$
  e) $1/2 - 2/2^2 + 3/2^3 - 4/2^4 + ... + (-1)^{(n-1)} = 1/9(2 + (-1)^{(n-1)}(3n + 2)/2^n)$

- Zadanie 3
  Pokaż przez **indukcje matematyczną**, że $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{1}{2}n(n + 1)$

- Zadanie 4
  Pokaż przez **indukcję matematyczną**, że rozwiązaniem równania rekurencyjnego
  $T(n) = 2T(n/2) + n$
  jest $T(n) = O(nlogn)$.

- Zadanie 5
  Metoda iterowania rekurencji nie wymaga odgadywania odpowiedzi. Główną ideą jest rozwijanie (iterowanie) rekurencji i wyrażanie jej jako sumy składników zależnych tylko od n warunków brzegowych. Następnie mogą być użyte techniki sumowania do oszacowania rozwiązań.
  Pokaż metodą iterowania rekurencji, że rozwiązaniem równiania rekurencyjnego
  $T(n) = 3T(n/4) + n$
  jest $T(n) = O(n)$.

- Zadanie 6
  Drzewo rekursji pozwala w dogodny sposób ilustrować rozwijanie rekurencji, jak również ułatwia stosowanie aparatu algebraicznego służącego do rozwiązania tej rekurencji. Narysuj drzewo rekursji dla równania $T(n) = 2T(n/2) + n^2$