Teoretyczne podstawy informatyki

Wykład 10b: Wzorce i automaty.

Problematyka wzorców stanowi bardzo rozwiniętą dziedzinę wiedzy. Nosi ona nazwę teorii automatów lub teorii języków, a jej podstawowe definicje i techniki stanowią istotną część informatyki.

Poznamy trzy równoważne opisy wzorców:

(1) oparty na teorii grafów, polegać będzie na wykorzystaniu ścieżek w grafie szczególnego rodzaju który nazwiemy automatem.

(2) o charakterze algebraicznym, wykorzystujący notacje wyrażeń regularnych.

(3) oparty o wykorzystanie definicji rekurencyjnych, nazwany gramatyką bezkontekstową.

Wzorzec to zbiór obiektów o pewnej rozpoznawalnej właściwości.
Jednym z typów wzorców jest zbiór ciągów znaków, taki jak zbiór poprawnych identyfikatorów języka C, z których każdy stanowi ciąg znakowy, składający się z liter, cyfr i znaków podkreślenia oraz rozpoczyna się od litery lub znaku podkreślenia.
Inny przykład to zbiór tablic zer i jedynek o danym rozmiarze, które czytnik znaków może interpretować jako reprezentację tego samego symbolu. Poniżej trzy tablice które można interpretować jako literę A. Zbiór wszystkich takich tablic stanowiłby wzorzec o nazwie „A".

0 0 0 1 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 1 0 0	0 0 1 0 0 0 0	0 0 1 0 1 0 0
0 0 1 0 1 0 0	0 0 1 1 0 0 0	0 1 1 0 1 0 0
0 1 1 0 1 1 0	0 1 0 1 0 0 0	0 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 0	0 1 1 1 0 0 0	1 1 0 0 0 1 1
1 1 0 0 0 1 1	1 0 0 1 1 0 0	1 0 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0 1	1 0 0 0 1 0 0	0 0 0 0 0 0 0

Maszyny stanów i automaty

Programy służące do wyszukiwania wzorców
często charakteryzują się szczególną strukturą. W kodzie można identyfikować określone pozycje, w których można wyróżnić pewne charakterystyczne elementy związane z postępem działania programu w zakresie osiągnięcia stawianego mu celu, jakim
jest znalezienie wystąpienia wzorca.

Takie pozycje określa się mianem *stanów (ang. states)*. Ogólne zachowanie programu można postrzegać jako *przechodzenie od jednego stanu do drugiego* w miarę odczytywania danych
wejściowych.

Maszyny stanów i automaty

Przykład:
Prosty program w języku C, sprawdzający ciąg znaków w celu określenia czy zawiera on wszystkie pięć samogłosek w kolejności alfabetycznej. Rozpoczynając analizę od początku ciągu znaków, program najpierw wyszukuje znak a.
Można powiedzieć że pozostaje w stanie 0 do czasu, aż znajdzie wystąpienie a, a wówczas przechodzi do stanu 1. W stanie 1, szuka wystąpienia znaku e, a kiedy je znajdzie, przechodzi do stanu 2....
Stan i można interpretować jako sytuacje, w której program napotkał już po kolei i pierwszych samogłosek, gdzie i=0,1,...,5.
Owe sześć stanów stanowi całość wymaganych przez program informacji podczas przeglądania ciągu wejściowego od lewej do prawej strony.

```
#include <stdio.h>

#define TRUE 1
#define FALSE 0
typedef  int BOOLEAN;
```

```
BOOLEAN testWord(char *p)
{
      /*  stan 0  */
  if (findChar(&p, 'a'))
      /*  stan 1  */
  if (findChar(&p, 'e'))
      /*  stan 2  */
  if (findChar(&p, 'i'))
      /*  stan 3  */
  if (findChar(&p, 'o'))
      /*  stan 4  */
  if (findChar(&p, 'u'))
      /*  stan 5  */
         return TRUE;
  return FALSE;
}
```

```
BOOLEAN findChar( char **pp, char c)
{
while (**pp != c && **pp != '\0')
       (*pp)++;
if( **pp == '\0')
  return FALSE;
else {
    (*pp) ++;
    return TRUE;
      }
}
```

```
main()
{
    printf("%d\n", restWord("abstemious")
}
```

Grafy reprezentujące maszyny stanów

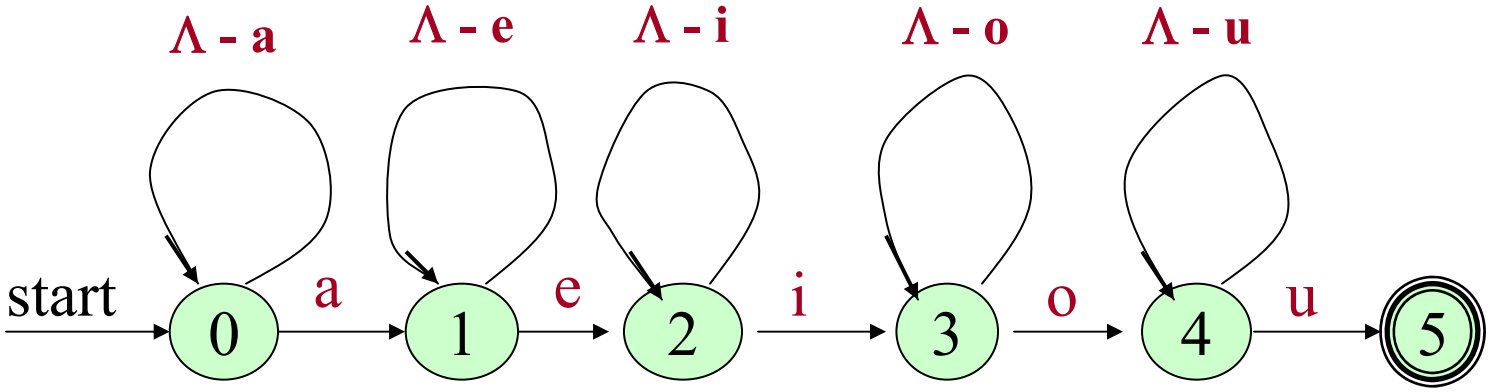
Działanie omówionego programu można reprezentować za pomocą *grafu*, którego *wierzchołki określają stany programu*. I odwrotnie: program można zaprojektować przez zaprojektowanie w pierwszej kolejności grafu, a następnie mechaniczne przetłumaczenie takiego grafu na program (ręcznie lub przy pomocy istniejących narzędzi programistycznych.

Koncepcja działania automatu jest prosta. Zakłada się że *automat pobiera listę znaków zwaną ciągiem wejściowym (ang. inpus sequence).*
Jego działanie rozpoczyna się w stanie początkowym, tuż przed odczytaniem pierwszegoznaku wejściowego. W zależności od tego jaki jest to znak, automat wykonujeprzejście –do tego samego lub innego stanu.
Przejścia są zdefiniowane przez graf automatu. Następnie automat odczytuje drugi znak i wykonuje kolejne przejście i tak dalej.

Automaty stanowią abstrakcje. Podejmują decyzje o akceptacji lub odrzuceniu danego ciągu znaków wejściowych przez sprawdzenie, czy istnieje ścieżka odstanu początkowego do pewnego stanu końcowego, której krawędzie będą zaetykietowane wartościami ciągu.

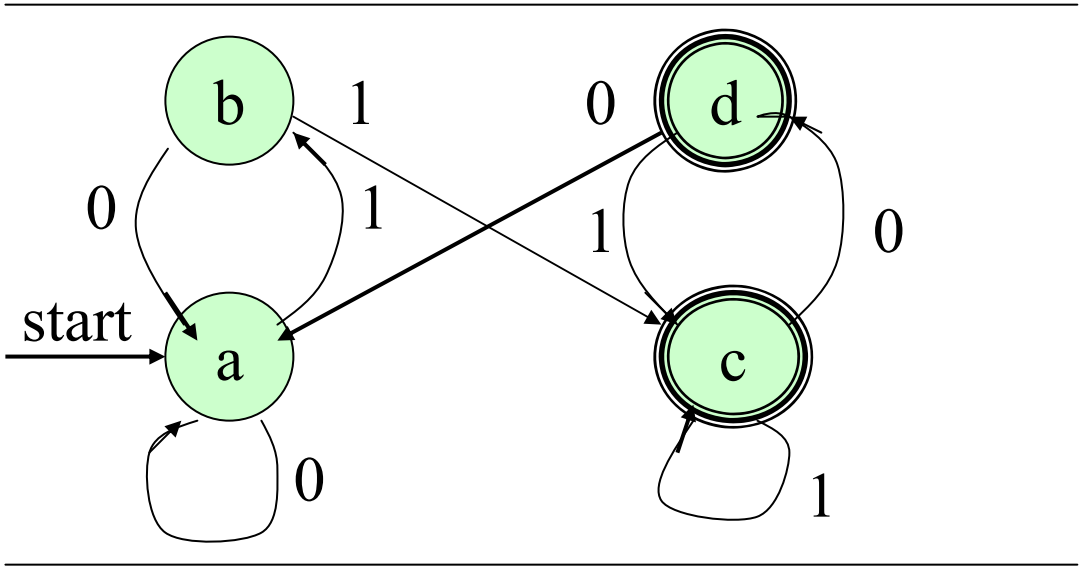
Automat rozpoznający ciągi liter posiadające podciąg "aeiou".

Stany programu są reprezentowane za pomocą grafu skierowanego, którego krawędzie etykietuje się zbiorami znaków. Krawędzie takie nazywa się przejściami (ang. transition). Niektóre wierzchołki są zaznaczone jako *stany końcowe (ang. accepting states)*. Osiągnięcie takiego stanu oznacza znalezienie poszukiwanego wzorca i jego akceptację.
Jeden z wierzchołków jest zawsze określany jako *stan początkowy (ang. start state)* –stan w którym następuje rozpoczęcie procesu rozpoznawania wzorca. Wierzchołek taki oznacza się przez umieszczenie prowadzącej do niego strzałki która nie pochodzi od innego grafu. Graf posiadający opisywaną postać nosi nazwę *automatu skończonego (ang. finite automaton)* lub po prostu automatu.



Filtr odbijający

Automat pobiera ciąg zer i jedynek.
Celem jego jest „wygładzenie" ciągu przez traktowanie pojedynczego symbolu 0, który jest otoczony dwoma symbolami 1 jako „szumu" i zastąpienie go symbolem 1. W podobny sposób jest traktowany symbol 1 gdy jest otoczony dwoma symbolami 0 – zastępujemy go symbolem 0. Stanem początkowym jest a. Stanami końcowymi (akceptującymi) są c i d.



Wejście	Stan	Wyjście
	a	0
0		
	a	0
1		
	b	0
0		
	a	0
1		
	b	0
1		
	c	1
0		
	d	1
1		
	c	1

Różnica miedzy automatami a ich programami

Automaty stanowią abstrakcje .
Podejmują decyzje o akceptacji lub odrzuceniu danego ciągu znaków wejściowych przez sprawdzenie czy istnieje ścieżka ze stanu początkowego do pewnego stanu końcowego, której krawędzie będą zaetykietowane wartościami ciągu.

Działanie filtru można interpretować jako fakt że automat odrzuca podciągi: 0,01,010,0101, natomiast akceptuje podciągi 01011, 010110, 0101101.

Działanie automatu rozpoznającego litery jest takie że akceptuje ciągi znaków, takich jak abstemiou, ale odrzuca ciąg abstemious, ponieważ nie da się przejść nigdzie ze stanu 5 w przypadku końcowego znaku s.

Różnica miedzy automatami a ich programami

Programy tworzone dla automatów mogą podejmować decyzje o akceptacji lub odrzuceniu na różne sposoby.

Przykładowo program akceptujący ciągi znaków i wykorzystujący automat ze str. 6. powinien zaakceptować zarówno słowo abstemious jak i abstemiou.

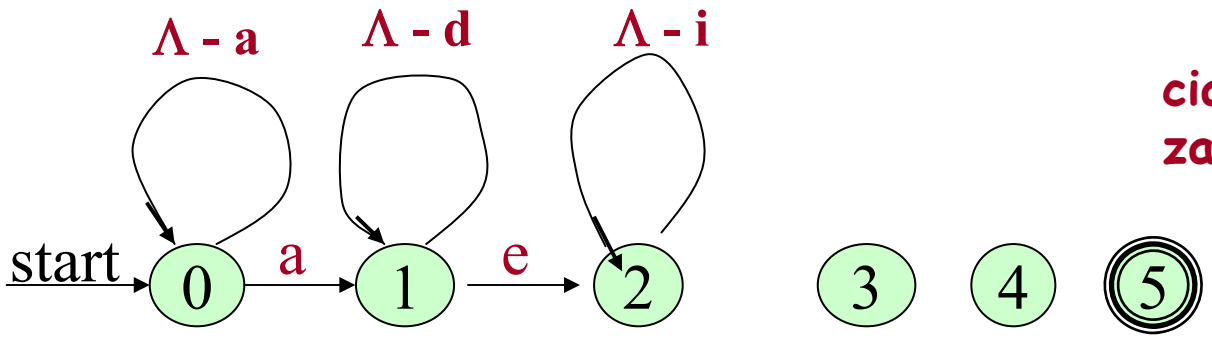
W momencie przetworzenia litery u program wypisywałby całe słowo bez dalszego badania go.

Program wykorzystujący automat ze str. 7. powinien interpretować każdy stan akceptacji jako akcję polegającą na wypisaniu znaku 1, zaś każdy stan odrzucenia jako akcję polegającą na wypisaniu znaku 0.

Automaty deterministyczne i niedeterministyczne

Jedna z podstawowych operacji wykonywanych za pomocą automatu jest pobranie ciągu symboli a_1a_2 ...ak i przejście od stanu początkowego ścieżką, której krawędzie posiadają etykiety zawierające te symbole po kolei. Tzn. dla i=1,2, ..., k symbol a_i należy do zbioru S_i, który etykietuje i-ta krawędź ścieżki. Konstruowanie takiej ścieżki oraz sekwencji jej kolejnych stanów określa się mianem symulacji. (ang. simulation) automatu dla ciągu wejściowego a_1a_2 ... a_k. O takiej ścieżce mówi się że posiada etykietę a_1a_2 ...a_k.

Symulacja działania automatu ze str. 6 dla słowa " adept ".



ciąg nie zostaje zaakceptowany

Wejście:	a	d	e	p	t
Stan:	0	1	1	2	2	2

Automaty deterministyczne

Automaty które dotychczas omówiliśmy posiadają pewną istotną własność.
Dla każdego stanu s oraz dowolnego znaku wejściowego x istnieje co najwyżej jedno przejście ze stanu s, którego etykieta zawiera znak x.
O tego rodzaju automatach mówimy że są deterministyczne (ang. deterministic).

Symulacja automatu deterministycznego dla danej sekwencji wejściowej jest bardzo prosta. W każdym stanie s dla kolejnego znaku wejściowego x należy rozpatrzyć każdą etykietę przejść ze stanu s. Jeżeli uda się znaleźć przejście, którego etykieta zawiera znak x, to przejście to określa właściwy stan następny. Jeżeli żadna nie zawiera znaku x, to automat „zamiera" i nie
może przetwarzać dalszych znaków wejściowych..

Automaty deterministyczne

Można z łatwością przerobić automat deterministyczny na program.

Dla każdego stanu tworzy się fragment kodu. Kod stanu s bada znak wejściowy i określa, które (o ile jakiekolwiek) przejście ze stanu s powinno zostać wybrane.

Jeżeli zostanie wybrane przejście ze stanu s do stanu t, to kod napisany dla stanu s musi uwzględniać przekazanie sterowania do kodu stanu t, np. przy użyciu instrukcji goto.

Funkcja implementująca automat deterministyczny (str. 7)

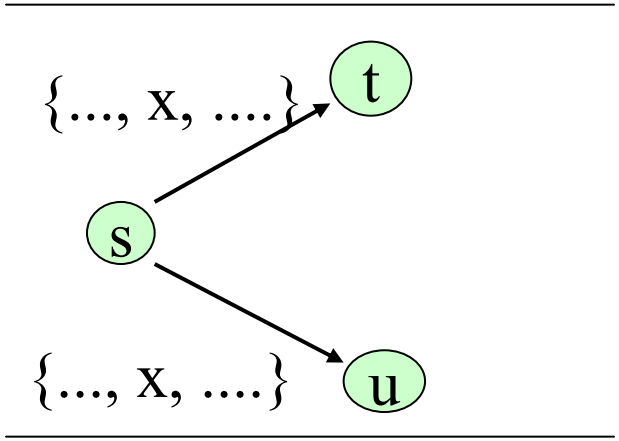
```
void bounce()
{
      char x;

   /* stan a */
a: putchar('0');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto b:
   goto finis;

/* stan b */
b: putchar('0');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;
```

```
/* stan c */
c: putchar('1');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto d:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;

/* stan d */
d: putchar('1');
   x = getchar();
   if ( x == '0') goto a:
   if ( x == '1') goto c:
   goto finis;

finis;

}
```

Automaty niedeterministyczne

Automaty niedeterministyczne (ang. nondeterministic) mogą (ale nie muszą) posiadać dwa (lub więcej) przejścia z danego stanu zawierające ten sam symbol.
Warto zauważyć, że automat deterministyczny jest równocześnie automatem niedeterministycznym, który nie posiada wielu przejść dla jednego symbolu.

Automaty niedeterministyczne nie mogą być bezpośrednio implementowane za pomocą programów, ale stanowią przydatne pojęcie abstrakcyjne.



W momencie podjęcia próby symulacji automatu niedeterministycznego w przypadku ciągu wejściowego składającego się ze znaków a1a2...ak może okazać się, że ten sam ciąg etykietuje wiele ścieżek. Wygodnie jest przyjąć, że automat niedeterministyczny akceptuje taki ciąg wejściowy, jeżeli co najmniej jedna z etykietowanych ścieżek prowadzi do stanu akceptującego.

niedeterminizm = "zgadywanie"

Jak zastąpić automat niedeterministyczny deterministycznym.

Automat niedeterministyczny zastępujemy deterministycznym przez skonstruowanie *równoważnego* automatu deterministycznego. Technika ta nosi nazwę *konstrukcji podzbiorów (ang. subset construction).*

Równoważność automatów.

Mówimy, że automat A jest równoważny (ang. equivalent) automatowi B, jeżeli akceptują ten sam zbiór ciągów wejściowych. Innymi słowy, jeżeli a1a2.....ak jest dowolnym ciągiem symboli, to spełnione są dwa następujące warunki:

(1) Jeżeli istnieje ścieżka zaetykietowana jako a1a2....ak wiodąca od stanu początkowego automatu A do pewnego stanu akceptującego automatu A, to istnieje również ścieżka zaetykietowana a1a2.....ak wiodąca od stanu początkowego automatu B do stanu końcowego tego automatu.

(2) Jeżeli istnieje ścieżka zaetykietowana jako a1a2....ak wiodąca od stanu początkowego automatu B do pewnego stanu akceptującego automatu B, to istnieje również ścieżka zaetykietowana a1a2.....ak wiodąca od stanu początkowego automatu A do stanu końcowego tego automatu.

Indukcyjna konstrukcja automatu niedeterministycznego

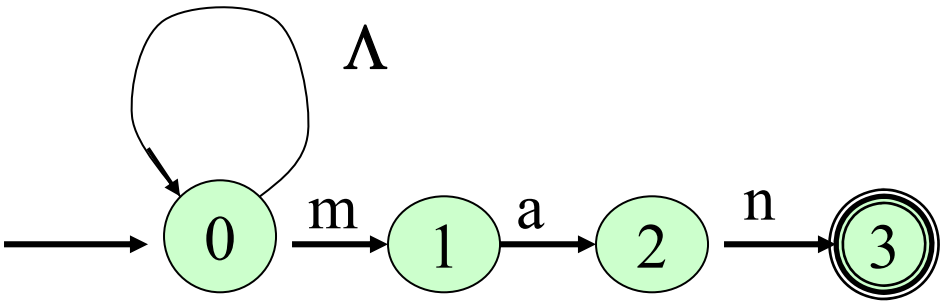
Podstawa:

Jeżeli stanem początkowym automatu niedeterministycznego N jest s0, to stanem początkowym automatu deterministycznego D jest {s0}, czyli zbiór zawierający tylko element s0.

Indukcja:

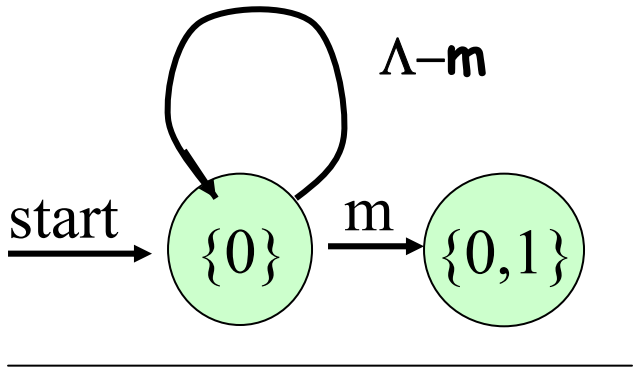
Załóżmy, że ustalono, iż S, zbiór stanów automatu N, jest stanem automatu D. Rozpatrujemy po kolei każdy możliwy znak wejściowy x. Dla danego x określamy, że T jest zbiorem stanów t automatu N, takich, że dla pewnego stanu s należącego do zbioru S istnieje przejście z s do t etykietą zawierającą znak x. Wówczas zbiór T jest stanem automatu D i istnieje przejście z S do T względem znaku wejściowego x.

Konstrukcja automatu deterministycznego D



Niedeterministyczny automat rozpoznający ciąg znaków kończący się sekwencja " man ".

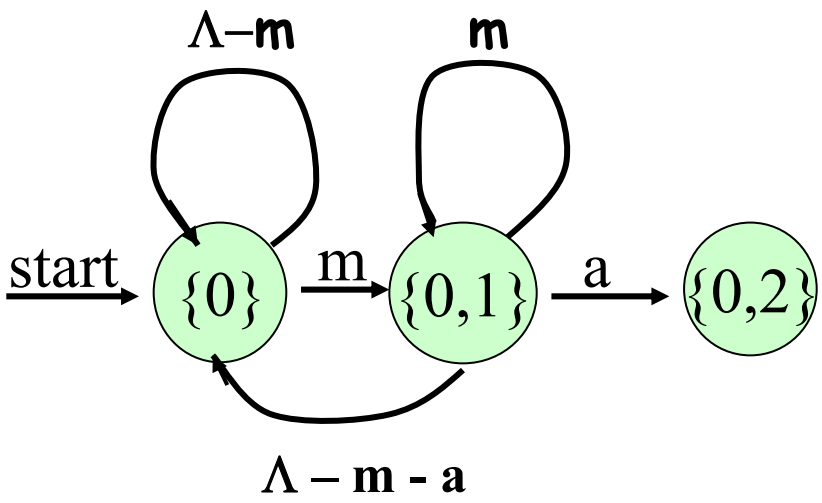
Rozpoczynamy od zbioru {0}, który jest stanem początkowym automatu D.



Stan {0} i jego przejścia

Dla dowolnej litery oprócz m ze stanu 0 następuje przejście do stanu 0, w przypadku m następuje przejście do stanu 0 lub 1. Automat D potrzebuje stanu {0}, który już posiada oraz stanu {0,1} który należy dodać.

Następnie, należy rozważyć przejścia ze stanu {0,1}. Dla niedeterministycznego automatu, wszystkie znaki wejściowe oprócz m i a powodują przejście ze stanu 0 tylko do stanu 0, a ze stanu 1 nie można nigdzie przejść. Stąd istnieje przejście ze stanu {0,1} do stanu {0}, zaetykietowane (Λ –m –a). W przypadku wejściowego znaku m, ze stanu 1 nie można przejść nigdzie, a ze stanu 0 można przejść do stanu 0 lub 1. Dlatego istnieje przejście {0,1} do niego samego zaetykietowane litera m. W przypadku znaku wejściowego a, ze stanu 0 przechodzi się do niego samego, ze stanu 1 przechodzi się do stanu 2. Stąd przejście zaetykietowane przez a ze stanu {0,1} do stanu {0,2}.



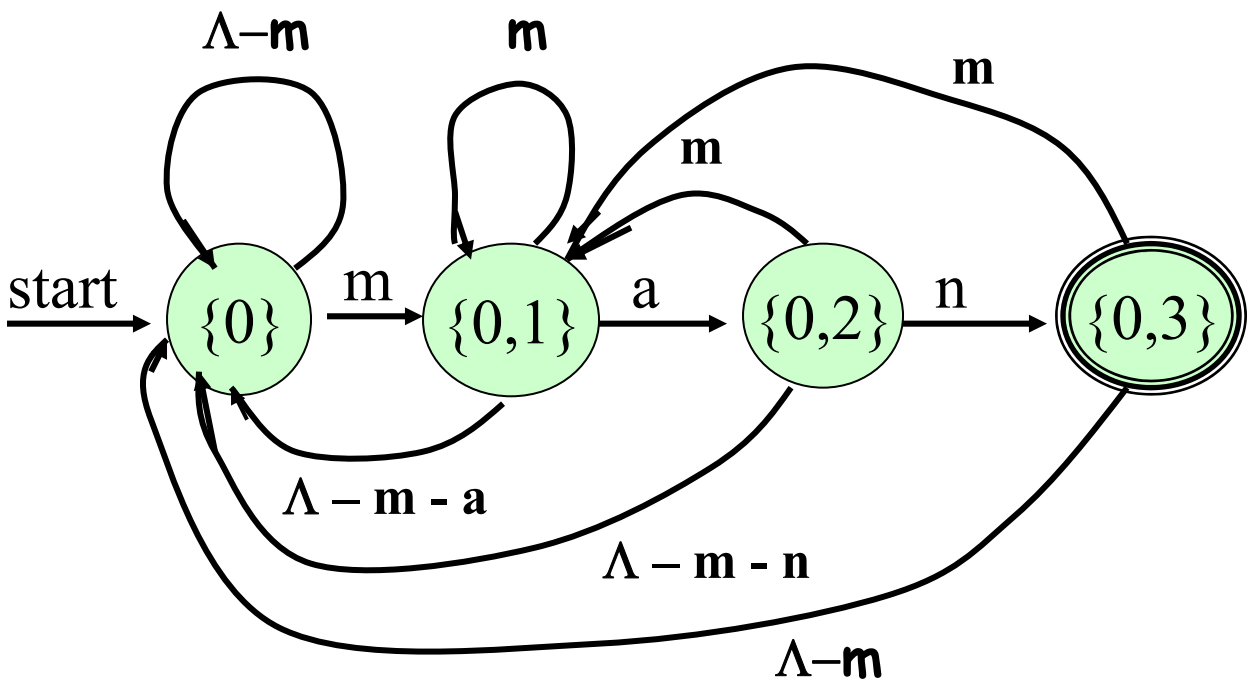
Stan {0} i {0,1} oraz ich przejścia

Teraz należy skonstruować przejścia ze stanu {0,2}. W przypadku wszystkich znaków wejściowych oprócz m i n, ze stanu 0 można przejść jedynie do stanu 0, zaś ze stanu 2 nie można nigdzie przejść. Zatem istnieje przejście ze stanu {0,2} do stanu {0} zaetykietowane wszystkimi literami oprócz m i n.

W przypadku znaku wejściowego m, ze stanu 2 nie można nigdzie przejść, a ze stanu 0 można przejść zarówno do stanu 0 jak i stanu 1. Zatem istnieje przejście ze stanu {0,2} do stanu {0,1} zaetykietowane przez m. W przypadku znaku wejściowego n, ze stanu 0 można przejść tylko do tego samego stanu, zaś ze stanu 2 przechodzi się do stanu 3. zatem istnieje przejście ze stanu {0,2} do stanu {0,3} zaetykietowane przez n. Ten stan automatu D jest stanem akceptującym gdyż zawiera stan akceptujący automatu niedeterministycznego, czyli stan 3.

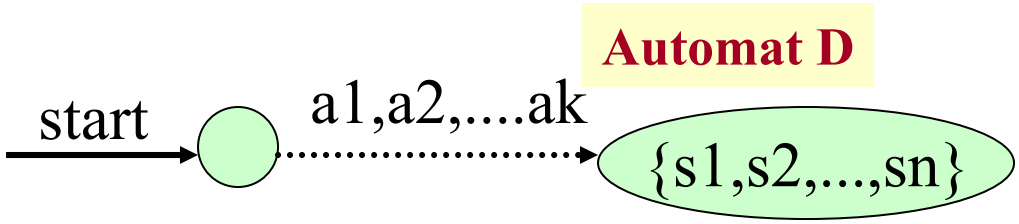
W końcu należy określić przejścia ze stanu {0,3}. Z uwagi na to ze ze stanu 3 nie można nigdzie przejść w przypadku dowolnego znaku wejściowego, przejścia ze stanu {0,3} odpowiadają przejściom tylko ze stanu 0, stad ograniczają się jedynie do przejść stanu {0}. Ponieważ przejścia ze stanu {0,3} nie prowadza do żadnego stanu automatu D, którego jeszcze nie sprawdziliśmy, konstrukcje automatu D można uznać za skończoną.

Automat deterministyczny D

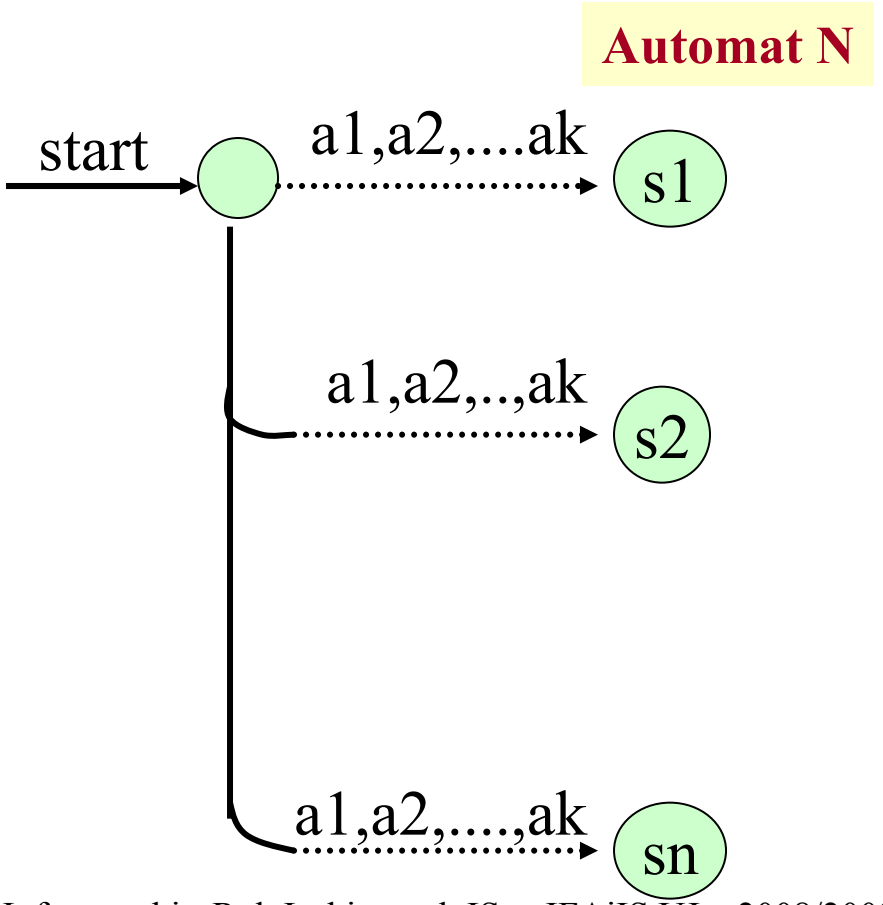


Konstrukcje automatu można uznać za skończoną. Przejścia ze stanu {0,3} nie prowadza do żadnego stanu automatu D którego jeszcze nie sprawdziliśmy. Stan {0} oznacza że odczytany ciąg nie kończy się żadnym przedrostkiem wyrazu man, stan {0,1} że kończy się sekwencją m, stan {0,2} że kończy się sekwencją ma, stan {0,3} że kończy się sekwencja man.

Uzasadnienie poprawności konstrukcji podzbiorów



Jeżeli automat D jest konstruowany na podstawie automatu niedeterministycznego N przy użyciu konstrukcji podzbiorów, to D jest automatem deterministycznym. Dla każdego stanu wejściowego x oraz dla każdego stanu S automatu D definiuje się określony stan T automatu D, taki, że etykieta przejścia z S do T zawiera symbol x. Należy jeszcze wykazać że automaty S i T są równoważne. Przeprowadza się dowód indukcyjny.



Formalne twierdzenie, które należy udowodnić przez indukcje względem k, mówi że stan {s1,s2,...,sn} osiągany przez automat D w wyniku przejścia ścieżką zaetykietowana symbolami a1a2...ak od stanu początkowego automatu D jest dokładnie zbiorem stanów automatu N, które są przez ten automat osiągane w wyniku przejścia od stanu początkowego pewną ścieżką zaetykietowana symbolami a1a2...ak.

Podstawa:

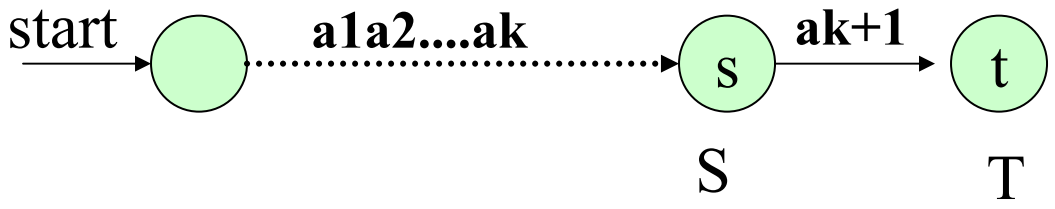
Niech k=0. Ścieżka o długości 0 nie powoduje przejścia do żadnego innego stanu, co oznacza, że powoduje pozostanie w stanie początkowym obu automatów D i N. Należy przypomnieć, że jeżeli s0 jest stanem początkowym automatu N, to stanem początkowym automatu D jest {s0}. Stąd twierdzenie indukcyjne jest spełnione dla k=0.

Indukcja:

Załóżmy, ze twierdzenie jest spełnione dla k i rozważmy ciąg wejściowy a1a2..ak ak+1. Wówczas ścieżka wiodąca od stanu początkowego automatu D do stanu T, zaetykietowana stanami a1a2....ak ak+1, ma postać:

Można założyć przez hipotezę indukcyjną, że S jest dokładnie zbiorem stanów, które osiąga automat N od swojego stanu początkowego wzdłuż ścieżki zaetykietowanej symbolami a1a2...ak i należy udowodnić, że T jest dokładnie zbiorem stanów, które automat N osiąga od swojego stanu początkowego wzdłuż ścieżki zaetykietowanej symbolami a1a2...ak ak+1. Dowód kroku indukcyjnego składa się z dwóch części.

(a) Należy wykazać, że zbiór T nie zawiera zbyt wielu elementów. To znaczy, jeżeli t jest stanem automatu N należącym do T, to stan t należy do ścieżki zaetykietowanej symbolami a1a2....ak ak+1 wiodącej ze stanu początkowego automatu N.
(b) Należy wykazać że zbiór T zawiera wystarczająca ilość elementów.
To znaczy, jeżeli t jest stanem automatu N osiąganym ze stanu początkowego ścieżką zaetykietowana symbolami a1a2....ak ak+1, to t należy do T.



Minimalizacja automatów

Jednym z zagadnień dotyczących automatów jest kwestia określenia *minimalnej liczby stanów* wymaganych do wykonania danego zadania. Posiadając pewien automat możemy zadać pytanie czy istnieje równoważny automat posiadający mniejszą liczbę stanów, a jeśli tak, jaka jest najmniejsza liczba stanów dowolnego automatu równoważnego.
Dla automatów deterministycznych zawsze istnieje pewien unikatowy automat deterministyczny o minimalnej liczbie stanów, równoważny z danym automatem.
Dowodzimy przez pokazanie że nie ma stanów nierównoważnych.
Nie istnieje podobna teoria w sytuacji automatów niedeterministycznych.

Nierównoważność dwóch stanów:

Podstawa: Jeżeli stan s jest stanem akceptującym, a stan t nie jest stanem akceptującym (lub odwrotnie), to s i t nie są równoważne.

Indukcja: Jeżeli istnieje pewien symbol wejściowy x, taki, że ze stanów s i t następują przejścia względem tego symbolu do dwóch różnych stanów, o których wiadomo że nie są równoważne, to stany s i t nie są równoważne.

Posumowanie

⇒ Automat skończony jest to oparty na modelu grafowym sposób określania wzorców. Występują jego dwie odmiany: automat deterministyczny oraz automat niedeterministyczny.
⇒ Istnieje możliwość konwersji automatu deterministycznego na program rozpoznający wzorce.
⇒ Istnieje możliwość konwersji automatu niedeterministycznego na na automat deterministyczny rozpoznający te same wzorce dzięki konstrukcji podzbiorów.

Istnieje bliski związek miedzy automatami deterministycznymi a programami, które wykorzystują pojecie stanu w celu odróżnienia ról, jakie odgrywają różne części programu. Zaprojektowanie automatu deterministycznego stanowi często dobry sposób opracowania takiego programu. Może to być trudne zadanie, często łatwiej zaprojektować automat niedeterministyczny, a następnie za pomocą konstrukcji podzbiorów zamienić go na jego odpowiednik deterministyczny.