Funkcja XOR;
Dwuwarstwowa sieć jednokierunkowa.

Cwiczenia zestaw 2
Termin oddania: 27.11 2009

- Zaimplementuj dwu wejściową funkcję logiczną XOR wg. przykładu:

S. Osowski, „Sieci neuronowe do przetwarzania informacji”,
Officyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej 2000, strona 40-42

- Zaimplementuj dwuwarstwową sieć jednokierunkową wg. przykładu 2.1.

J. Zurada, M. Barski, W. Jędruch, „Sztuczne sieci neuronowe”,
PWN 1996, strona 44-47

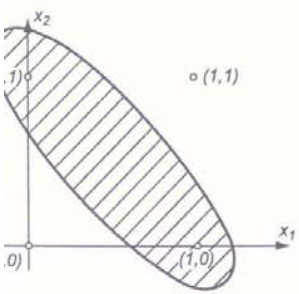
ıronu, jeśli należy do klasy liniowo separowalnych (np. problem logiczny ID, OR).

Ograniczone możliwości sieci jednowarstwowych [101] zostaną zademon- owane na przykładzie realizacji dwuwejściowej funkcji logicznej XOR. Dla roszczenia przyjęta będzie funkcja aktywacji w postaci skoku jednostko- go. Zbiór danych uczących dla problemu logicznego XOR jest przedsta- ony w tablicy 3.1

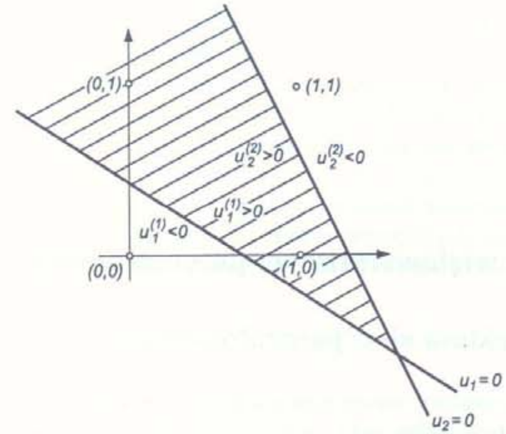
Tablica 3.1
Zbiór danych uczących dla problemu XOR

x_1	0	0	1	1
x_2	0	1	0	1
d	0	1	1	0

ıtwo pokazać, że w tym przypadku nie można przeprowadzić jednej li- separującej przestrzeń danych na dwie podprzestrzenie, z których jedna odpowiadałaby sygnałowi wejściowemu 1, a druga 0 (przestrzeń zakreskowana na rys. 3.2 odnosi się do jednej klasy, a nie zakreskowana – do drugiej klasy). Wewnątrz obszaru zakreskowanego sygnał wyjściowy neuronu powinien być równy 1, a na zewnątrz 0. Takiego warunku nie można spełnić stosując podział obszaru przy użyciu jednej prostej (jednego neuronu) niezależnie od wartości współczynników tej prostej (wagi w_{10}, w_{11}, w_{12}). Jednowarstwowy perceptron nie jest więc w stanie zrealizować nawet tak nieskomplikowanej funkcji, jaką jest XOR. Problem można łatwo rozwiązać, rozszerzając sieć neuronową. W tym celu zwiększamy liczbę neuronów w warstwie o jeden, dobierając ıgi obu neuronów w ten sposób, aby realizowały podział obszaru na części: $= w_{11}\,x_1 + w_{12}\,x_2 + w_{10} > 0$ i $u_1 = w_{11}\,x_1 + w_{12}\,x_2 + w_{10} < 0$, w zależności wektora wejściowego $x = [x_1, x_2]^T$ (pierwszy neuron) oraz $u_2 = w_{21}\,x_1 + w_{22}\,x_2 + w_{20} > 0$ i $u_2 = w_{21}\,x_1 + w_{22}\,x_2 + w_{20} < 0$ (drugi neuron). Dobór wag ıwinien zapewnić podzielenie obszaru takie, jak to pokazano na rys. 3.3.

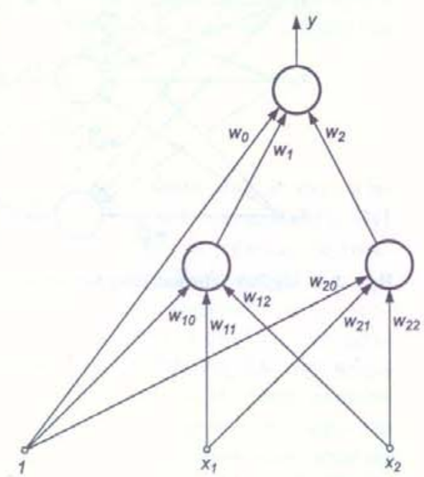


ıs. 3.2. Ilustracja nieseparowalności liniowej danych uczących, odpowiadających problemowi logicznemu XOR



Rys. 3.3. Rozwiązanie problemu nieliniowej separowalności przez złożenie dwóch separowalności liniowych

Dokładając na wyjściu dodatkową warstwę zawierającą jeden neuron, można zrealizować sumę logiczną odpowiadającą części wspólnej zbiorów $u_1 > 0, u_2 > 0$. Ostateczną postać sieci neuronowej realizującej funkcję XOR przedstawiono na rys. 3.4. Warto zauważyć, że wprowadzenie dodatkowej warstwy ukrytej sieci pozwoliło rozwiązać problem należący do klasy zadań nieseparowalnych liniowo. Każdy neuron w warstwie ukrytej wprowadza dodatkowy podział liniowy obszaru, przy czym granica podziału na część $u_i > 0$ i $u_i < 0$ jest uzależniona od wartości wag neuronu. Warstwa wyjściowa dokonuje wyboru odpowiedniej kombinacji liniowej (np. sumy logicznej) podobszarów, na które został podzielony obszar danych wejściowych przez neurony warstwy ukrytej.



Rys. 3.4. Struktura sieci neuronowej rozwiązującej problem XOR

do rozwiązania określonego problemu. Wybór architektury takiej sieci jest prosty. Liczbę neuronów wejściowych określa wymiar wektora wejściowego x, a liczba neuronów wyjściowych jest zadawana przez wymiar wektora $\boldsymbol{d}$. Uczenie sieci odbywa się zwykle w trybie z nauczycielem i jest dokładnym odpowiednikiem uczenia pojedynczego neuronu.

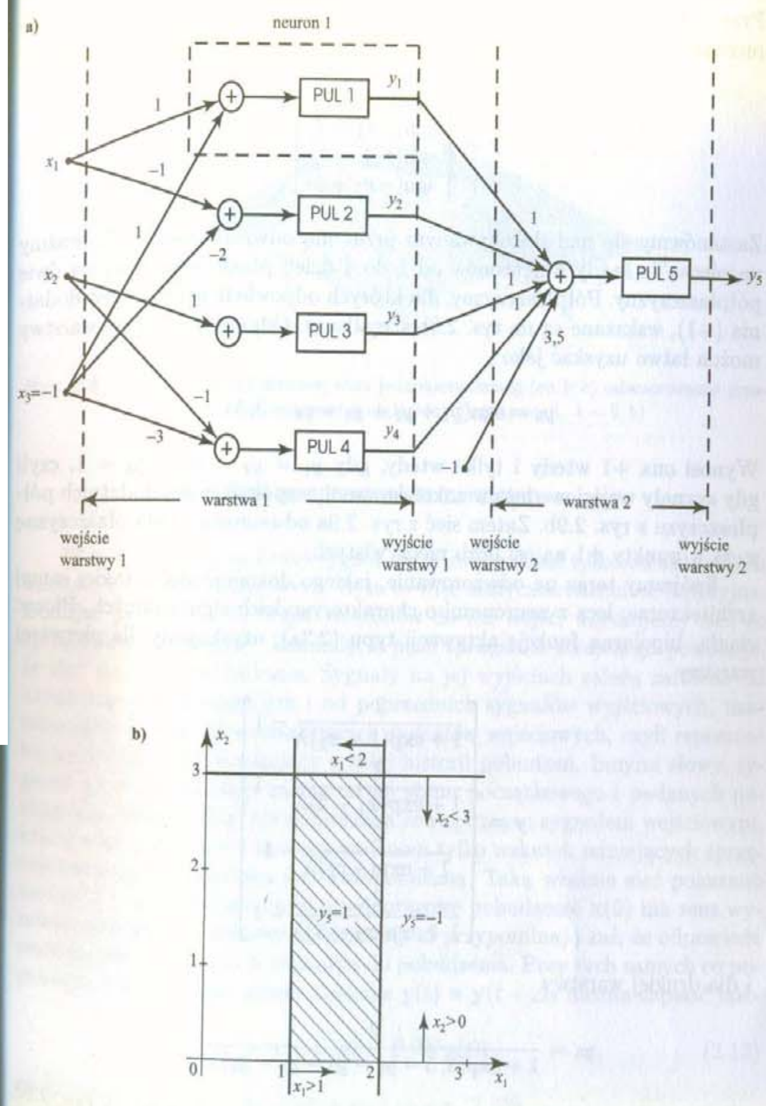
Przykład 2.1

Przeanalizujemy tu dwuwarstwową sieć jednokierunkową, złożoną z ne-
ronów o binarnej funkcji aktywacji, jak w (2.3b), i pokazaną na rys. 2.9
Znajdziemy sygnał wyjściowy y_5 dla zadanej sieci i danego obrazu wejści-
wego. Każda z warstw sieci opisana jest równaniem (2.12a), przy czym d-
pierwszej warstwy:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix},$$

dla drugiej zaś:

$$\mathbf{y} = [\, y_5 \,], \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{W}_2 = [\, 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 3{,}5 \,].$$



Rys. 2.9. Przykład dwuwarstwowej sieci jednokierunkowej: a) schemat, b) odwzorowanie przestrzeni dwuwymiarowej (dyskretna funkcja aktywacji)

Przy założeniu bipolarnych binarnych funkcji aktywacji wektor wyjściow pierwszej warstwy obliczamy jako

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \operatorname{sgn}(x_1 - 1) \\ \operatorname{sgn}(-x_1 + 2) \\ \operatorname{sgn}(x_2) \\ \operatorname{sgn}(-x_2 + 3) \end{bmatrix}.$$

Zastanówmy się nad dokonywanym przez nią odwzorowaniem. Zauważm najpierw, że każdy z neuronów od 1 do 4 dzieli płaszczyznę x_1x_2 na dw półpłaszczyzny. Półpłaszczyzny, dla których odpowiedź neuronu jest doda nia (+1), wskazane są na rys. 2.9b strzałkami. Odpowiedź drugiej warstw można łatwo uzyskać jako

$$y_5 = \operatorname{sgn}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 3,5).$$

Wynosi ona +1 wtedy i tylko wtedy, gdy $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 1$, czy gdy sygnały wejściowe leżą w zakreskowanej, wspólnej części dodatnich pó płaszczyzn z rys. 2.9b. Zatem sieć z rys. 2.9a odwzorowuje całą płaszczyzn x_1x_2 w punkty ± 1 na osi liczb rzeczywistych.

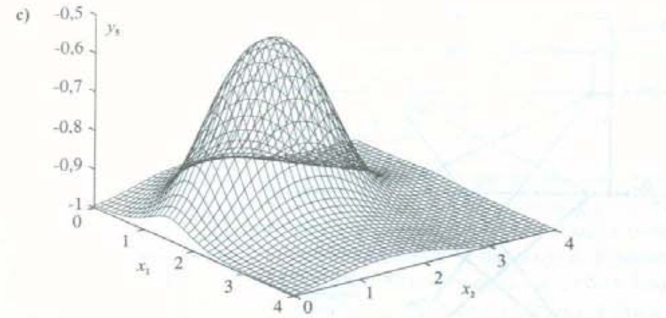
Spójrzmy teraz na odwzorowanie, jakiego dokonuje sieć o takiej sam architekturze, lecz z neuronami o charakterystykach sigmoidalnych. Bior ciągłą, bipolarną funkcję aktywacji typu (2.3a), uzyskujemy dla pierwsz warstwy

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dfrac{2}{1+\exp(1-x_1)\lambda} - 1 \\ \dfrac{2}{1+\exp(x_1-2)\lambda} - 1 \\ \dfrac{2}{1+\exp(-x_2)\lambda} - 1 \\ \dfrac{2}{1+\exp(x_2-3)\lambda} - 1 \end{bmatrix}$$

i dla drugiej warstwy

$$y_5 = \frac{2}{1+\exp(3,5 - y_1 - y_2 - y_3 - y_4)\lambda} - 1.$$

Sieć z neuronami ciągłymi realizuje odwzorowanie pokazane na rys. 2.9 Jak widać, choć istnieje pewne podobieństwo do działania neuronu dyskre nego, to tym razem odwzorowanie jest znacznie bardziej złożone. Przyp rządkowuje ono całej płaszczyźnie x_1x_2 przedział $(-1, 1)$. Z podobnym o wzorowaniem mieliśmy już do czynienia wcześniej, omawiając zagadnien aproksymacji funkcji (rys. 1.3).



Rys. 2.9. Przykład dwuwarstwowej sieci jednokierunkowej (cd.): c) odwzorowanie przestrzeni dwuwymiarowej (ciągła funkcja aktywacji, $\lambda = 2,5$)