12 X

1.1. Pole wektorowe $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}-\vec{a}|^2}$, gdzie $\vec{a}$ jest stałym wektorem, określone jest na $R^3 \backslash \{\vec{a}\}$. Kiedy pole to jest gradientem pewnej funkcji? Proszę znaleźć tę funkcję.

1.2. Punktowy dipol elektryczny jest utworzony przez dwa ładunki punktowe $-q$, q umieszczone, odpowiednio, w punktach $\vec{x}$, $\vec{x} + \vec{a}$, w granicy $|\vec{a}| \to 0$, $q \to \infty$, przy czym wektor $\vec{d} = q\vec{a}$ pozostaje stały. Obliczyć gęstość rozkładu ładunku $\rho(\vec{x}, t)$ i gęstość prądu $\vec{j}(\vec{x}, t)$ punktowego dipola elektrycznego poruszającego się po zadanej trajektorii $\vec{x}_0(t)$.
Wskazówka. W rozwiązaniu wystąpią pochodne delty Diraca.

1.3. Niech $S(r_0)$ oznacza sferę o promieniu $r_0 > 0$ i środku w początku układu. Pole elektryczne ma własność: dla każdego $r_0 > 0$ $\int_{S(r_0)} d\vec{\Sigma}\, \vec{E} = q$, gdzie q ma ustaloną dodatnią wartość. Czy stąd wynika, że $\mathrm{div}\vec{E} = q\delta(\vec{x})$?

1.4. Wykazać, że transformacje postaci

$$\vec{E}' = \cos\alpha\, \vec{E} + \sin\alpha\, \vec{B}, \quad \vec{B}' = -\sin\alpha\, \vec{E} + \cos\alpha\, \vec{B},$$

gdzie α jest liczbą rzeczywistą, są symetrią bezźródłowych ($\rho = 0$, $\vec{j} = 0$) równań Maxwella, tzn. przeprowadzają rozwiązanie w rozwiązanie. Współrzędne x^i, t nie transformują się.

1.5. Czy pole tzw. dyonu: $\vec{E} = q\frac{\vec{x}}{4\pi r^3}$, $\vec{B} = \kappa\frac{\vec{x}}{4\pi r^3}$, gdzie q i κ są stałymi $\neq 0$, $r = |\vec{x}|$, jest zgodne z równaniami Maxwella?

1.6. Pole elektromagnetyczne ma postać:

$$\vec{E} = \vec{0}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B(r) \end{pmatrix},$$

gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Obliczyć $\rho(\vec{x})$, $\vec{j}(\vec{x})$ gdy:
a) $B(r) = B_0\, \Theta(R - r)$, gdzie B_0 jest stałą $\neq 0$, Θ jest funkcją schodkową Heaviside'a,
b) $B(r) = B_0\, \exp(-r^2/\lambda^2)$, gdzie λ jest stałą $\neq 0$.

W obu przykładach obliczyć też całkowity strumień pola magnetycznego $\Phi = \int_S d\vec{\Sigma}\ \vec{B}$, gdzie S jest dowolną płaszczyzną prostopadłą do osi z.

1.7. Podać warunki jakie muszą spełniać wektorowe funkcje $\vec{f}(\xi)$, $\vec{g}(\xi)$ zmiennej rzeczywistej ξ, aby $\vec{E} = \vec{f}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct)$, $\vec{B} = \vec{g}(\vec{n}\cdot\vec{x} - ct)$ były rozwiązaniami równań Maxwella. Wektor $\vec{n}$ jest stały. Zakładamy, że $\rho = 0$, $\vec{j} = 0$.

19 X

2.1. Bezźródłowe równania Maxwella mają rozwiązania postaci

$$\vec{E} = \vec{E}_0\ f(t)e^{\vec{k}\vec{x}}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0\ h(t)e^{\vec{k}\vec{x}},$$

gdzie $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$ są stałymi wektorami rzeczywistymi, $|\vec{E}_0| = 1, |\vec{B}_0| = 1$.
a) Jakie warunki na $\vec{E}_0$, $\vec{B}_0$, $\vec{k}$ wynikają z równań Maxwella z dywergencjami?
b) Znaleźć postać funkcji $f(t), h(t)$ zgodną z prawami Faradaya i Ampère'a.

2.2. Otrzymać całkową postać prawa Faradaya w przypadku gdy pętla C porusza się w przestrzeni ze znaną prędkością $\vec{w}(\vec{x}(\sigma,t),t)$, gdzie $\vec{x}(\sigma,t) \in C$ jest wektorem wodzącym punktów pętli C w chwili t, a $\sigma \in [0, 2\pi)$ parametrem wzdłuż C.
Wskazówka: $\oint_C \vec{E}d\vec{l}$ będzie zastąpiona przez $\oint_C(\vec{E} + \vec{w} \times \vec{B}/c)d\vec{l}$, gdzie $d\vec{l} = \partial_\sigma \vec{x}(\sigma,t)\, d\sigma$.

2.3. (a) Zapisać jednowymiarowe równanie falowe

$$(c^{-2}\partial_t^2 - \partial_x^2)u(x,t) = 0$$

w zmiennych $x^+ = x + ct$, $x^- = x - ct$.
(b) Wykazać, że dowolne rozwiązanie tego równania ma postać

$$u(x,t) = f(x^+) + g(x^-),$$

gdzie f, g są funkcjami różniczkowalnymi.
(c) Wyrazić funkcje f, g przez warunki początkowe dla $u(x,t)$ w chwili $t = 0$.
(d) Podać przykład niezerowego rozwiązania jednowymiarowego równania falowego o zadanych warunkach początkowych takich, że $u(x,t) = 0$ dla dostatecznie dużych wartości $|x|$.

2.4. Rzeczywista funkcja $H(\vec{x},t)$ spełnia 3-wymiarowe, jednorodne równanie falowe oraz warunki początkowe:

$$H(\vec{x},0) = h(\vec{x}), \quad \partial_t H(\vec{x},t)|_{t=0} = g(\vec{x}).$$

Wyprowadzić wzór Kirchoffa

$$H(\vec{x},t) = \frac{1}{4\pi c}\int d^3y \, \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \left[\partial_t \delta(|\vec{x}-\vec{y}|-ct)\; h(\vec{y}) + \delta(|\vec{x}-\vec{y}|-ct)\; g(\vec{y})\right],$$

gdzie $t > 0$, wykonując następujące kroki:
(a) Korzystając z fragmentu wykładu pokazać, że

$$H(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \, \left[e^{i\vec{k}\vec{x}-ickt} a_1(\vec{k}) + e^{-i\vec{k}\vec{x}+ickt} a_1^*(\vec{k})\right],$$

gdzie $k = |\vec{k}|$.
(b) Wyrazić $a_1(\vec{k})$ przez $h(\vec{x})$, $g(\vec{x})$.
(c) Wykonać całkę po $\vec{k}$ całkując we współrzędnych sferycznych. Skorzystać ze wzorów

$$\int_0^\infty dk \; k e^{-ickt} f(k) = \frac{i}{c}\partial_t \int_0^\infty dk \; e^{-ickt} f(k), \quad \int_0^\infty dk \; e^{ik\xi} = \lim_{\epsilon\to 0+} \frac{-1}{i\xi-\epsilon} = \frac{i}{\xi+i0}.$$

(d) Jako uzupełnienie, wyrazić całkę objętościową o postaci

$$\int d^3y \; \delta(|\vec{x}-\vec{y}|-ct)\; f(\vec{y})$$

przez całkę powierzchniową po sferze o środku w punkcie $\vec{x}$ i promieniu ct.

26 X

3.1. Pola elektryczne dwu spolaryzowanych liniowo, monochromatycznych fal płaskich mają postać:

$$\vec{E}_1 = \vec{a}\, \cos\left(\vec{k}_0\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t\right), \quad \vec{E}_2 = \vec{b}\, \cos\left(\vec{k}_0\vec{x} - \omega(\vec{k}_0)t + \delta)\right),$$

przy czym $\vec{a}\,\vec{b} = 0$. Znaleźć polaryzację fali $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

3.2. (Egzamin) Wykazać, że każda monochromatyczna fala płaska jest superpozycją dwu fal spolaryzowanych
(a) liniowo w kierunkach wzajemnie prostopadłych,
(b) kołowo, z przeciwnymi skrętnościami.

3.3. Pole elektryczne ma postać

$$\vec{E}(\vec{x},t) = \vec{a}\,' \cos(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t) - \vec{a}\,'' \sin(\vec{k}\vec{x} - \omega(\vec{k})t),$$

gdzie $\vec{a}\,', \vec{a}\,''$ są stałymi wektorami prostopadłymi do wektora falowego $\vec{k} \neq 0$.
(a) Wykazać, że koniec wektora $\vec{E}(\vec{x},t)$, gdzie punkt $\vec{x}$ jest ustalony, zakreśla elipsę.
(b) Znaleźć długości i kierunki osi głównych tej elipsy.

9 XI

4.1. Na wykładzie pokazano, że

$$\eta^{\mu\nu} L^{\rho}{}_{\mu} L^{\sigma}{}_{\nu} = \eta^{\rho\sigma}$$

jest warunkiem wystarczającym aby $\Box_x = \Box_{x'}$, gdzie $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} + a^{\mu}$. Wykazać, że jest to także warunek konieczny.

4.2. Grupę Poincaré $\mathcal{P}$ tworzy zbiór par $(\hat{L}, a)$. Każda taka para jest związana z transformacją

$$x' = \hat{L}x + a \qquad (1)$$

omawianą na wykładzie. Określić iloczyn w $\mathcal{P}$ zgodny ze składaniem transformacji (1). Znaleźć jedynkę grupową i element odwrotny do $(\hat{L}, a)$.

4.3. Równanie Kleina-Gordona ma postać $(\Box - m^2)f(x) = 0$, gdzie m jest pewną stałą o wymiarze cm^{-1}, $x = (ct, \vec{x})$.
(a) Czy odwzorowanie

$$f(x) \to f'(x) = f(\lambda x),$$

gdzie λ jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą, jest symetrią równania Kleina-Gordona? Czy zbiór wszystkich takich odwzorowań stanowi grupę względem składania odwzorowań ?
(b) Sprawdzić, że odwzorowania

$$f(x) \to f'(x) = f(\hat{L}^{-1}x),$$

gdzie $\hat{L}$ jest dowolną transformacją Lorentza, tworzą grupę względem składania odwzorowań.

16 XI

5.1. (a) Wykazać, że $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}F^{\mu\nu}F^{\lambda\sigma}$, $\det\hat{F}$ są niezmiennikami względem transformacji Lorentza $\hat{L}$ o wyznaczniku równym $+1$.
(b) Wyrazić te niezmienniki przez pola $\vec{E}$, $\vec{B}$.
(c) Obliczyć wartości tych niezmienników dla monochromatycznej fali płaskiej.
$\epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma}$ jest symbolem ca-kowicie antysymetrycznym, przy czym $\epsilon_{0123} = +1$. $\hat{F} = (F^{\mu\nu})$ jest macierzą o rozmiarze 4×4, której elementami są $F^{\mu\nu}$.

5.2. Jak transformują się pola $\vec{E}$, $\vec{B}$ przy:
(a) Odbiciu przestrzennym $t \to t$, $\vec{x} \to -\vec{x}$?
(b) Odbiciu czasowym $t \to -t$, $\vec{x} \to \vec{x}$?

5.3. W nieruchomym, prostoliniowym i osiowo symetrycznym przewodzie o promieniu d_0 płynie jednorodny prąd o całkowitym natężeniu I. Gęstość ładunku jest równa zeru. Jakie pole elektromagnetyczne oraz gęstość ładunku i prądu zaobserwuje fizyk poruszający się ze stałą prędkością $\vec{v}$ równolegle do tego przewodu w odległości $d > d_0$ od jego osi.

5.4.(Egzamin) W układzie (x'^{μ}), poruszającym się ze stałą prędkością $\vec{v}$ (przy czym $|\vec{v}| < c$) względem układu laboratoryjnego, wytworzona jest monochromatyczna fala płaska o wektorze falowym $\vec{k}_0$.
(a) Obliczyć wektor falowy $\vec{k}$ oraz częstość $\omega(\vec{k})$ tej fali obserwowane w układzie laboratoryjnym.
(b) Przeanalizować zmianę częstości i kierunku rozchodzenia się fali w przypadkach $\vec{k}_0\vec{v} = 0$, $\vec{k}_0||\vec{v}$.
(c) Czy możliwe jest "zawrócenie" fali, tzn. uzyskanie $\vec{k} = -\eta\vec{k}_0$, gdzie $\eta > 0$?

23 XI

6.1. (a) Wprowadzamy zespolony wektor $\vec{Z} = \vec{E} + i\vec{B}$. Wykazać, że $\vec{Z}^2$ jest niezmiennikiem względem transformacji Lorentza.
(b) Przy transformacjach Lorentza $\vec{Z}'(x') = \mathcal{O}\vec{Z}(x)$, gdzie $\mathcal{O}$ jest zespoloną macierzą ortogonalną. Obliczyć tę macierz w wypadku pchnięć lorentzowskich.

(c) Obliczyć $\vec{Z}$ dla spolaryzowanej kołowo monochromatycznej fali płaskiej.
(d) Wykazać, że pchnięcia lorentzowskie zachowują polaryzację kołową oraz skrętność fali z punktu (c).

6.2. Wykazać, że całkowity ładunek elektryczny

$$Q = \int_{R^3} d^3x \; \rho(\vec{x}, t)$$

jest niezmiennikiem względem transformacji Lorentza (tzn. jego wartość nie zależy od wyboru układu odniesienia).
Wskazówki: Zauważyć, że przy obliczaniu Q w układzie (x'^{μ}) całkujemy po hiperpowierzchni stałego czasu t', która różni się od hiperpowierzchni stałego t. Powiązać obie całki po hiperpowierzchniach stałego czasu stosując równanie ciągłości i 4-wymiarowe twierdzenie Gaussa.

30 XI

7.1. Wyrazić całkowitą energię pola elektromagnetycznego ($\mathcal{E} = \int_{R^3} d^3x T_{00}$) przez amplitudę $\vec{a}_1(\vec{k})$, wprowadzoną na wykładzie 2. w fourierowskim rozwiązaniu bezźródłowych równań Maxwella.

7.2. Zbadać kiedy monochromatyczna fala płaska ma stałą gęstość energii T_{00} i pędu $\vec{\pi}$.

7.3. Monochromatyczna fala płaska pada prostopadle na płaski ekran o polu powierzchni Σ i jest w całości pochłaniana. Obliczyć siłę wywieraną na ekran przez tę falę.
Wskazówka. Obliczyć przyrost pędu ekranu.

7.4. (a) Prostopadłościan o polu podstawy Σ i wysokości d umieszczono w stałym polu magnetycznym $\vec{B}$ tak,że jego podstawy, naładowane ze stałymi gęstościami ładunku $\pm\sigma$, są równoległe do $\vec{B}$. Obliczyć pęd pola elektromagnetycznego. Przyjąć, że na zewnątrz prostopadłościanu pole $\vec{E}$ znika, wewnątrz zaś jest stałe.
(b) Obie podstawy prostopadłościanu zaczęto przesuwać ku sobie ze stałymi prędkościami $\pm\vec{v}$ prostopadłymi do podstaw. Po ich zetknięciu się następuje neutralizacja ładunków elektrycznych. Obliczyć pęd nadany podstawom przez siłę Lorentza. Przyjąć, że obie podstawy są tak ciężkie, że można zaniedbać ich prędkość w kierunku siły Lorentza.

7 XII

8.1. Jednowymiarowe równanie Poissona ma postać

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\rho(x),$$

gdzie $\rho(x)$ jest zadaną funkcją mającą zwarty nośnik.
a) Znaleźć rozwiązanie tego równania spełniające następujący warunek 'izotropowości': jeśli $\rho(x) = \rho(-x)$ to $E(x) = -E(-x)$, gdzie $E = -d\phi/dx$ jest polem elektrycznym ładunku o rozkładzie $\rho(x)$.
b) Znaleźć wiodący wkład do $E(x)$ oraz $\phi(x)$ dla bardzo dużych wartości $|x|$.

8.2. Znaleźć rozwiązanie równania Laplace'a w powłoce cylindrycznej $r \in (r_0, r_1)$, gdzie $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, spełniające warunki brzegowe $\phi(r_0, \theta, z) = a, \quad \phi(r_1, \theta, z) = b$, gdzie stałe a, b są zadane (problem Dirichleta). (r, θ, z) są współrzędnymi cylindrycznymi w R^3. Przeanalizować analogiczny problem Neumanna.

8.3. (a) Gęstość ładunku ρ zależy jedynie od $r = |\vec{x}|$. Wykazać, że momenty dipolowy i kwadrupolowy znikają.
(b) $\rho(\vec{x}) = \rho(-\vec{x})$. Wykazać, że $\vec{p} = 0$.

8.4. (Egzamin) Obie połowy kuli o promieniu R są naładowane jednorodnie i mają całkowite ładunki Q oraz $-Q$. Obliczyć wiodący wkład do potencjału ϕ i pola elektrycznego na dużych odległościach od kuli.

8.5. Dwa współśrodkowe, jednorodnie naładowane okręgi o promieniach a, b i ładunkach elektrycznych $q, -q$ leżą w jednej płaszczyźnie. Obliczyć wiodący wkład do potencjału ϕ i pola elektrycznego na dużych odległościach od okręgów.