

$$\boxed{H = \sum_j \epsilon_j n_j} \quad (1)$$

ϵ_j : energia nieoddziałującej cząsteczki,

j : liczby kwantowe parametryzujące stan pojedynczej cząstki

(uwzględniające również rzut spinu).

przypadek nierelatywistyczny: $\epsilon_{\vec{k}} = E_{\vec{k}} = E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2), \quad n_i \geq 0$

podsumowanie:

a) bosony bezmasowe ($\mu = 0$)

$$F = \sigma \beta^{-1} \sum_j \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_j})$$

b+c) bosony z masą i fermiony

$$\Xi = -pV = -\beta^{-1} \ln Z_G = -k_B T \sum_i \ln Z_{G,i}$$

$$= \sum_i \left[-k_B T \ln(1 \mp e^{\beta(\mu - \epsilon_i)}) \right] \quad \begin{cases} \text{górny znak: F} \\ \text{dolny znak: B} \end{cases}$$

$$\langle n_k \rangle = n(\epsilon_k) = \bar{n}_k = \sum_{n_k} n_k P_G(n_k)$$

$$= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \mu)} \pm 1} = \frac{\xi}{e^{\beta \epsilon_k} \pm \xi} \quad ; \quad \xi = e^{\beta \mu} \text{ — parametr zwyrodnienia}$$

Legenda: znak $\pm$ oznacza odpowiednio: (fermiony, górny), oraz (bosony, dolny)

$$\bar{N} \equiv N = \sum_{\vec{k}} \langle n_{\vec{k}} \rangle = \sum_{\vec{k}} \frac{\xi}{e^{\beta \epsilon_{\vec{k}}} \pm \xi}$$

$$\text{B} \longrightarrow \epsilon_k \geq 0 \quad \mu < 0$$

gęstości stanów w różnych reprezentacjach

formalnie poprawne wzory otrzymamy, gdy

$$\sum_i \longrightarrow \sigma \int \frac{d^3 \vec{p} d^3 \vec{x}}{h^3} \stackrel{\vec{p} = \hbar \vec{k}}{=} \frac{\sigma V \hbar^3}{h^3} \int d^3 \vec{k} = \frac{4\pi \sigma V}{(2\pi)^3} \int k^2 dk = \frac{\sigma V}{2\pi^2} \int k^2 dk$$

Relacje te zależą od wymiaru przestrzeni

$$\left(\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \Longleftrightarrow (E = \hbar \omega, \quad \omega = 2\pi \nu)$$

relacje dyspersji: $\omega = \omega(k)$

$$D(k) dk = D(\lambda) d\lambda = D(\nu) d\nu = D(\omega) d\omega = D(E) dE$$

cząstka nierelatywistyczna

$$E = \epsilon_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad \omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$$

$$1. \quad \sigma D(k) dk = \sigma \frac{V}{2\pi^2} k^2 dk$$

$$2. \quad \sigma D(E) dE = \sigma 2\pi V \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} E^{1/2} dE$$

$$3. \quad \sigma D(\omega) d\omega = \sigma \frac{V}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} \omega^{1/2} d\omega$$

$$4. \quad \sigma D(\nu) d\nu = \sigma V \left(\frac{2m}{\hbar} \right)^{3/2} 2\pi \nu^{1/2} d\nu$$

$$5. \quad \sigma D(p) dp = \sigma V \left(\frac{4\pi}{h^3} \right) p^2 dp$$

$$6. \quad \sigma D(\lambda) d\lambda = \sigma V 4\pi \frac{1}{\lambda^4} d\lambda$$

$$\Xi = -pV = \sigma \int_0^\infty D(\epsilon) \left[\mp \beta^{-1} \ln \left(1 \pm e^{\beta(\mu - \epsilon)} \right) \right] d\epsilon$$

$$\bar{N} = \sigma \int_0^\infty D(\epsilon) \frac{\xi}{e^{\beta\epsilon} \pm \xi} d\epsilon$$

$$E = \sigma \int_0^\infty D(\epsilon) \epsilon n(\epsilon) d\epsilon \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\sigma}{V} \int_0^\infty D(\epsilon) \frac{\xi}{e^{\beta\epsilon} \pm \xi} d\epsilon$$

Fotony

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 k^2} = \hbar \omega \quad \text{dla } m \rightarrow 0$$

$$\boxed{\omega = ck} \quad \boxed{\sigma = 2}$$

$$\left(\vec{p} = \hbar \vec{k}, \quad k = |\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \right) \Longleftrightarrow (E = \hbar \omega, \quad \omega = 2\pi \nu)$$

1. $\sigma D(k) dk = \frac{V}{\pi^2} k^2 dk$
2. $\sigma D(E) dE = \frac{V 8\pi}{c^3 h^3} E^2 dE$
3. $\sigma D(\omega) d\omega = \frac{V}{c^3 \pi^2} \omega^2 d\omega$
4. $\sigma D(\nu) d\nu = \frac{V 8\pi}{c^3} \nu^2 d\nu$
5. $\sigma D(p) dp = \frac{V 8\pi}{h^3} p^2 dp$
6. $\sigma D(\lambda) d\lambda = V 8\pi \frac{1}{\lambda^4} d\lambda$