

Wykład 12

Entropia informacyjna a fizyka statystyczna

Związek entropii z informacją (podejście Shannona-1948)

- Entropia informacyjna: definicja Shannona
- Entropia względna rozkładów (Kullback-Leibler)
- Nierówność dla entropii względnej i rozkład maksymalizujący entropię
- Entropia połączonych układów
- Maksimum entropii przy zadanych ograniczeniach na średnie
- Alternatywne wyprowadzenie rozkładów fizyki statystycznej
- Entropia Renney'ego i Tsallisa

W wykładach wprowadzających rozkłady rozważaliśmy mdzn. 2 typy sytuacji fizycznych:

dla układu izolowanego

($U = \text{const}$, $V = \text{const}$, $N = \text{const}$)

$$\left(\begin{array}{l} P(j) = \frac{1}{\Omega(U,V,N)} \\ S = k_B \ln \Omega \end{array} \right.$$

dla układu w kontakcie diatermicznym z (izolowaną) kąpielą :

$$\left(\begin{array}{l} P(j) = Z^{-1} e^{-\beta E(j)} \\ Z = \sum_j e^{-\beta E(j)} \\ S = \frac{U-F}{T} = k_B \beta \sum_j P(j) E(j) + k_B \ln Z \end{array} \right.$$

Chcielibyśmy teraz zastanowić się, czy są to czysto numeryczne wyniki, czy też (być może) zawierają głębszą informację o entropii.

(Odpowiedź na to pytanie prowadzi do definicji Entropii Shannona. Wprowadzając nowe wyrażenie na entropię Claude Shannon, pod koniec lat 40-tych, dał początek dyscyplinie znanej dzisiaj jako ‘Teoria Informacji’.)

Istotnie, poprzednie wyniki można zapisać w sposób uniwersalny przy pomocy jednej formuły zależnej jedynie od rozkładu prawdopodobieństwa:

dla rozkładu kanonicznego :

$$P(j) = Z^{-1} e^{-\beta E(j)}$$

$$Z = \sum_j e^{-\beta E(j)}; F = -k_B T \ln(Z)$$

(patrz wykład 11)

$$S = \frac{U-F}{T} = k_B \beta \sum_j P(j) E(j) + k_B \ln(Z)$$

$$S = k_B \beta \sum_j P(j) E(j) + k_B \ln Z = -k_B \sum_j P(j) [-\beta E(j) + \ln Z^{-1}]$$

$$= -k_B \sum_j P(j) [\ln e^{-\beta E(j)} + \ln Z^{-1}] = -k_B \sum_j P(j) \ln [Z^{-1} e^{-\beta E(j)}]$$

$$= -k_B \sum_j P(j) \ln[P(j)]$$

a dla rozkładu mikrokanonicznego:
($U = \text{const}$, $V = \text{const}$, $N = \text{const}$)

$$\begin{cases} P(j) = \frac{1}{\Omega(U, V, N)} \\ S = k_B \ln \Omega \end{cases}$$

$$S = k_B \ln \Omega = -k_B \ln \left(\frac{1}{\Omega} \right) = -k_B \sum_j P(j) \ln [P(j)]$$

**Entropia jako ‘miara nieporządku’
(Postulat Shannona – 1948):**

Entropia wiąże się z prawdopodobieństwem za pomocą relacji:

$$S[P] = -k_B \sum_j P(j) \ln[P(j)] \quad (\text{przypadek dyskretny})$$

$$S[\rho] = -k_B \int \rho(\mathbf{x}) \ln \left[\frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \right] d\mathbf{x} \quad (\text{przypadek ciągłych
zmiennych})$$

Uwaga 1

W oryginalnej relacji Shannona k_B było zastąpione dowolną stałą

Uwaga 2

ρ_0 wprowadza się aby skasować wymiar $\rho(\mathbf{x})$

Interpretacja S:

$$S[P] = -k_B \sum_j P(j) \ln[P(j)] \quad (\text{przypadek dyskretny})$$

Niech $P(i) = 1$ dla $i = i_0$
 $P(i) = 0$ dla pozostałych i

wtedy

$$S = -k_B P(i_0) \ln P(i_0) = 0$$

tzn. jeśli realizacja danego zdarzenia i_0 jest pewna,
wtedy $S = 0$

Weźmy drugi ekstremalny przypadek i założmy, że

$$P(i) = \frac{1}{\Omega} \quad \text{jest jednakowe dla wszystkich } i$$

$$\sum_i P(i) = 1 \Rightarrow \Omega = \sum_i 1.$$

wtedy dla wszystkich takich rozkładów

$$S[P] = -k_B \sum_i P(i) \ln[P(i)] \quad (\text{przypadek dyskretny}) = -k_B \left(\sum_i \frac{1}{\Omega} \right) \ln\left(\frac{1}{\Omega}\right) = k_B \ln \Omega$$

gdzie Ω jest liczbą wszystkich zdarzeń elementarnych.

Ostatnia relacja wygląda jak definicja Boltzmana.

Wkrótce pokażę, że ostatni przypadek odpowiada $S=\max$, licząc po przestrzeni rozkładów dyskretnych.

Dla rozkładów dyskretnych mamy również $S \geq 0$, bo $0 \leq P(i) \leq 1$.

Zatem wprowadzona entropia określa naszą ‘niewiedzę’ o tym, które ze zdarzeń się zrealizuje. Ta niewiedza jest minimalna, gdy jedno ze zdarzeń jest pewne i maksymalna, gdy wszystkie zdarzenia są równoprawdopodobne.

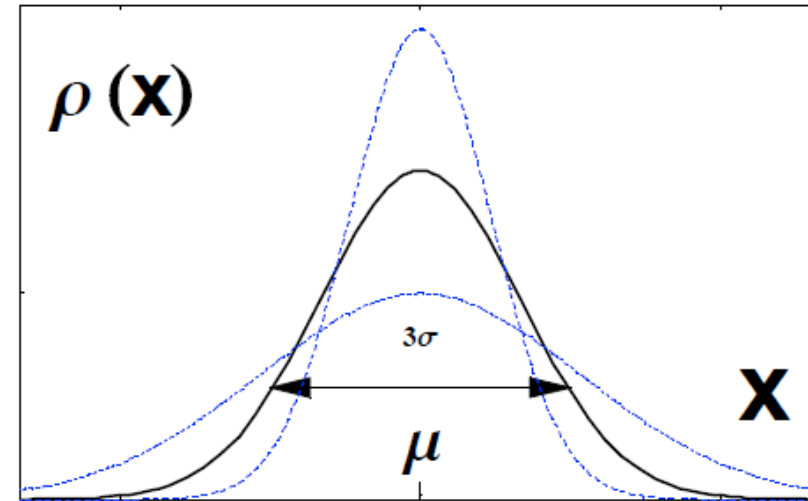
Jest zatem czymś w rodzaju ‘miary nieporządku w układzie’ - a więc odpowiada naszemu intuicyjnemu rozumieniu czym jest ciepło. Zobaczymy to jeszcze na przykładzie rozkładu Gaussa.

Rozkład Gaussa

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\langle \mathbf{x} \rangle = \mu \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\langle (\mathbf{x}-\mu)^2 \rangle = \sigma^2 \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{x}-\mu)^2 \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$



$$S = -k_B \int \rho(\mathbf{x}) \ln\left(\frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0}\right) d\mathbf{x} = k_B \ln \rho_0 - k_B \int \rho(\mathbf{x}) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right) d\mathbf{x}$$

$$+ k_B \int \rho(\mathbf{x}) \frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{2\sigma^2} d\mathbf{x} = k_B \ln \rho_0 + \frac{1}{2} k_B (1 + \ln(2\pi\sigma^2))$$

$$S = k_B \ln \rho_0 + \frac{1}{2} k_B (1 + \ln(2\pi\sigma^2))$$

- Entropia rośnie z rosnącym σ
- dla rozkładów ciągłych niekoniecznie $S \geq 0$

Można pomocniczo wprowadzić tzw. entropię względną, która już będzie miała określony znak.

ENTROPIA WZGLĘDNA (Kullback – Leibler, 1951, PRE)

(wprowadzenie entropii względnej pozwala ‘wyłowić’ istotę definicji Shannona):

Niech będą 2 gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ i $q(x)$:

$$p(x) \geq 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \int p(x) dx = 1, \quad \int q(x) dx = 1$$

Entropię gęstości $p(x)$ względem gęstości $q(x)$ definiujemy jako:

$$S[p/q] \stackrel{\text{df}}{=} -k_B \int p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)$$

$$S[p/q] \stackrel{\text{df}}{=} -k_B \int p(x) \ln \left(\frac{p(x)}{q(x)} \right)$$

$\Rightarrow$

Twierdzenie:

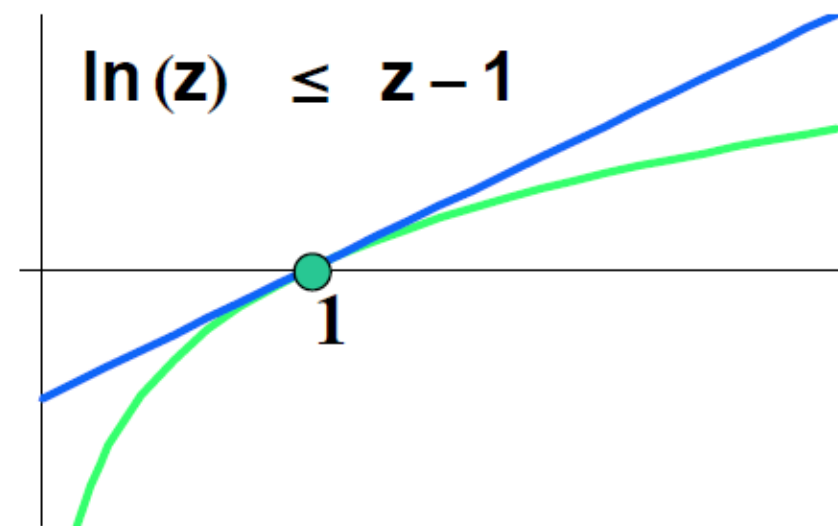
$$p(x) = q(x) \iff S[p/q] = 0$$

oraz

$$S[p/q] \leq 0 \text{ (zawsze)}$$

Dowód bazuje na nierówności (Gibbsa):

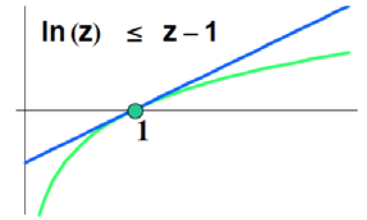
$$\ln(z) \leq z - 1, \text{ gdzie równość zachodzi dla } z = 1$$



$$S[p/q] \leq 0 \text{ (zawsze) !}$$

Dowód bazuje na nierówności (Gibbsa):

$\ln(z) \leq z - 1$, gdzie równość zachodzi dla $z = 1$



Dowód:

Weźmy $z = \frac{q(x)}{p(x)}$

$$-\ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) = \ln\left(\frac{q(x)}{p(x)}\right) \leq \frac{q(x)}{p(x)} - 1 \quad || \quad k_B p(x) \quad || \quad \int dx$$

$$-k_B \int p(x) \ln\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) dx \leq k_B \int [q(x) - p(x)] dx$$

$S[p/q]$

0

c.b.d.o

ZASTOSOWANIA:

(1) Niech $q(x)$: stała gęstość na danej (zwartej) przestrzeni
prawdopodobieństwa: $q(x) = \text{const} = \rho_0$

Wtedy

$$S[p] \equiv S[p / \rho_0] \leq 0.$$

Z faktu, że $S[p / \rho_0] = 0$ dla $p(x) = \rho_0$ wynika, że $S[p]$
osiąga maximum dla $p(x) = \rho_0$ (prawdziwe również w
przypadku dyskretnym)

$$S[p] \leq S[\rho_0]$$

(szczególny przypadek nierówności
Jensena dla funkcji wklęsłych)

(2) przypuśćmy, że mamy zmienne losowe x_1 i x_2 , oraz gęstości $\rho_1(x_1)$, $\rho_2(x_2)$ oraz łączne prawdopodobieństwo

$$\rho_{12}(x_1, x_2): \int \rho_{12} d\mathbf{x}_1 = \rho_2; \int \rho_{12} d\mathbf{x}_2 = \rho_1$$

Policzmy

$$\begin{aligned} S\left[\frac{\rho_{12}}{\rho_1 \rho_2}\right] &= -k_B \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \rho_{12}(x_1, x_2) \ln\left[\frac{\rho_{12}(x_1, x_2)}{\rho_1(x_1) \rho_2(x_2)}\right] \\ &= -k_B \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \rho_{12}(x_1, x_2) \ln\left[\frac{\rho_{12}(x_1, x_2)}{\rho_0^2}\right] \\ &\quad + k_B \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \overbrace{\rho_{12}(x_1, x_2)}^{\rho_1(x_1)} \ln\left[\frac{\rho_1(x_1)}{\rho_0}\right] \\ &\quad + k_B \int d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \overbrace{\rho_{12}(x_1, x_2)}^{\rho_2(x_2)} \ln\left[\frac{\rho_2(x_2)}{\rho_0}\right] = S_{12} - S_1 - S_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Zarówno w przypadku dyskretnym jak i ciągłym:

$$S_{12} \leq S_1 + S_2$$

Wniosek:

Entropia łącznej gęstości rozkładu zmiennych losowych jest zawsze mniejsza niż entropia oddzielnych gęstości.

Równość zachodzi gdy

$$\rho_{12}(x_1, x_2) = \rho_1(x_1) \rho_2(x_2),$$

tzn. gdy zmienne losowe są niezależne;

- entropia niezależnych zmiennych losowych jest sumą entropii;**
- dla niezależnych zmiennych losowych entropia S_{12} jest (w tym przypadku mamy ekstensywność) największa.**

Zasada Maksimum Entropii

Informacyjnej: (Istnienie zagwarantowane przez $S[p] \leq S[\rho_0]$)

Jaynes Phys.Rev. 106, 620 (1957)

Problem :

Chcielibyśmy znaleźć funkcję rozkładu prawdopodobieństwa $\rho(x)$ maksymalizującą entropię przy zadanych ograniczeniach:

$$\langle f_i(x) \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int dx f_i(x) \rho(x) = \eta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

gdzie

$f_i(x)$: zadane funkcje

η_i : zadane liczby rzeczywiste.

$$\langle f_i(\mathbf{x}) \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int d\mathbf{x} f_i(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) = \eta_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

Okazuje się, że taka gęstość ma postać:

$$\rho(\mathbf{x}) = Z^{-1} e^{-\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_n f_n(\mathbf{x})}$$

(zarówno w przypadku ciągłym jak i dyskretnym)

Tutaj

Z – stała normalizacyjna;

natomiast $\{\lambda_i\}$ można wyznaczyć ze znajomości $\{\eta_i\}$ korzystając z definicji:

$$Z^{-1} \int e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_i f_i(\mathbf{x})} f_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \eta_\alpha$$

$$\rho(\mathbf{x}) = Z^{-1} e^{-\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_n f_n(\mathbf{x})}$$

$$Z^{-1} \int e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_i f_i(\mathbf{x})} f_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \eta_\alpha$$

Dowód:

Wyliczmy $S[\rho]$ dla rozkładu z naszego twierdzenia:

$$S[\rho] \stackrel{\text{df}}{=} -k_B \int \rho(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \right) = k_B \ln(Z \rho_0) + k_B \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i$$

Niech teraz $\phi(\mathbf{x})$ będzie inną gęstością spełniającą warunek:

$$\langle f_i(\mathbf{x}) \rangle_\phi \equiv \int f_i(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \eta_i \quad \text{wtedy}$$

$$\mathbf{S}[\phi / \rho] \stackrel{\text{df}}{=} -k_B \int \phi(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \right) \leq 0$$

Stąd (po rozpisaniu logarytmu):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}[\phi] &= -k_B \int \phi(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{\rho_0} \right) \leq -k_B \int \phi(\mathbf{x}) \ln \left(\frac{\rho(\mathbf{x})}{\rho_0} \right) \\ &= k_B \int \phi(\mathbf{x}) \left(\ln(Z\rho_0) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= k_B \ln(Z\rho_0) + k_B \sum_{i=1}^n \lambda_i \eta_i = \mathbf{S}[\rho] \end{aligned}$$

$\Rightarrow \rho(\mathbf{x})$ jest gęstością odpowiadającą maksimum entropii

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}^{-1} e^{-\lambda_1 f_1(\mathbf{x}) - \lambda_2 f_2(\mathbf{x}) - \dots - \lambda_n f_n(\mathbf{x})}; \quad \mathbf{Z}^{-1} \int e^{-\sum_{i=1}^N \lambda_i f_i(\mathbf{x})} f_\alpha(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \eta_\alpha$$

PRZYKŁADY

1. Szukamy gęstości $\rho(\mathbf{x})$ zdefiniowanej na przedziale $[0, \infty)$, która daje maksimum entropii i spełnia warunek $\langle \mathbf{x} \rangle = \eta$

Rozwiązanie:

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{Z}^{-1} e^{-\lambda \mathbf{x}}; \quad \text{gdy } \mathbf{x} \geq 0 \quad \mathbf{Z} = \int_0^\infty e^{-\lambda \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \rho(\mathbf{x}) = \lambda e^{-\lambda \mathbf{x}}$$

i λ znajdujemy z warunku

$$\eta \equiv \langle \mathbf{x} \rangle = \int_0^\infty \mathbf{x} \lambda e^{-\lambda \mathbf{x}} d\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\langle \mathbf{x} \rangle}$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{\langle \mathbf{x} \rangle} e^{-\mathbf{x}/\langle \mathbf{x} \rangle}$$

2. $\rho = \rho(p, q)$ (p, q) : $6N$ wymiarowa przestrzeń fazowa
klasycznych cząstek

Szukamy maksimum entropii przy założeniu, że spełnia ona warunek poboczny:

$$\langle H(p, q) \rangle = E$$

Otrzymujemy wtedy

$$\rho(p, q) = Z^{-1} e^{-\lambda H(p, q)} \quad \text{tj. rozkład kanoniczny !}$$

$$\rho(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = Z^{-1} e^{-\lambda H(\mathbf{p}, \mathbf{q})} \quad \boxed{\text{Interpretacja } \lambda:}$$

$$(a) \quad E = \langle H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \rangle = Z^{-1} \int \frac{d^{3N} \mathbf{p} d^{3N} \mathbf{q}}{h^{3N} N!} H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) e^{-\lambda H(\mathbf{p}, \mathbf{q})}$$

$$\lambda = \lambda(E, N, V)$$

Znaczenie λ staje się bardziej oczywiste, gdy rozważymy entropię Shannona:

$$S[\rho] = k_B \ln(Z \rho_0) + k_B \lambda E$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S[\rho]}{\partial E} &= k_B \frac{\partial \ln(Z \rho_0)}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial E} + k_B \frac{\partial \lambda}{\partial E} E + k_B \lambda \\ &= k_B \lambda = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{k_B T} \equiv \beta \quad \Rightarrow \quad F = U - TS = -k_B \ln Z \end{aligned}$$

Proszę porównać poprzednie wyprowadzenie z obecnym.
Tutaj rozkład kanoniczny otrzymujemy z żądania maksimum entropii informacyjnej przy dodatkowym ograniczeniu,

$$\text{że } \langle \mathbf{H} \rangle = \mathbf{E}$$

tzn. $\langle \mathbf{H} \rangle$ dane jest niezależnie (co jest równoważne zadaniu temperatury w układzie kanonicznym). Oba podejścia wychodzą z tej samej sytuacji fizycznej.

**Inne, równoważne wyprowadzenie otrzymamy
żądając aby energia swobodna Helmholtza**

$$\mathbf{F(T,V,N)} = \mathbf{U - TS}$$

**osiągała minimum ze względu na $P(i)$ przy zadanych
 T, V, N (S : zdefiniowane wzorem Shannona)**

wyprowadzić!

$$U = \sum_i P(i) E(i) \equiv \langle E \rangle$$

$$S = -k_B \sum_i P(i) \ln P(i)$$

$$F[T, V, N; \{P(i)\}] = U - TS \stackrel{\text{df}}{=} \sum_i E(i) P(i) + k_B T \sum_i P(i) \ln P(i)$$

$$\text{Min}_{\substack{\{P(i)\} \\ \sum_i P(i)=1}} F: \frac{\delta[F - \lambda (\sum_i P(i) - 1)]}{\delta P(j)} = E(j) + k_B T \ln P(j) + k_B T - \lambda = 0$$

$$P(j) = Z^{-1} e^{-\beta E(j)}; \quad Z \Longleftrightarrow k_B T - \lambda \quad \text{jest stałą normalizacyjną rozkładu}$$

Wstawienie $P(j)$ do F daje znowu:

$$F = U - TS = -k_B \ln Z$$

Zadanie: wyprowadzić w podobny sposób rozkłady: wielki kanoniczny oraz izobaryczno-izotermiczny.

Interpretacja rozkładu wynikającego z Zasady Maksimum Entropii Informacyjnej.

Teoria Informacji dostarcza bardzo skutecznej metody wnioskowania w przypadku dowolnego układu, o którym mamy bardzo ograniczoną wiedzę.

Dostarcza ‘najmniej zakłóconego’ opisu jaki można wysnuć z danego zbioru danych. Wróćmy jeszcze raz do poprzedniej analizy:

Podsumowanie

Entropia wiąże się z prawdopodobieństwem za pomocą relacji:

$$S[P] = -k_B \sum_j P(j) \ln[P(j)] \leq S[\text{rozkład jednorodny}]$$

$$S[\rho] = -k_B \int \rho(x) \ln\left[\frac{\rho(x)}{\rho_0}\right] dx \leq S[\text{rozkład jednorodny}]$$

Zarówno w przypadku dyskretnym jak i ciągłym:

$$S_{12} \leq S_1 + S_2$$

Przypuśćmy, że prawdopodobieństwo $P(i)$ jest nieznane (i – dyskretne bądź ciągłe). Wiemy natomiast z 'eksperymentu', że

$$\langle f_\alpha \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \sum_i f_\alpha(i) P(i) = \eta_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n \ll N(\text{stany}).$$

Pytanie, które możemy postawić mogłoby być następujące:
Czy coś 'konkretnego' możemy powiedzieć o (nieznanym) rozkładzie. Oczywiście, na ogół, istnieje ogromna ilość rozkładów zgodna z naszą ograniczoną wiedzą wyrażoną przez $\langle f_\alpha \rangle$

Teoria Informacji stwierdza, że NAJLEPSZYM z takich rozkładów jest rozkład maksymalizujący entropię informacyjną! (jest to rozkład o 'maksymalnej ignorancji' na temat rozkładu)

$$P(i) = e^{-\lambda_0 - \lambda_1 f_1(i) - \lambda_2 f_2(i) - \dots - \lambda_n f_n(i)}$$

$$\sum_i e^{-\lambda_0 - \sum_{\alpha=1}^n \lambda_{\alpha} f_{\alpha}(i)} f_{\alpha}(i) = \langle f_{\alpha} \rangle$$

Przy braku ograniczeń (poza normalizacją): rozkład jednorodny

**Ograniczenie na średnią: rozkład wykładniczy
etc...**

(Jest to recepta na ustalenie w sposób precyzyjny ‘miary informacji jaką obserwator posiada o badanym **zjawisku**)

Czy jest to jednoznaczny wybór?

(Aby odpowiedzieć na to pytanie trzeba ustalić aksjomatykę prowadzącą do takiego właśnie wzoru na entropię)

Zrobił to Khinchin (57)

który pokazał, że wybór Shannona opiera się o 4 aksjomaty:

1. $S=S[P]$ (S zależy jedynie od P)
2. $S[P] \leq S[\text{rozkład jednorodny}]$
3. Jeśli przy $n+1$ stanach, $P(n+1) = 0$ wtedy S nie ulegnie zmianie.
4. **dotyczy prawdopodobieństw warunkowych, natomiast jeśli przyjąć: $S[P(1,2)=P(1)P(2)] = S[P(1)] + S[P(2)]$**

Wtedy poza entropią Shannona otrzymuje się entropię Reny'ego:

$$S_{R,\beta} = (1 - \beta)^{-1} \ln \left(\sum_{i=1}^n P(i)^\beta \right), \quad \beta - \text{rzeczywiste}$$

Entropia Renny'ego nie może być utożsamiona z fizyczną entropią równowagową, bo nie ma określonej wypukłości, gdy analizowana jako funkcja $P(i)$ (jednak jest użyteczna np. przy analizie fraktali i zbiorów Kantora)

Inny prosty wybór dla (4) gwarantujący wypukłość (i inny niż E. Shannona) ma postać zaproponowaną przez Tsallisa (1988):

$$S[P(1, 2)] = S[P(1)] + S[P(2)] + (1 - q) S[P(1)] S[P(2)],$$

q – rzeczywiste

$$\Rightarrow S_{T,q} = (q - 1)^{-1} \sum_{i=1}^n [P(i) - P(i)^q] \quad (\text{nie jest to jednak f. ekstensywna})$$

Można pokazać, że

$$\mathbf{S}_{R,q} = (1 - q)^{-1} \ln[1 + (1 - q) \mathbf{S}_{T,q}]$$

Ciekawe cechy tej entropii:

Jeśli zdefiniować uogólnioną energię wewnętrzną jako :

$$U_q = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(i)^q \mathbf{E}(i)}{\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(i)^q}, \text{ wtedy można odtworzyć całą matematyczną}$$

strukturę termodynamiki (bazującą na transformatach Legendre'a)

**Waga zdarzeń mało prawdopodobnych przy ‘ $q < 1$ ’ rośnie;
można generować rozkłady (potęgowe) z długimi ogonami**



Kilka cytatów związanych z zagadnieniem entropii.

Entropy.

=====...

1.

Henry Poincare named the conception of "entropy " as a " surprising abstract ".

2.

Lev Landau (Dau) wrote: " A question about the physical basis of the entropy monotonous increasing law remains open ".

3.

The famous mathematician John von Neumann said to "the father of information theory" Claude Shannon: " Name it "entropy" then in discussions you will receive solid advantage, because nobody knows, what "entropy" basically is ".

=====

1.

Between 1850 - 1865 Rudolf Clausius published a paper in which he called " The energy conservation law" as " The first law of thermodynamics". But in our nature the heat always flows from the higher temperature to the lower one and never back. In our everyday life we don't see the heat itself rises from cold to hot. So, it seemed that in thermodynamics " The energy conservation law" wasn't kept, this law was broken. But Clausius had another opinion. He thought: I know people believe that this process is irreversible, but I am sure that " The energy conservation law" is universal law and it must be correct also for thermodynamic process. So, how can I save this law ? Probably, in the thermodynamic process there is something that we don't know. Maybe, there is some degradation of the total energy in the system which never disappears . Perhaps, there is some non-useful heat, some unseen process , some unknown dark energy , some another form of potential energy/heat itself which can transform heat from the cold body to the warm one. I will call this conception as " entropy" and it will mean that changes of entropy (dS) can be calculated for reversible process and may be defined as the ratio of the quantity of energy taken up (dQ) to the thermodynamic temperature (T), i.e. $dS= dQ /T$. And because I don't know how this process goes I won't call it as a law but as " The second principle of thermodynamics " which says that " the entropy of an isolated system always increases ". Another version: " No process is possible in which the only result is the transfer of heat from a hotter to a colder body. It is possible some reversible process which is unknown now ."

2.

Between 1870 - 1880 Ludwig Boltzmann said:

" Clausius is right. But I can add more to his entropy conception.

First.

According to Classic physics when an isolated thermodynamic system comes to a thermal equilibrium all particles stop their moving. From one hand it is correct. But the system cannot be at thermal equilibrium (in the state of thermo death) all the time.

The situation in the system must change.

Therefore I say that at the thermal equilibrium the entropy (some unknown dark/potential energy) of the system will reach maximum and as a result , the thermal equilibrium of the system will change.

Second.

I don't know how exactly the thermal equilibrium of the system changes. But I can give probabilistic / statistical interpretation of this changing process. I can write " The second principle of thermodynamics" by a formula: $S = k \log W$ and this formula says: " the entropy (heat) of the system is the collective result of mechanical motion and friction of all the particles (k)."

I will call it as " The second law of Thermodynamics."

3

In 1900 Max Planck said:

Clausius and Boltzmann are both right.

But all my life I worked almost exclusively on problems related to thermodynamics. And I am sure that the " The second law of Thermodynamics" , concerning entropy, is deeper and it says more than is generally accepted. I am sure the Boltzmann's probabilistic /statistical version of "The second law of Thermodynamics " is not completed, is not final.

Please, look at the graph of the radiation curves of the " black body".

They are very similar to those curves which are calculated by Maxwell for the velocity (i.e. energy) distribution of gas molecules in a closed container. Could this black body radiation problem be studied in the same way as Maxwell's ideal gas....

...electromagnetic waves ? This problem of connection between radiation of black body and Maxwell's Electrodynamics theory doesn't give me peace. Maxwell's theory can tell everything about the emission, absorption and propagation of the radiation, but nothing about the energy distribution at thermal equilibrium. What to do? How to be ?

After trying every possible approach using traditional classical applications of the laws of thermodynamics I was desperated. And I was forced to consider that the relation between entropy, Boltzmann's probability version and Maxwell's theory is possible to solve by suggestion , that energy is radiated and absorbed with discrete individual quanta particle ($E = h\nu$). So, now I must write " The second law of Thermodynamics " by formula:

$$h\nu = k \log W.$$

But if I look to the Clausius inequality I see that entropy is energy divided per temperature.

So the formula $h\nu = k \log W$ is $h\nu = kT \log W$ I think.

I was so surprised and sceptical of such interpretation of the entropy that I spent years trying to explain this result in another , less revolutionary way. It was difficult for me to accept this formula and to understand its essence . It was hard for me to believe in my own discovery.

=====..

My conclusion.

How to understand this formula?

Which process does formula ($h\nu = kT \log W$) describe ?

1.

In 1877 Boltzmann suggested that the energy/mass state of a physical system (of ideal gas) could be discretized.

This idea was written with formula: $R/N=k$. It means: there are particles with energy/mass state (k) in physical system of ideal gas . They don't move, they are in the state of rest.

2.

In 1900 Planck followed Boltzmann's method of dividing.

Planck suggested that energy was radiated and absorbed with discrete "energy elements" - " quantum of energy" -

- " Planck's action constant" - (h) . This fact means:

electron produces heat, setting in mechanical motion and friction all particles. This fact is described with Planck's formula: $h\nu = kT \log W$.

3.

In which reference frame does this process take place?

In thermodynamical reference frame of ideal gas and black body (M. Laue called this model as Kirchhoff's vacuum).

Now it is considered that these models are abstract ones which do not exist in nature. On my opinion these models explain the situation in the real Vacuum ($T=0K$) very well.

4.

For my opinion the formula ($h\nu = kT \log W$) says:

a)

The reason of " entropy" , the source of thermal equilibrium's fluctuation , the source of Vacuum fluctuation is an action of the particle /electron, which has energy: $E = h\nu$ (hf).

b)

The process of Vacuum fluctuation depends on collective motions of all particles (k) and will be successful if enough statistical quantity of Boltzmann's particles ($kT \log W$) surround the electron.

c)

Which process does the formula ($h\nu = kT \log W$) say about ?

This formula describes the possibility of realization of macro state from micro state. This formula explains the beginning conditions of gravitation, the beginning conditions of star formation.

1.

$h\nu = kT \log W$.

$h\nu > kT \log W$.

$h\nu < kT$.

2.

$h\nu \rightarrow \text{He II} \rightarrow \text{He I} \rightarrow$

(P. Kapitza , L. Landau , E.L. Andronikashvili theories).

(Superconductivity, superfluidity.)

3.

Plasma reaction... $\rightarrow$

4.

Thermonuclear reactions ... $\rightarrow$etc.

d)

Thanks to Entropy the homogeneous Vacuum is broken.

Thanks to Entropy the micro process changes into
macro process.

Thanks to Entropy the stars formation takes place.

Thanks to Entropy " the ultraviolet catastrophe" is absent.

Thanks to Entropy our Milky Way doesn't change into radiation.

Thanks to Entropy the process of creating elements takes place.

Thanks to Entropy the process of evolution is going.

e)

One physicist said : " The entropy is only a shadow of energy.

Maybe now somebody can understand why entropy is a shadow.

And maybe now somebody will understand why

" The Law of conservation and transformation of energy"

is also correct for thermodynamic system.

f)

Why is " The second law of Thermodynamics"

so universal? Because it is based on

" The Law of conservation and transformation of energy"

And this law is not the simple accounting solution of debit and credit.

The sense of this law is deeper and it says more than is usually
accepted.

=====..

P.S.

It took me about three months to write this brief article.

Plus about three years searching for the key of entropy problem.

Plus about twenty-three years trying to understand the essence
of physical laws and formulas.

=====..

Best wishes.

Israel Socratus.

<http://www.socratus.com>

<http://www.wbabin.net/>

#

[A law] is more impressive the greater the simplicity of its premises, the more different are the kinds of things it relates, and the more extended its range of applicability. Therefore, the deep impression which classical thermodynamics made on me. It is the only physical theory of universal content, which I am convinced, that within the framework of applicability of its basic concepts will never be overthrown.

/ Albert Einstein/

#

The law that entropy always increases -- the second law of thermodynamics -- holds I think, the supreme position among the laws of Nature. If someone points out to you that your pet theory of the universe is in disagreement with Maxwell's equations - then so much worse for Maxwell equations. If it is found to be contradicted by observation - well these experimentalists do bungle things sometimes.

But if your theory is found to be against the second law of Thermodynamics, I can give you no hope; there is nothing for it but to collapse in deepest humiliation.

/ Sir Arthur Stanley Eddington /

=====...