

TERMODYNAMIKA I FIZYKA STATYSTYCZNA

Lech Longa

pok. D.2.49, II piętro, sektor D

Zakład Fizyki Statystycznej

e-mail: lech.longa@uj.edu.pl

Dyżury: poniedziałki 14 -15.50

można się umówić wysyłając e-maila

egzamin pisemny:

17 czerwca, wtorek, godziny 10.00-13.00 sala A1-13

O wynikach egzaminu pisemnego będziecie Państwo poinformowani, każdy osobiście, bezpośrednio na spotkaniu z wykładowcą w wyznaczonym terminie.

egzamin ustny (dla tych z Państwa, którzy będą chcieli zmienić ocenę końcową – proszę o wcześniejszy kontakt):

termin i godziny do ustalenia

egzamin pisemny II termin:

12 września, piątek, godz. 10-13, sala do ustalenia

egzamin ustny II termin:

do końca września – termin i godzina do ustalenia

ocena z wykładu:

$$\frac{1}{2} (Ocena z ćwiczeń + Ocena z egzaminu pisemnego)$$

lub

$$\frac{1}{3} (Ocena z ćwiczeń + Ocena z egzaminu pisemnego + Ocena z egzaminu ustnego)$$

(Przy założeniu zaliczenia ćwiczeń i egzaminu pisemnego)

Jeden mol substancji (czyli typowy makroskopowy układ) zawiera
 $N \approx 6,022 \cdot 10^{23}$ cząstek.

Odpowiada to 12 gramom węgla lub około 2 do 100 gramów gazu, w zależności od jego rodzaju. W temperaturze pokojowej i pod ciśnieniem atmosferycznym 1 mol gazu zajmuje około 24,6 litra objętości.

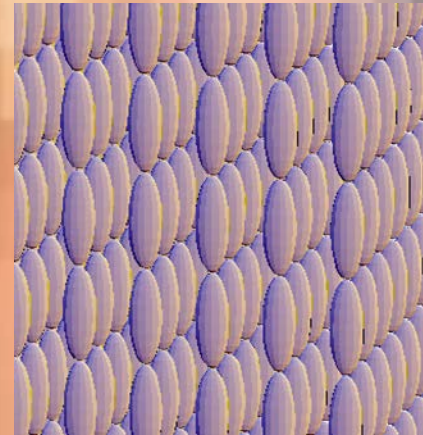
Ponieważ nawet problem trzech ciał nie ma ogólnego rozwiązania w formie zamkniętej, obliczenie właściwości systemów tej wielkości jest beznadziejnie skomplikowane. Jednak, jak zobaczymy w trakcie tego wykładu, duże systemy są szczególnie podatne na obróbkę statystyczną.

W reżimie granicy termodynamicznej, gdzie liczba cząstek $N \rightarrow \infty$, opis staje się łatwiejszy - o ile interesują nas tylko statystyczne właściwości systemu jako całości. To jest główna motywacja stojąca za **fizyką statystyczną i termodynamiką**.

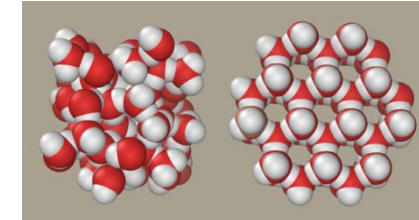
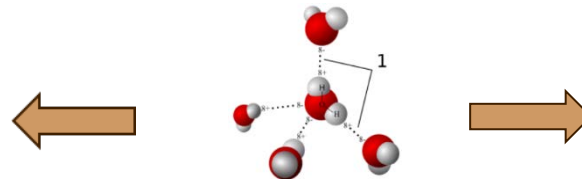
Metody fizyki statystycznej znajdują zastosowania, między innymi, w kosmologii, astrofizyce, fizyce fazy skondensowanej, biofizyce molekularnej, socjofizyce i w prawie wszystkich innych działach fizyki.

Zjawiska emergentne

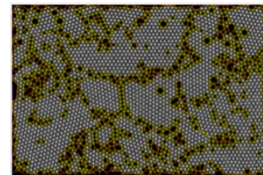
Używamy pojęć
i obserwujemy zjawiska
w skali makroskopowej,
które wyprowadza się z
praw mikroskopowych
(oddziaływań między cząsteczkowych)
gdzie te pojęcia i zjawiska
nie mają, apriori
sensu



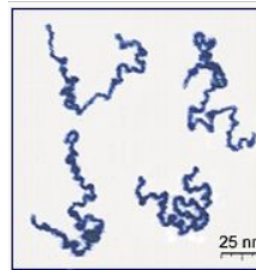
Termodynamika oraz Fizyka Statystyczna zajmują się m.dzn. zjawiskami emergentnymi; przykłady poniżej



A crystal of amethyst



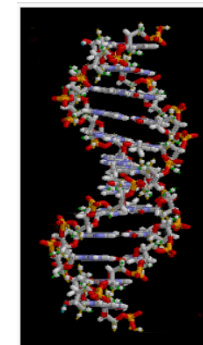
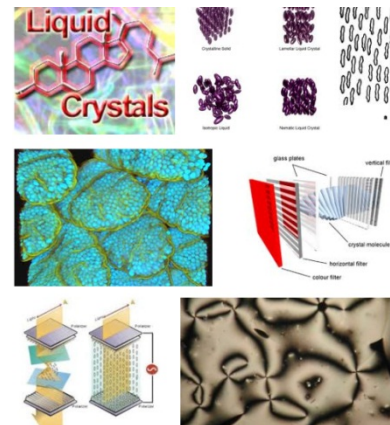
The connectivity of the crystals in the colloidal crystals



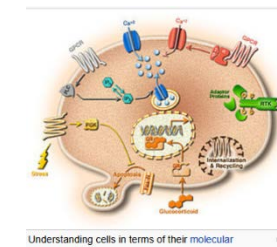
Appearance of real linear polymer chains as recorded using an atomic force microscope on surface under liquid medium.



Roman Cage Cup from the 4th century A.D.



Microstructure of part of a DNA double helix biopolymer



Understanding cells in terms of their molecular components.

LITERATURA

- 1. Kopia wykładów (http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/wp/?page_id=619)**
- 2. K. Zalewski, Wykłady z termodynamiki
fenomenologicznej i fizyki statystycznej.**
- 3. J. Werle, Termodynamika Fenomenologiczna.**
- 4. A. I. Anselm, Podstawy fizyki statystycznej i
termodynamiki.**
- 5. Kerson Huang, Mechanika Statystyczna. (4)**
- 6. M. Toda, R. Kubo, N. Saitô Statistical Physics I,
Statistical Physics II.**
- 7. D.J. Amit and Y. Verbin, Statistical Physics,
An Introductory Course**
- 8. J. D. Walecka, Introduction to Statistical Mechanics**

Plan wykładów:

- Podstawy rachunku prawdopodobieństwa;
- Procesy stochastyczne (procesy Markova)
- Omówienie podstaw termodynamiki fenomenologicznej: postulatów będących uogólnieniem obserwacji empirycznych, a znanych jako zasady termodynamiki.
- Konsekwencje zasad termodynamiki

Plan wykładów:

- Omówienie podstaw fizyki statystycznej: pojęcie entropii Boltzmana oraz temperatury absolutnej; rozkłady używane w fizyce statystycznej, ich pochodzenie i własności;
- Wstęp do teorii informacji (entropia informacyjna i jej własności).
- zastosowania do konkretnych układów kwantowych oraz klasycznych
(gazy kwantowe, kondensacja Bosego-Einsteina, model Isinga i przejścia fazowe)
- Elementy termodynamiki nierównowagowej (produkcja entropii, relacje Onsagera).

Wykład 1

Elementy teorii rachunku prawdopodobieństwa

Plan:

1. Definicja aksjomatyczna i `praktyczna`
2. **Prawdopodobieństwo warunkowe i twierdzenie Bayesa**
3. Funkcje rozkładu; rozkład Gaussa
4. Funkcje charakterystyczne; rozwinięcie kumulantów
5. Centralne twierdzenie graniczne.

Aksjomatyka rachunku prawdopodobieństwa

Przestrzeń zdarzeń elementarnych:

$\Omega \equiv \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: przestrzeń możliwych rzutów kostką

$\Omega \equiv \{ \{ \vec{p}_i \}, \{ \vec{x}_j \} \}$: przestrzeń wszystkich położeń i pędów
N klasycznych cząstek punktowych (6 N
wymiarowa)

$\Omega \equiv [A, B]$: przedział na osi rzeczywistej

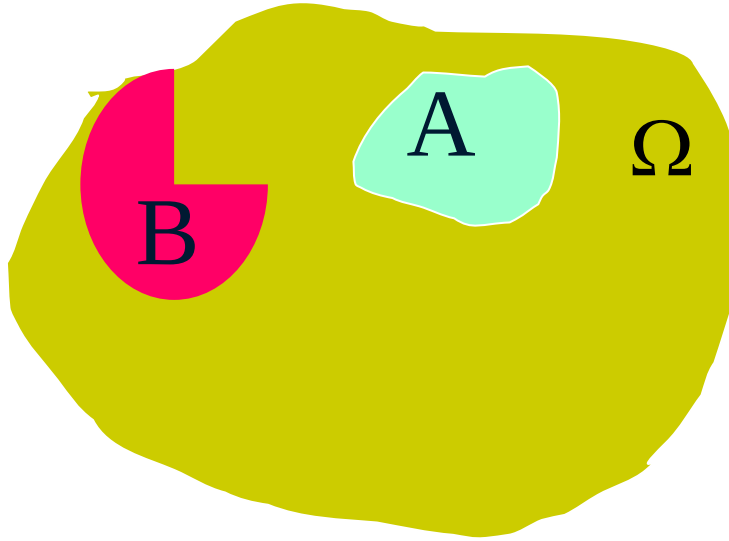
$\Omega \equiv \{-1, 1\}$: przestrzeń rzutu spinu (w problemie z
jednym spinem)

etc.

Podstawowe działania na zdarzeniach i ich interpretacja (`język` rachunku prawdopodobieństwa)

- Ω – zdarzenie pewne
- $\emptyset$ – zdarzenie niemożliwe
- $A \cap B$ – zaszły oba zdarzenia A , B
- $A \cup B$ – zaszło A lub B
- $\bar{A}$ – nie zaszło A ; zdarzenie przeciwne do A
dopełnienie zbioru A
- $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ – zaszło A i nie zaszło B
- $A \subseteq B$ – A pociąga za sobą B

Definicja aksjomatyczna prawdopodobieństwa (szkolna)



uwaga:

modelując konkretne doświadczenie losowe warunki doświadczenia nie zawsze w sposób jednoznaczny zadają przestrzeń probabilistyczną (porównaj paradoks Bertranda omawiany na ćwiczeniach)

A: zdarzenie

$A \subset \Omega$; A – podzbiór zdarzeń

A: zdarzenie

$A \subset \Omega$; A – podzbiór zdarzeń

**(1) $\forall A \quad \exists P(A) \in \mathbb{R} : P(A) \geq 0$
(P(A) – pr. zajścia zdarzenia A)**

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Jeśli $A \cap B = \emptyset \iff P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

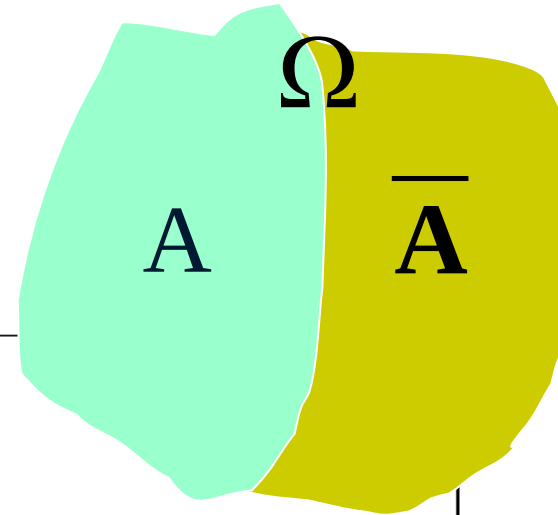
A: zdarzenie

$A \subset \Omega$; A – podzbiór zdarzeń

(1) $\forall A \exists P(A) \in \mathbb{R} : P(A) \geq 0$
($P(A)$ – pr. zajścia zdarzenia A)

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) Jeśli $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$



$\Rightarrow$ (z 1,2) $\forall A \subset \Omega : 0 \leq P(A) \leq 1$

$\Rightarrow$ (z 1,2,3) $\bar{A} \cup A = \Omega \quad \bar{A} \cap A = \emptyset$ (zdarzenia dopełniające)

$$P(\bar{A} \cup A) = P(\bar{A}) + P(A) = 1$$

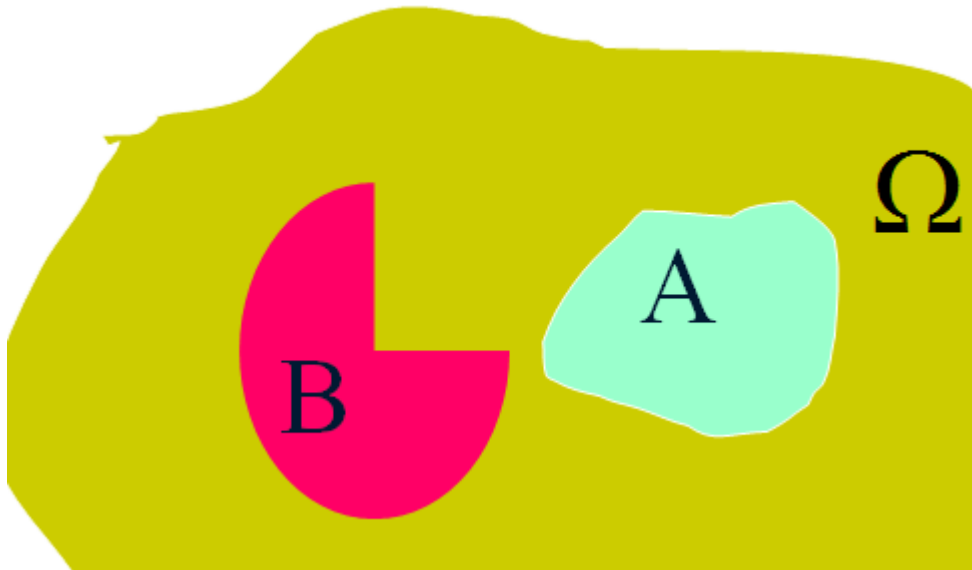
$\Rightarrow$ (z 3) dla szeregu zdarzeń wykluczających się : $A_i \cap A_j = \emptyset$
 $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Praktyczna `definicja`: $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A, N)}{N} = P(A)$

Zliczamy próby $n(A, N)$ przy których zaszło zdarzenie A i dzielimy przez całkowitą liczbę wszystkich prób N ;

Obowiązuje tutaj prawo wielkich liczb mówiące, że:

$$P \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n(A, N)}{N} = P(A) \right] = 1$$

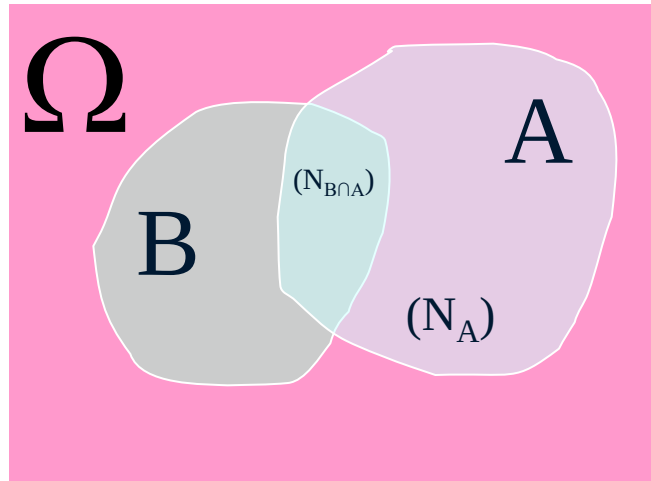


Przypuśćmy, że pełny zbiór zdarzeń (Ω) można rozłożyć na elementarne zdarzenia równoprawdopodobne (Laplace): $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ i niech A rozkłada się na $m(A)$ zdarzeń ω_i . Wtedy

$$P(A) = \frac{m(A)}{n}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

(Przypuśćmy, że **wiemy o zajściu zdarzenia A**. Co – dysponując tą wiedzą – możemy powiedzieć o prawdopodobieństwie zajścia zdarzenia B. Prawdopodobieństwo to oznaczamy jako $P(B/A)$ i nazywamy prawdopodobieństwem warunkowym zajścia B pod warunkiem, że zaszło A.



$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

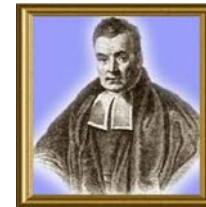
Bardzo ważne pojęcie przy badaniu procesów stochastycznych-
prawdopodobnie najważniejsze w teorii prawdopodobieństwa;
(będzie odgrywać rolę lokalnych prawdopodobieństw przejść)

$$P(B/A) \stackrel{\text{df}}{=} \frac{N_{B \cap A}}{N_A} = \frac{N_{B \cap A}}{N} \frac{N}{N_A} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

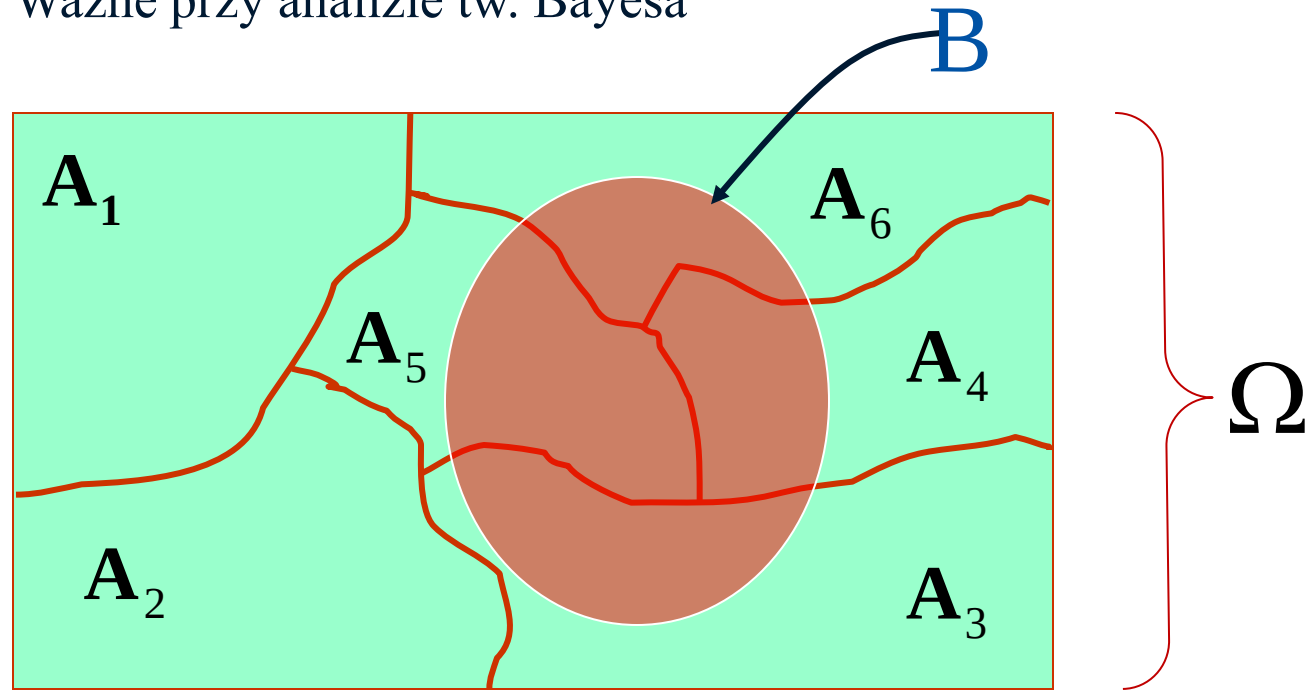
$$P(B \cap A) = P(B/A) P(A) = P(A/B) P(B)$$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

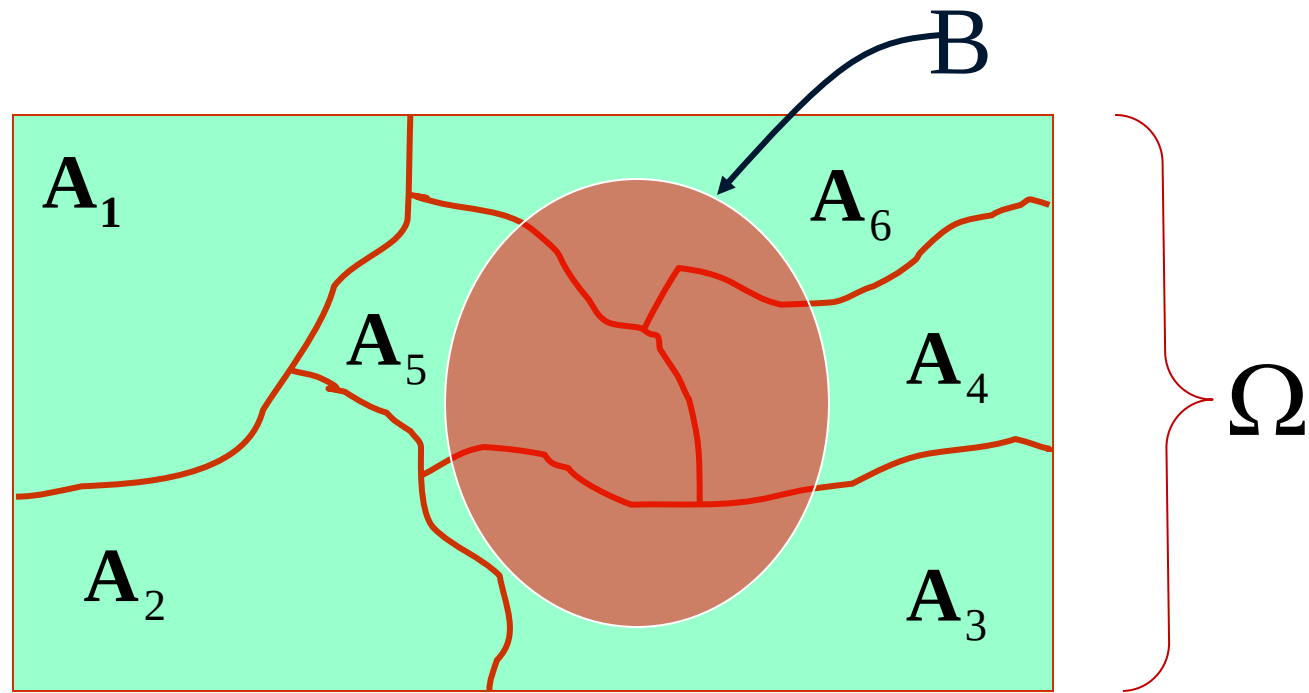
(twierdzenie Bayesa)



Ważne przy analizie tw. Bayesa



$$\begin{aligned}\Omega &= \bigcup A_i & A_i \cap A_j &= \emptyset \quad \forall i, j \\ P\left(\bigcup A_i\right) &= \sum_i P(A_i) \\ B &= B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup A_i\right) = \bigcup (B \cap A_i) \\ P(B) &= \sum_i P(B \cap A_i)\end{aligned}$$



$$\Omega = \bigcup A_i \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$$

$$P(B) = \sum_i P(B \cap A_i) = \sum_i P(B / A_i) P(A_i)$$

Twierdzenie Bayesa ma bezpośrednie zastosowanie przy analizie procesów stochastycznych;
Równanie Master (które będziemy omawiać) jest szczególnym przypadkiem tego twierdzenia

Ilustracja zastosowania twierdzenia Bayesa:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Założmy, że przy badaniu chorych na COVID 2 test pozytywny rejestruje się w 95% przypadków, zaś przy badaniu osoby zdrowej test negatywny wypada w 95% przypadków. Pewna firma postanowiła przebadać swoich pracowników takim testem wiedząc, że ok 2% populacji zachorowało.

PYTANIE:

jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba u której test wypadł pozytywnie rzeczywiście jest chora na COVID 2

Oznaczenia dla zdarzeń :

- C – dana osoba jest chora
 - Z – dana osoba nie choruje (jest zdrowa)
 - +
 -
- test dał wynik pozytywny u danej osoby
negatywny wynik testu

Wiemy, że

$P(C) = 0.02$, gdyż 2% populacji zachorowało

$P(Z) = 1 - P(C) = 0.98$

$P(+/C) = 0.95$, taka jest skuteczność testu w przypadku osoby chorej

$P(-/Z) = 0.95$, taką skuteczność na test przy badaniu osoby zdrowej

$P(+/Z) = 1 - P(-/Z) = 0.05$

w oparciu o powyższe dane można wyliczyć prawdopodobieństwo tego, że u osoby chorej test wypadł pozytywnie.

wnioski : – pozorny paradoks polegający na dużej dokładności testu i niskiej dokładności badania (0.28) wynika z faktu, że w badanej próbce tylko niewielka część osób choruje.
– nie można polegać na wyniku pojedynczego testu.

$$\begin{aligned} P(C / +) &= \frac{P(+ / C) P(C)}{P(+)} = \frac{P(+ / C) P(C)}{P(+ / C) P(C) + P(+ / Z) P(Z)} \\ &= \frac{0.950 \times 0.02}{0.95 \times 0.02 + 0.98 \times 0.05} \approx 0.28 \end{aligned}$$

Pytanie dodatkowe: Zakładając, że 3 testy pod rząd dały wynik pozytywny, jakie jest prawdopodobieństwo że dana osoba jest rzeczywiście chora

Niezależność statystyczna

$$P(B \cap A) = P(B/A) P(A) = P(B) P(A)$$

Przykład: rzucanie uczciwą kostką

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\xi \in \Omega$: pojedyncze zdarzenie

$A_1 = \{1, 3, 5\}$: nieparzysta liczba oczek

$A_2 = \{2, 4, 6\}$: parzysta liczba oczek

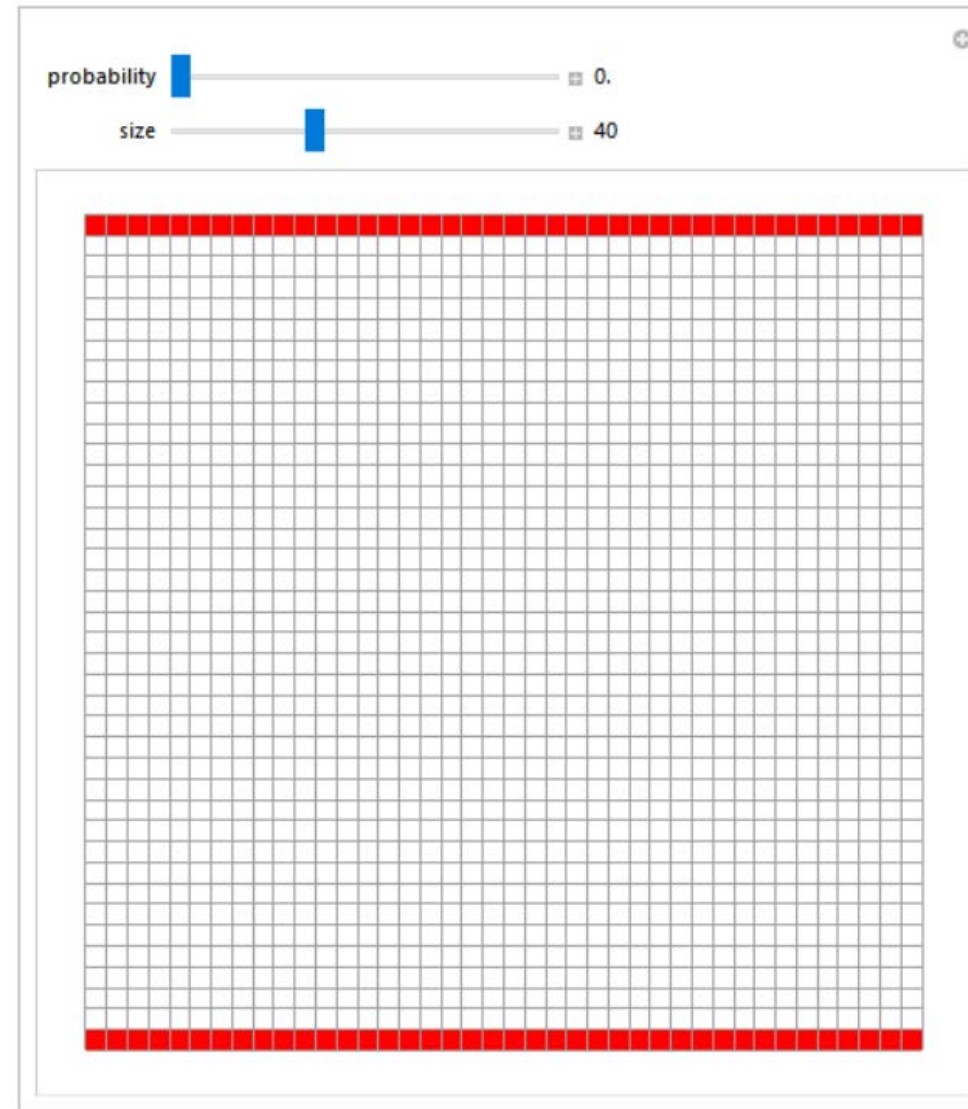
$$P(\xi = 2 / A_2) = \frac{1}{3} = \frac{P(\{2\} \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(\{2\} \cap A_2) = P(\{2\}) = \frac{1}{6} \quad (\text{zdarzenia zależne})$$

$$P(\{2\} \cap \{3\}) = P(\{2\}) P(\{3\}) = \frac{1}{36} \quad (\text{zdarzenia niezależne})$$

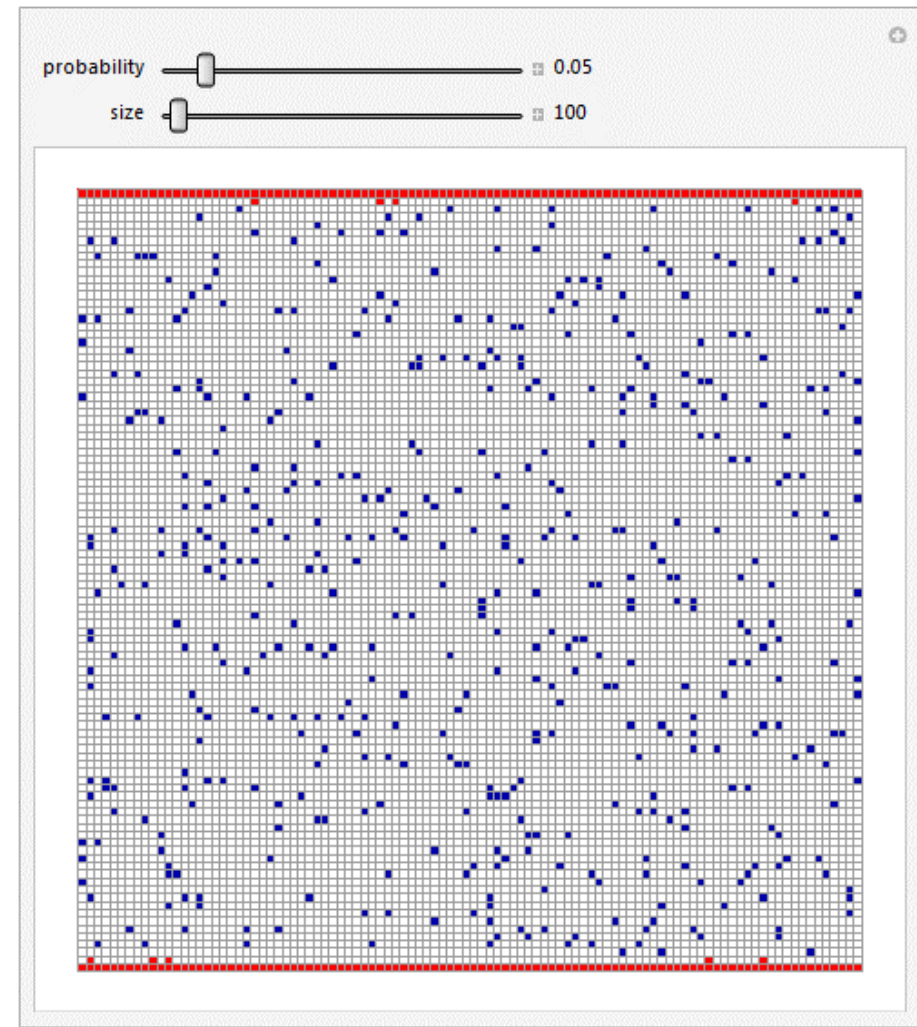
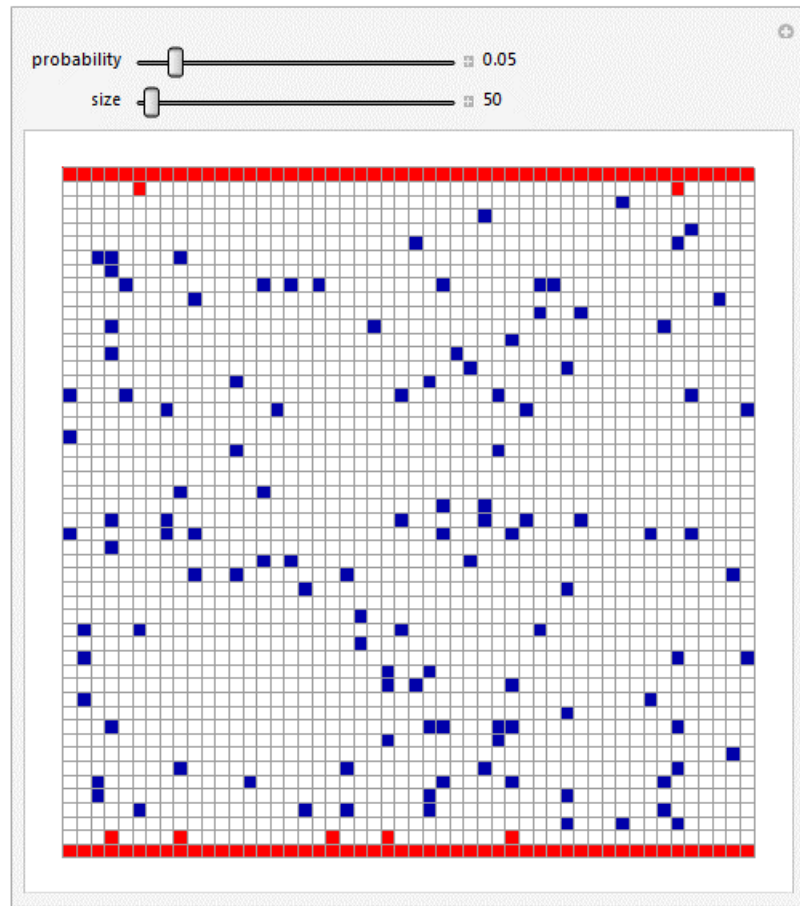
Perkolacja

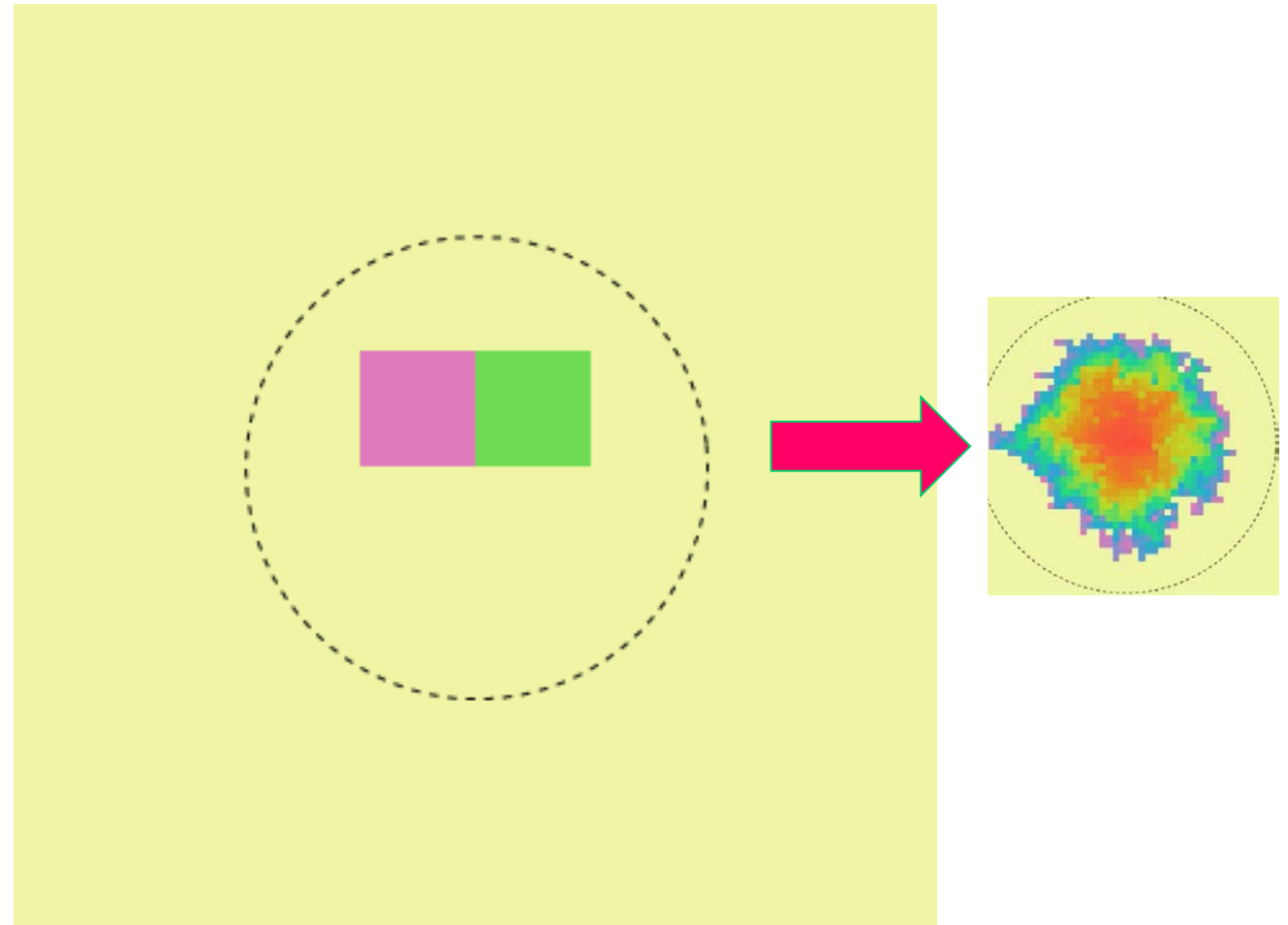
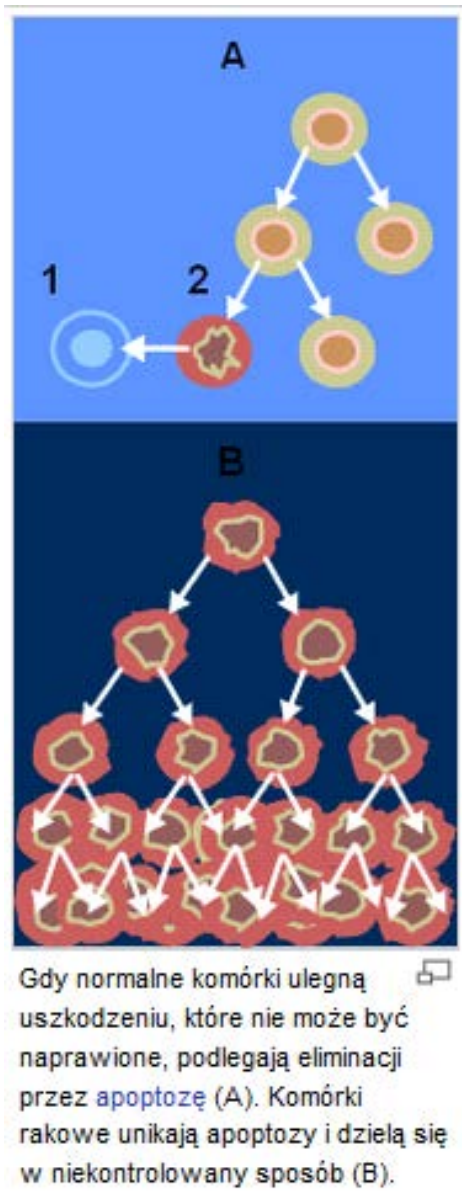
(Wolfram demo)



Perkolacja (site percolation): $p_c \approx 0.592746$

(Wolfram demo)





(podstawowy model agregacji: `EDEN model`)
 Ewolucja klastra odbiega kształtem od koła;
 brzeg ewoluującego obszaru jest nieregularny

Pojęcia ważne dla fizyka:

Funkcje rozkładu

Funkcje charakterystyczne

Momenty rozkładu

Kumulanty rozkładu

Związek pomiędzy momentami i kumulantami

Podstawowe rozkłady:

Gausa

dwumianowy

Poissona

Funkcje rozkładu (przypadek jednowymiarowy):

X : zmienna losowa przyjmująca rzeczywiste wartości $(-\infty < X < +\infty)$

Prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia

$$x < X < x + dx$$

zapisujemy jako

$$P(x < X < x + dx) = \rho_X(x) dx \equiv \rho(x) dx$$

(ostatni zapis można stosować jeśli nie prowadzi do nieporozumień)

$\rho(x)$ – funkcja rozkładu gęstości ($\Rightarrow \rho(x) \geq 0$)

$$\Rightarrow P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \rho(x) dx$$

w szczególności: $P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \rho(x') dx'$

oraz $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x') dx' = 1$

→ Dystrybuanta rozkładu:

$$\frac{\partial P(x)}{\partial x} = \rho(x)$$

UWAGA: podany przepis zawiera w sobie przypadek dyskretny;
np. jeśli

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i jeśli z każdym zdarzeniem
elementarnym związane jest prawdopodobieństwo

$p_i: p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, wtedy

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i)$$

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i jeśli z każdym zdarzeniem elementarnym związane jest prawdopodobieństwo

$p_i: p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, wtedy

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i)$$

$$P(b \leq X \leq a) = \int_a^b \rho(x') dx' = \sum_{i=1}^n p_i (\Theta(b - x_i) - \Theta(x_i - a))$$

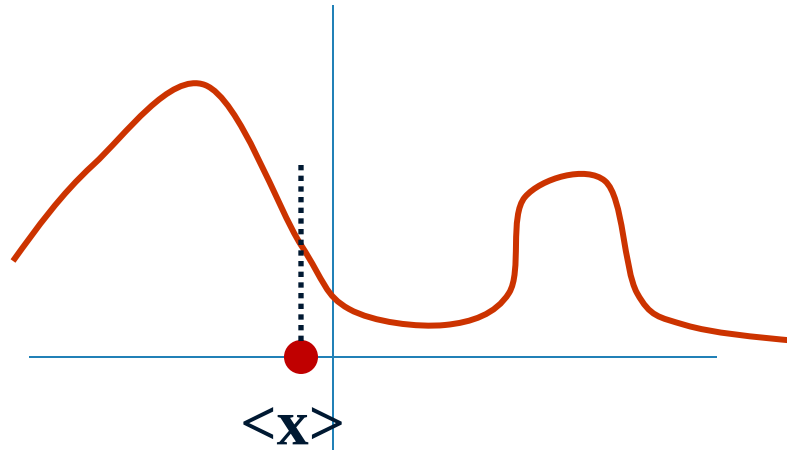
Θ – f. Heavisida

Przepis uogólnia się natychmiast na przypadek wielowymiarowy

Momenty rozkładu:

$$\langle \mathbf{x}^n \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}^n \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{jeśli istnieją!})$$

$\langle x \rangle$: pozycja 'środku masy' rozkładu



(b) $\langle x^2 \rangle$: "moment bezwładności" rozkładu
względem $x = 0$

$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$: jest miarą rozmycia
rozkładu wokół średniej $\langle x \rangle$;

Nomenklatura:

Wariancja

σ^2

σ – czytamy sigma

Odchylenie standardowe σ pierwiastek kwadratowy z wariancji

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Funkcja charakterystyczna rozkładu:

Transformata Fouriera (bądź Laplaca) f-cji rozkładu

$$f(k) \stackrel{\text{df}}{=} \langle e^{(ik)x} \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!}$$

– jeśli x jest ograniczone do osi dodatniej, wtedy można również zastąpić (ik) przez $-\lambda$

Ma sens tylko wtedy, gdy szereg jest zbieżny; momenty wyższe niż pierwszy mogą nieistnieć a mimo to $f(k)$ będzie istnieć

Przykład (rozkład Caychy'ego znany także jako r. Breita-Wignera)

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + x^2} \longrightarrow f(k) = e^{-c|k|}$$

Własności f-cji charakterystycznej:

$$f(k) \stackrel{\text{df}}{=} \langle e^{(ik)x} \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!}$$

$f(0) = 1$ (normalizacja)

$|f(k)| \leq 1$ (własności f – cji podcałkowej)

$f(-k) = f^*(k)$

W praktyce wielokrotnie znamy $f(k)$ analitycznie, natomiast nie znamy rozkładu

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(k) dk$$

$$\langle x^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{d^n f(k)}{dk^n}$$

Trywialne uogólnienie na przyp. wielowymiarowy

: jeśli istnieje

$$f(k) \stackrel{\text{df}}{=} \langle e^{(ik)x} \rangle \stackrel{\text{df}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!}$$

Funkcję charakterystyczną wprowadzamy, gdyż

- (a) wiele własności rozkładów łatwiej studiować używając $f(k)$ niż $\rho(x)$.
- (b) często funkcję charakterystyczną można podać analitycznie, podczas gdy równoważna forma dla $\rho(x)$ nie jest znana.
- (c) problemy dla $f(k)$ rozwiązuje się wielokrotnie łatwiej niż równoważne problemy dla $\rho(x)$; np. przy badaniu procesów stochastycznych częstokroć równanie na $\rho(x)$ daje się rozwiązać w przestrzeni Fouriera.

(d) jeśli $f(k)$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu $\rho(x)$,
wtedy $e^{ikx_0} f(k)$ jest funkcją charakterystyczną rozkładu
 $\rho(x - x_0)$.

Funkcja charakterystyczna jest przykładem tzw. funkcji generującej rozkładu:

Pokazaliśmy poprzednio, że $f(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ik)^n \langle x^n \rangle}{n!}$;
 zatem, po wyliczeniu $f(k)$, możemy wyznaczyć momenty (jeśli istnieją):

$$\langle x^n \rangle = \lim_{k \rightarrow 0} (-i)^n \frac{d^n f(k)}{dk^n}$$

z kolei $\ln f(k)$ jest funkcją generującą jeszcze ważniejszych wielkości charakteryzujących rozkład tzw. kumulantów :

$$f(k) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \langle e^{ikx} \rangle = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ik)^n C_n}{n!}},$$

$$C_n = (-i)^n \lim_{k \rightarrow 0} d^n \ln(f(k)) / dk^n$$

Przykład:

$$\rho(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_Y^2}\right); \quad f(k) = e^{iak - \frac{\sigma_Y^2}{2} k^2}$$

$$\ln f(k) = iak - \frac{\sigma_Y^2}{2} k^2;$$

$$C_n = (-i)^n \lim_{k \rightarrow 0} d^n \ln(f(k)) / dk^n$$

Zatem rozkład Gaussa charakteryzują tylko 2 kumulanty!

$$C_1 = a, \quad \text{oraz} \quad C_2 = \sigma_Y^2; \quad C_n = 0, \quad n \geq 3;$$

w przeciwieństwie do momentów, kumulanty z $n \geq 3$ znikają

tzn.

$C_1 = \langle x \rangle$: monitoruje położenie 'środka masy' rozkładu

$C_2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle$: monitoruje szerokość rozkładu

C_3 : monitoruje asymetrię rozkładu (wraz z pozostałymi nieparzystymi kumulantami)

.....

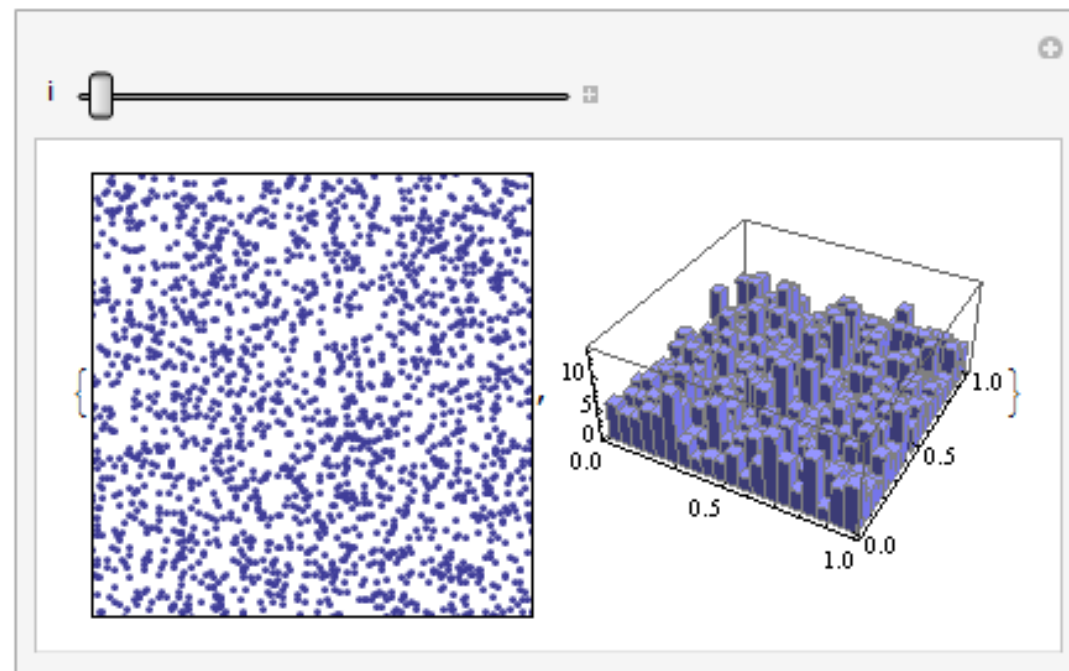
Rozkłady wielowymiarowe:

Rozkład $\rho(x,y) = \rho(x) \rho(y)$ - niezależność statystyczna

Rozkłady zawężone(brzegowe): $\rho(x) = \int \rho(x,y) dy$

Rozkład $\rho(x,y) = 1$ na przedziale $[0,1] \times [0,1]$

punkty losowane
z podanym powyżej
rozkładem



(b) n – wymiarowy rozkład Gaussa

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B})}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})_i \mathbf{B}_{ij} (\mathbf{x} - \mathbf{a})_j\right)$$

B : symetryczna, dodatnio określona macierz

Wyprowadzić wzór na czynnik normalizujący rozkład Gaussa

Rozkład sumy zmiennych losowych i Centralne Twierdzenie Graniczne:

Często pojawiające się zagadnienie w fizyce statystycznej:

$\langle v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2 \rangle$: **średnia prędkość**

$\langle H_1 + H_2 + \dots + H_N \rangle$: **średnia energia
nieoddziaływujących cząstek**

Pod średnią mamy sumę niezależnych zmiennych losowych. Można zapytać jaki rozkład prawdopodobieństwa ma suma (jeśli znamy rozkład pojedynczej zmiennej losowej wchodzącej do sumy)

Centralne Twierdzenie Graniczne

niech X_i – statystycznie niezależne zmienne losowe
o rozkładzie $\rho(x)$, który ma skończone conajmniej
dwa pierwsze momenty

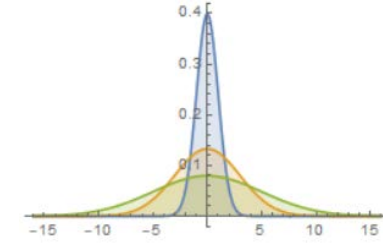
wtedy zmienna losowa

$$Y_N = \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N) - \langle x \rangle \quad \text{ma rozkład}$$

$$\rho_{Y_N}(y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi(\sigma_x^2/N)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_x^2/N)}\right), \quad \text{gdzie } \sigma_x^2 = \overbrace{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}^{\text{wariancja}}$$

$$Y_N = \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N) - \langle x \rangle \quad \text{ma rozkład}$$

$$\rho_{Y_N}(y) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2\pi(\sigma_x^2/N)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_x^2/N)}\right), \quad \text{gdzie } \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$



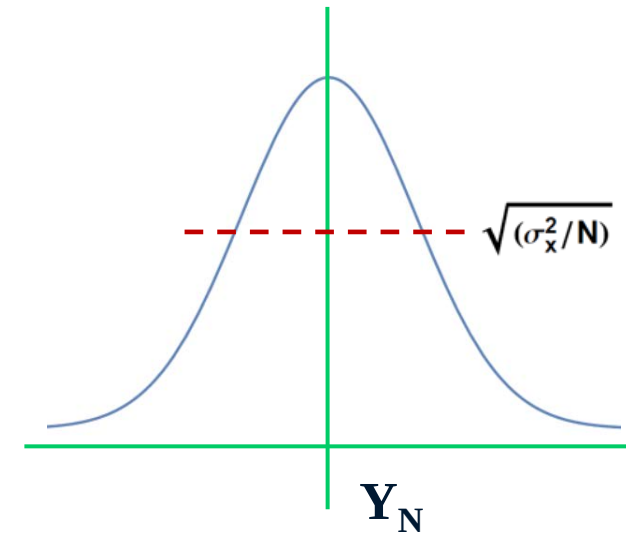
Rozkład Gaussa w granicy dużych N

- Dyspersja rozkładu zachowuje się jak:

$$\sqrt{(\sigma_x^2/N)} \sim \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Wzór podaje również oszacowanie na $\langle x \rangle$:

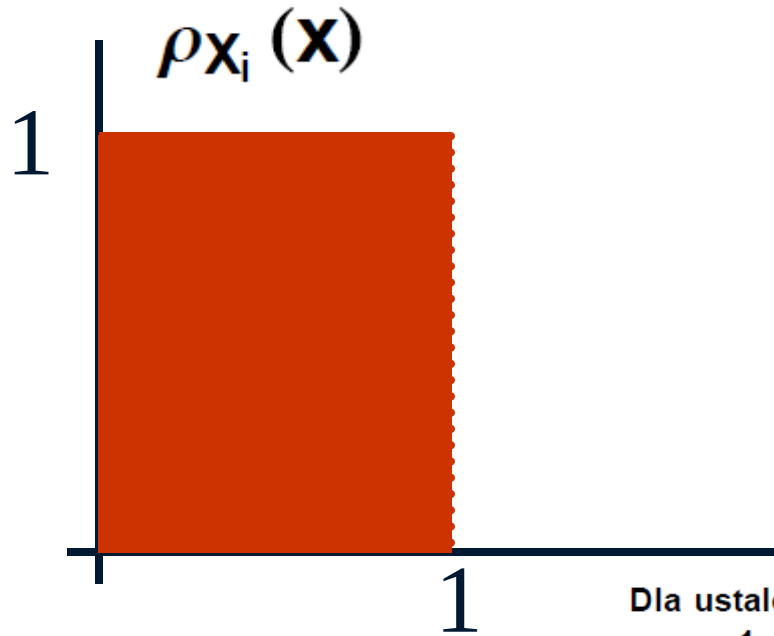
$$\langle x \rangle \approx \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N) \pm \sqrt{(\sigma_x^2/N)}$$



$$P\left(|y| < \sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{N}\right)}\right) \approx 0.68$$

$$P\left(|y| < 3\sqrt{\left(\frac{\sigma_x^2}{N}\right)}\right) \approx 0.997$$

Zamiast dowodu ilustracja jak duże musi być N w praktyce:



$$\langle x \rangle = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}; \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}$$

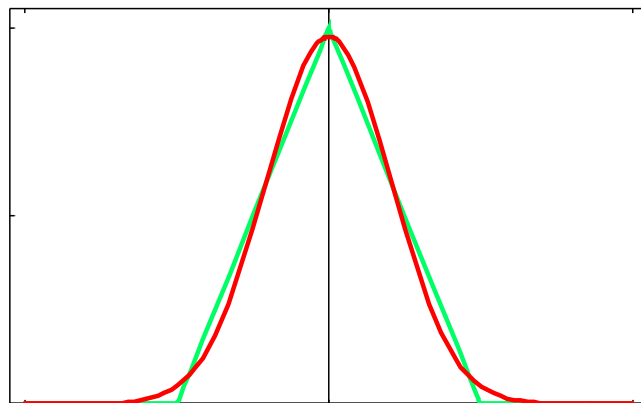
$$\sigma_X^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{1}{12}$$

Dla ustalonego N będę konstruować rozkład zmiennej

$$Y_N = \frac{1}{N} (X_1 + \dots + X_N) - \langle x \rangle$$

i porównywać z rozkładem

$$\rho_{Y_N}(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(\sigma_X^2/N)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\sigma_X^2/N)}\right)$$



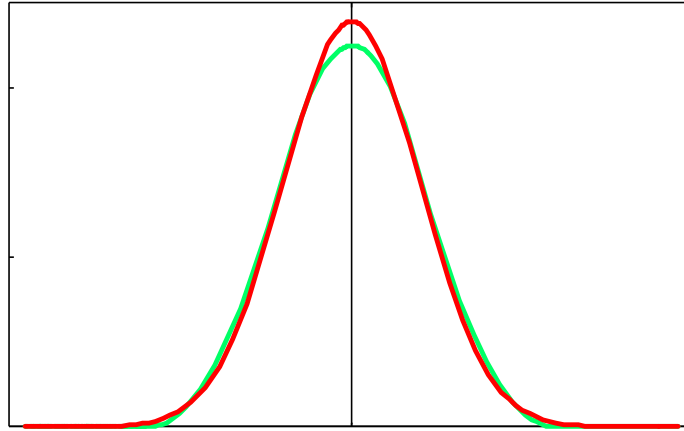
$N=2$

$$-2((1+2x)\Theta[-1-2x] + (-1+2x)\Theta[1-2x] - 4x\Theta[-x])$$

: ścisły (z) Θ – f. Heavisida

$$2 e^{-12 x^2} \sqrt{\frac{3}{\pi}}$$

: przybliżony (ctz dla $n=2$)



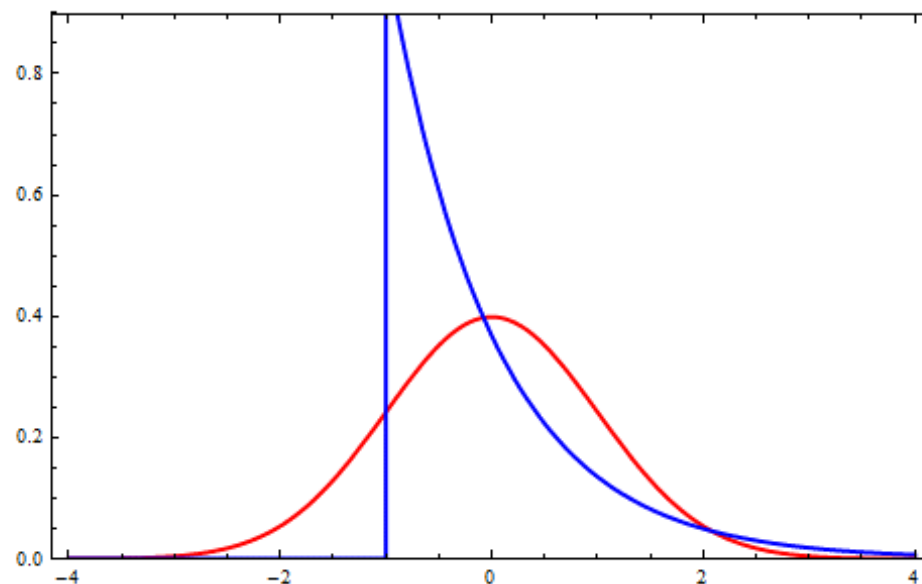
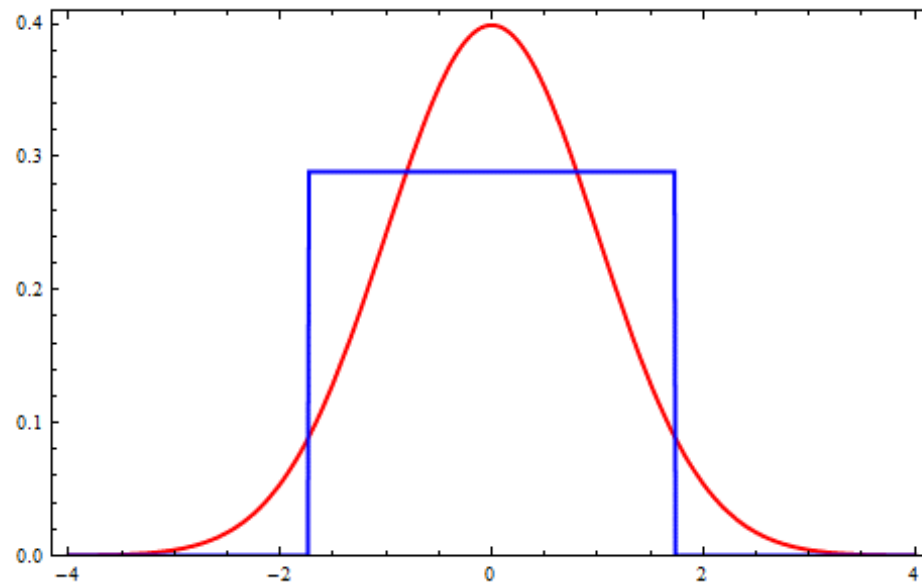
$$N=3$$

$$\frac{9}{8} (-3 (1 + 2x)^2 \Theta[-3 - 6x] + (1 + 6x)^2 \Theta[-1 - 6x] - (1 - 6x)^2 \Theta[1 - 6x] + 3 (1 - 2x)^2 \Theta[3 - 6x])$$

: ścisły (z)

$$3 e^{-18 x^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

: przybliżony (ctz)



Jak dobrze pracuje
CTG? (programy dostępne
na stronie kursu)

Materiał do samodzielnych studiów (dla zainteresowanych)

Definicja prawdopodobieństwa (Kołmogorowa)

Definicja Sigma-algebry

Sigma-algebra, oznaczana jako $\mathcal{F}$, to zbiór podzbiorów danego zbioru elementarnego Ω spełniający następujące warunki:

- 1. Zawiera zbiór Ω :

$$\Omega \in \mathcal{F}.$$

- 2. Zamknięcie na dopełnienia:

Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to również dopełnienie $\overline{A} = \Omega \setminus A$ należy do $\mathcal{F}$.

- 3. Zamknięcie na przeliczalne sumy:

Jeśli $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{F}$, to suma

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Dzięki tym właściwościom sigma-algebra umożliwia definiowanie funkcji miary (np. funkcji prawdopodobieństwa) na wybranych, "mierzalnych" zdarzeniach.

Przykład: Rzut kostką

- Zbiór elementarny Ω :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

(reprezentuje wyniki rzutu sześcienną kostką)

- Sigma-algebra $\mathcal{F}$:

Definiujemy $\mathcal{F}$ tak, aby rozróżniała jedynie wyniki parzyste i nieparzyste:

$$\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

Uwagi:

- Zauważ, że nie wszystkie podzbiory Ω są uwzględnione (np. $\{1, 2\}$ nie należy do $\mathcal{F}$).
- $\mathcal{F}$ jest zamknięta na operacje dopełnienia oraz sum przeliczalnych, co gwarantuje, że funkcję prawdopodobieństwa P możemy sensownie zdefiniować tylko dla zdarzeń z $\mathcal{F}$.

Po tych uwagach wprowadzimy definicję prawdopodobieństwa Kołmogorowa:

Definicja:

Przestrzeń probabilistyczna to formalna struktura matematyczna opisana jako trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, która służy do opisu eksperymentów losowych.

Składowe:

- **Zbiór elementarny Ω :**

- Zbiór wszystkich możliwych wyników eksperymentu losowego.
- Każdy element $\omega \in \Omega$ reprezentuje jeden możliwy wynik.

- **Sigma-algebra $\mathcal{F}$:**

- Zbiór podzbiorów Ω (zdarzeń) spełniający następujące warunki:
 - $\Omega \in \mathcal{F}$
 - Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to dopełnienie $\bar{A}$ również należy do $\mathcal{F}$
 - Suma (łączenie) dowolnej liczby zdarzeń $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ należy do $\mathcal{F}$

- **Funkcja prawdopodobieństwa P :**

- Funkcja przypisująca każdemu zdarzeniu $A \in \mathcal{F}$ wartość $P(A)$ z przedziału $[0, 1]$
 - $P(\Omega) = 1$
 - Dla rozłącznych zdarzeń $A_1, A_2, \dots$:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Zastosowanie:

Struktura $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ stanowi podstawę formalnego opisu procesów losowych oraz umożliwia przeprowadzanie obliczeń związanych z prawdopodobieństwem.

Dlaczego w przestrzeni probabilistycznej potrzebujemy sigma-algebry $\mathcal{F}$ zamiast korzystać wyłącznie ze zbioru Ω ?

- Ω – zbiór elementarny:

Ω reprezentuje wszystkie możliwe wyniki eksperymentu losowego. Samo Ω to jedynie "uniwersum" możliwych wyników.

- $\mathcal{F}$ – sigma-algebra:

$\mathcal{F}$ to zbiór wybranych podzbiorów Ω (tzw. zdarzeń), na których definiujemy funkcję prawdopodobieństwa P .

- Powody, dla których potrzebujemy $\mathcal{F}$:

- Mierzalność:

Nie każdy podzbiór Ω musi być mierzalny, czyli nie zawsze można na niego jednoznacznie przypisać prawdopodobieństwo. Sigma-algebra wybiera te podzbiory, dla których taki przypis jest sensowny i możliwy.

- **Zamknięcie na operacje:**

$\mathcal{F}$ musi być zamknięta na operacje dopełnienia oraz przeliczalne sumy. Dzięki temu, jeśli mamy zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ należące do $\mathcal{F}$, to ich suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ również należy do $\mathcal{F}$. To zapewnia spójność przy definiowaniu złożonych zdarzeń (np. "przynajmniej jedno zdarzenie wystąpiło").

- **Konsystencja definicji prawdopodobieństwa:**

Funkcja prawdopodobieństwa P jest zdefiniowana tylko na zbiorze $\mathcal{F}$. Dzięki temu mamy pewność, że wszystkie zdarzenia, którym przypisujemy prawdopodobieństwo, spełniają wymagane własności (np. addytywność).

- **Podsumowanie:**

Ω samo w sobie to zbiór wszystkich możliwych wyników, ale aby móc formalnie przypisać prawdopodobieństwa zdarzeniom, musimy wybrać z Ω te podzbiory, które są "mieralne" i spełniają odpowiednie własności – właśnie tworzy to sigma-algebra $\mathcal{F}$.

Rozwinięcie kumulantów (uogólnienie)

(bardzo ważny wzór w fizyce statystycznej, wykorzystywany do r. perturbacyjnych)

Niech

$$\phi\left(\begin{matrix} \mathbf{k} \\ \lambda \end{matrix}\right) \stackrel{\text{df}}{=} \left(\begin{array}{c} \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \psi(\mathbf{x})} \rangle_{\rho(\mathbf{x})} \\ \langle e^{-\lambda \psi(\mathbf{x})} \rangle_{\rho(\mathbf{x})} \end{array} \right)$$

Jeśli powyższe średnie istnieją i istnieją momenty $\langle \psi^n(\mathbf{x}) \rangle_{\rho(\mathbf{x})}$, wtedy

$$\phi\left(\begin{matrix} \mathbf{k} \\ \lambda \end{matrix}\right) = \exp\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\mathbf{k})^n}{n!} C_n \right], \text{ gdzie } C_n - \text{tzw. kumulanty}$$

porównując szeregi po obu stronach ostatniej równości otrzymamy

$$\begin{aligned} C_1 &= \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle \\ C_2 &= \langle \psi^2(\mathbf{x}) \rangle - \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle^2 = \langle (\psi(\mathbf{x}) - \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle)^2 \rangle \\ C_3 &= \langle \psi^3(\mathbf{x}) \rangle - 3\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle \langle \psi^2(\mathbf{x}) \rangle + 2\langle \psi(\mathbf{x}) \rangle^3 \\ &= \langle (\psi(\mathbf{x}) - \langle \psi(\mathbf{x}) \rangle)^3 \rangle \end{aligned}$$

.

.

.

$\rho(\mathbf{x})$: dowolna gęstość
prawdopodobieństwa na $\mathbf{x}$

Problem: znaleźć algorytm
generujący kolejne
kumulanty

Istnieje prosty, geometryczny związek wyrażający momenty przez kumulanty:

- przedstawiamy n-ty kumulant jako połączony klaster n punktów;
- wtedy n-ty moment otrzymamy sumując po wszystkich możliwych podziałach n-punktów na mniejsze (połączone i niepołączone) klastry;
- przyczynkiem do sumy od każdego podziału jest iloczyn kumulantów reprezentowanych przez klastry wynikające z danego podziału.

Przykłady:

$$\langle x \rangle = C_1$$

$$\langle x^2 \rangle = C_2 + C_1^2$$

$$\langle x^3 \rangle = C_3 + 3C_2C_1 + C_1^3$$

$$\langle x^4 \rangle = C_4 + 4 C_3 C_1 + 3 C_2^2 + 6 C_2 C_1^2 + C_1^4$$

Przykłady na f-cje charakterystyczne

(a) Rozkład Levy'ego

Jest to rozkład dla którego funkcja charakterystyczna ma postać:

$$f(k) = \exp(-c |k|^\alpha); \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad c > 0$$

analitycznie postać $\rho_X(x)$ znana jest jedynie dla kilku wartości α

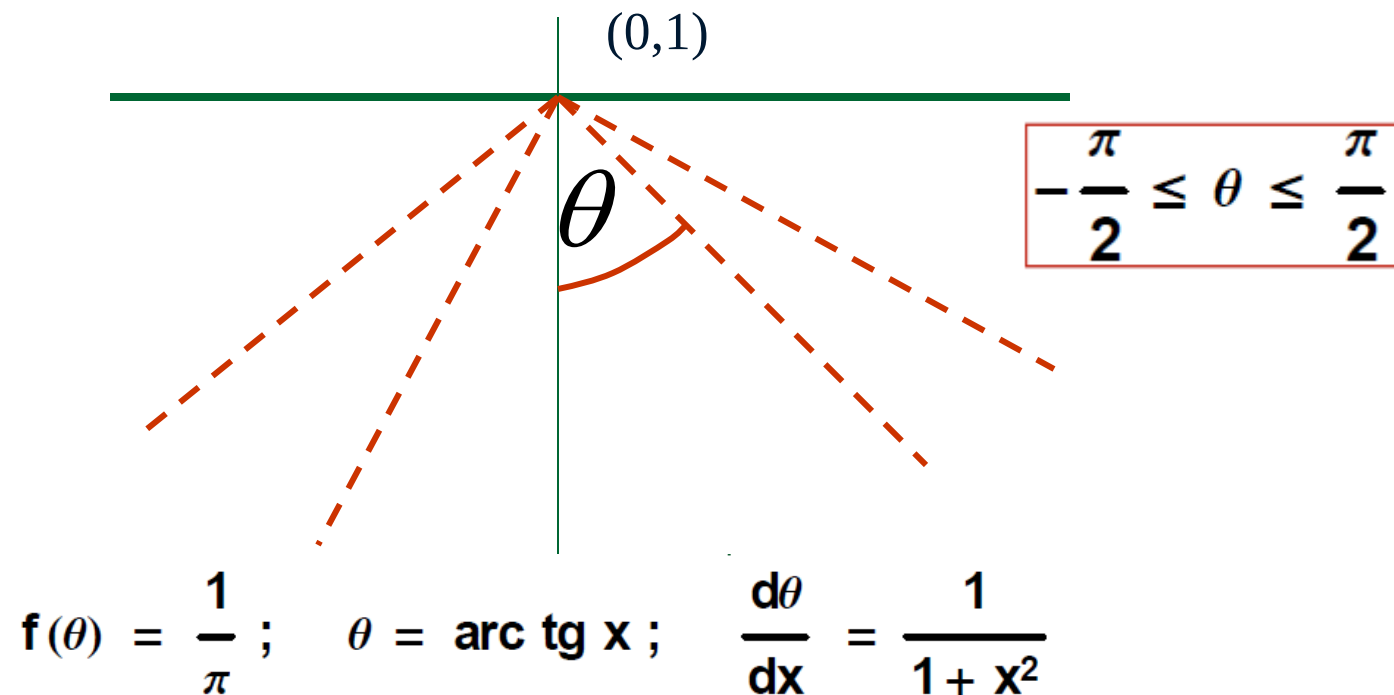
(') jeśli $\alpha = 2$, wtedy

$$f(k) = \exp(-ck^2) \rightarrow \rho(x) = \sqrt{\frac{1}{4\pi c}} \exp\left(-\frac{x^2}{4c}\right)$$

(ρ jest rozkładem Gaussa o $\sigma^2 = 2c$)

(") jeśli $\alpha < 2$, wtedy wszystkie momenty rozkładu poza pierwszym ($= 0$) są nieskończone.
 Np. dla $\alpha = 1$ otrzymujemy tzw. rozkład Cauchy'ego
 (znany także jako rozkład Breita – Wignera)

$$\rho_X(x) = \frac{1}{\pi} \frac{c}{c^2 + x^2}$$



(b) rozkład dwumienny:

(modelem może być rzut monetą, lub błędzenie przypadkowe)

przeprowadzamy sekwencję N – statystycznie niezależnych doświadczeń, których wynikiem (z założenia) są dwie wartości : 0 lub 1

$$\begin{array}{l} p(0) = q \\ p(1) = p \end{array} \quad p + q = 1$$

w sekwencji N prób :

0 wypada n_0 – razy

1 wypada n_1 – razy

$$n_0 + n_1 = N$$

wtedy

$$\begin{array}{l} P_N(n_1) = \frac{N!}{n_0! n_1!} q^{n_0} p^{n_1} \\ \sum_{n_1=0}^N P_N(n_1) = (p + q)^N = 1 \end{array}$$

Na sekwencję prób można też popatrzeć z innego punktu widzenia. Wyobraźmy sobie, że zmienna stochastyczna X_i opisuje wynik i – tej próby i może mieć dwie realizacje :

$x = 0$ z prawd. q

$x = 1$ z prawd. p

wtedy gęstość prawdopodobieństwa

$$\rho(x) = q \delta(x) + p \delta(x - 1)$$

i funkcja charakterystyczna i – tej próby dana jest przez

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} [q \delta(x) + p \delta(x - 1)] dx$$

$$= q + p e^{ik}$$

$\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ i jeśli z każdym zdarzeniem elementarnym związane jest prawdopodobieństwo

$p_i : p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1$, wtedy

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^n p_i \delta(x - x_i)$$

$$f(k) = q + p e^{ik}$$

Rozważmy obecnie zmienną losową będącą sumą N – niezależnych prób :

$$Y_N = X_1 + X_2 \dots + X_N$$

wtedy

$$\rho_{Y_N}(y) = \int \dots \int \delta[y - (x_1 + \dots + x_N)] \rho(x_1) \dots \rho(x_N) dx_1 \dots dx_N$$

$$f_{Y_N}(k) = \int e^{iky} \rho_{Y_N}(y) dy = [f(k)]^N = [q + p e^{ik}]^N$$

Identyczny wynik otrzymamy wykonując dyskretną tr. Fouriera:

$$\langle e^{-ikN_A} \rangle = \sum_{N_A=0}^N \frac{N!}{N_A!(N-N_A)!} p_A^{N_A} p_B^{N-N_A} e^{-ikN_A} = (p_A e^{-ik} + p_B)^N$$

(c) rozkład Poissona:

$$\rho(\lambda; k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jest to rozkład **dyskretny**.

Otrzymamy go, gdy w rozkładzie dwumiennym: $P(n, k, p) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ dokonamy przejścia granicznego

$$\begin{cases} p \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty \\ pn = \lambda = \text{const} \end{cases}$$

Klasyczne przykłady rozkładu Poissona to liczba rozpadów promieniotwórczych w jednostce czasu lub liczba rozmów telefonicznych zainicjowanych w jednostce czasu. Można pokazać, że rozkład Poissona pojawia się zawsze w sytuacji, w której mamy nieskończenie wiele “kontenerów”, przy czym do każdego z nich może wpaść całkowita liczba elementów i zawartość poszczególnych “kontenerów” jest niezależna od zawartości innych kontenerów.

Zamiana zmiennych w rozkładach

Przypadek jednowymiarowy:

Przypuśćmy, że transformacja współrzędnych $x \rightarrow z$ dana jest za pomocą funkcji $z=z(x)$.
Jaki to generuje związek między zmiennymi losowymi X, Z ?

Pytanie:

jaka jest gęstość prawdopodobieństwa $g(z)$ jeśli znana jest gęstość prawdopodobieństwa $f(x)$.

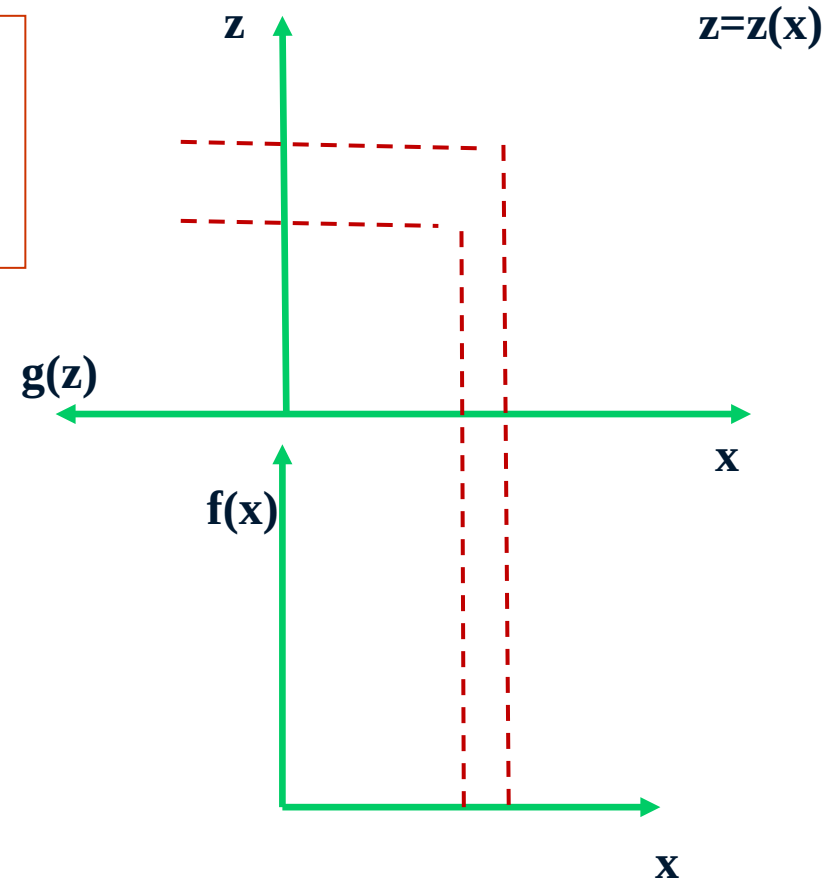
Problem ten jest zilustrowany na rysunku:

$$|g(z) dz| = |f(x) dx|$$

zatem

$$g(z) = \left| \frac{dx}{dz} \right| f(x)$$

Trzeba uważać, gdy $z(x)$ przyjmuje te same wartości dla różnych wartości x



W przypadku transformacji współrzędnych $z \rightarrow z(x)$ możemy także użyć tożsamości

$$1 = \int \rho_X(x) dx = \int \rho_Z(z) dz = \int \rho_X(x(z)) \left| \frac{dx}{dz} \right| dz$$

$$\Rightarrow \rho_Z(z) = \rho_X(x(z)) \left| \frac{dx}{dz} \right| \quad (\text{zgodnie z poprzednim wzorem})$$

$$\rho_Z(z) = \int \rho_X(x) \delta(z - f(x)) dx = \sum_i \frac{1}{|f'(x_i(z))|} \rho_X(x_i(z)),$$

gdzie $\{x_i(z)\}$: dozwolone rozwiązania równania $z = f(x)$ dla x .

PRZYKŁADY:

(a) niech $Z = -\ln(X)$, $\rho_X(x) = 1$, $x \in [0, 1]$
wtedy

$$\begin{aligned}\rho_Z(z) &= \int \rho_X(x) \delta(z - f(x)) dx \\ &= \int_0^1 \delta(z + \ln(x)) dx = |x| = e^{-z}\end{aligned}$$

$$\rightarrow \text{również z } \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{x} \Rightarrow \rho_Z(z) = \left| \frac{dx}{dz} \right| = |x| = e^{-z}$$

Bardziej ogólny przypadek:

W przypadku wielu zmiennych :

$$\left| \frac{dx}{dz} \right| \rightarrow \left| \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (z_1, \dots, z_n)} \right|$$

$$\begin{aligned} \rho_Z(\mathbf{z}) &= \left| \frac{dx}{dz} \right| \rho_X(\mathbf{x}(\mathbf{z})) \\ \rightarrow \rho_{\{Z\}}(z_1, \dots, z_n) &= \left| \frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (z_1, \dots, z_n)} \right| \rho_{\{X\}}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

zadanie : uogólnić formułę z deltą Diraca

PRZYKŁADY:

(b) $(Z_1, Z_2) = \sqrt{-2 \ln(X_1)} (\cos 2\pi X_2, \sin 2\pi X_2)$
 (X_1, X_2) : rozłożone jednorodnie na przedziale $(0, 1)$

$$\rho_Z(Z_1, Z_2) = \left| \frac{\partial(X_1, X_2)}{\partial(Z_1, Z_2)} \right| \rho_X(X_1, X_2)$$
$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_1^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z_2^2/2}}$$

w tym przypadku $\rho_Z(z_1, z_2)$ ma rozkład Gaussa na przedziale $(-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty)$

(b) n – wymiarowy rozkład Gaussa

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\det(\mathbf{B})}{(2\pi)^n}} \exp\left(-\frac{1}{2} (x - a)_i B_{ij} (x - a)_j\right)$$

B : symetryczna, dodatnio określona macierz

Funkcja charakterystyczna

$$f(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \sum_j k_j x_j} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n = e^{i \sum_j k_j a_j} e^{-(1/2) \sum_{ij} k_i ((\mathbf{B})^{-1})_{ij} k_j}$$

wyprowadzić

$$f(k_1, k_2, \dots, k_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i \sum_j k_j x_j} \rho(x) dx_1 \dots dx_n = e^{i \sum_j k_j a_j} e^{-(1/2) \sum_{ij} k_i (B)^{-1}_{ij} k_j}$$

Momenty:

$$\langle x_j \rangle = \lim_{\{k_\alpha \rightarrow 0\}} \left[(-i) \frac{\partial}{\partial k_j} f(k_1, k_2, \dots, k_n) \right] = a_j$$

$$\langle (x - a)_i (x - a)_j \rangle = (B^{-1})_{i,j}$$

Wyższe momenty

$$\langle (x - a)_i (x - a)_j \dots (x - a)_m \rangle$$

= 0 (dla nieparzystej ilości czynników pod średnią)

$$= \prod (B^{-1})_{\alpha\beta} + \dots \quad (\text{po wszystkich możliwych – różnych – kombinacjach par})$$

$$\text{np. } \tilde{x}_\alpha = x_\alpha - a_\alpha ; \quad (B^{-1})_{\alpha\beta} = \langle \tilde{x}_\alpha \tilde{x}_\beta \rangle$$

$$\langle \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \rangle = \langle \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \rangle \langle \tilde{x}_3 \tilde{x}_4 \rangle + \langle \tilde{x}_1 \tilde{x}_3 \rangle \langle \tilde{x}_2 \tilde{x}_4 \rangle + \langle \tilde{x}_1 \tilde{x}_4 \rangle \langle \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \rangle$$

(WYPROWADZIĆ)

Rozkład Gaussa
jest w pełni określony
przez podanie
pierwszego i drugiego
momentu

Centralne twierdzenie Graniczne vs funkcje charakterystyczne

Dalsze wykorzystanie funkcji charakterystycznej $f(k)$:
(badanie rozkładu sumy niezależnych zmiennych losowych)

Niech $Y_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N$

X_i ma rozkład $\rho(x_i)$ (identyczna funkcja $\forall x_i$);
szukamy rozkładu dla Y_N : $\rho_{Y_N}(y)$

$$\rho_{Y_N}(y) = \int \dots \int \delta[y - (x_1 + \dots + x_N)] \rho(x_1) \dots \rho(x_N) dx_1 \dots dx_N$$

wtedy

$$f_{Y_N}(k) = \int e^{iky} \rho_{Y_N}(y) dy = [f_X(k)]^N,$$

gdzie $f_X(k) = \int e^{ikx} \rho(x) dx$ (pokazać)

Przykład: rozkład dwumienny:

$$f(k) = q + p e^{ik}$$

Rozważmy obecnie zmienną losową będącą sumą N – niezależnych prób :

$$Y_N = X_1 + X_2 \dots + X_N$$

wtedy

$$\rho_{Y_N}(y) = \int \dots \int \delta[y - (x_1 + \dots + x_N)] \rho(x_1) \dots \rho(x_N) dx_1 \dots dx_N$$

$$f_{Y_N}(k) = \int e^{iky} \rho_{Y_N}(y) dy = [f(k)]^N = [q + p e^{ik}]^N$$

Zadanie :

- Mając $f_{Y_N}(k)$ wyliczyć $\rho_{Y_N}(y)$, $\langle y \rangle$, σ_y^2
- Rozważając zmienną losową $Z_N = \frac{(Y_N - \langle y \rangle)}{\sigma_y}$ znaleźć $\rho_{Z_N}(z)$ w granicy $N \rightarrow \infty$

Rozkłady stabilne (nieskończenie podzielne)

Definicja

Niech $X_1, \dots, X_N$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach $\rho_X(x)$. Niech

$$Y_N = X_1 + \dots + X_N$$

będzie zmienną losową reprezentującą sumę zmiennych losowych. Rozkład $\rho_X(x)$ nazwiemy stabilnym jeśli $\forall N$ rozkład $\rho_{Y_N}(y)$ jest opisywany tą samą funkcyjną zależnością co ρ_X (tzn. różnica jest jedynie w wartości parametrów a nie w kształcie funkcji).

Są to ważne rozkłady w zastosowaniach,
szczególnie w:

- Teorii procesów stochastycznych
- Teorii zjawisk krytycznych

Przykład: rozkład Gaussa

$$\rho_1 = \frac{e^{-\frac{(-a+x_1)^2}{2\sigma_1^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \quad \rho_2 = \frac{e^{-\frac{(-b+x_2)^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}$$
$$\rho_Y (y = x_1 + x_2) = \frac{e^{-\frac{(a+b-y)^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}(\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})}$$

Dla rozkładu Gaussa mamy więc znacznie ogólniejszą sytuację (pokazać)

I znowu podejście od strony funkcji charakterystycznych pozwala rozwiązać zagadnienie rozkładów stabilnych całkiem ogólnie:

$$\text{Jeśli } Y_N = X_1 + \dots + X_N \xrightarrow{\rho_{X_i}(x_i) = \rho(X_i)} \forall N \quad \bar{f}_{Y_N}(k) = [f_X(k)]^N$$

$$\bar{f}_{Y_N}(k) = \int e^{iky} \rho_{Y_N}(y) dy = [f(k)]^N$$

 W.K.W. na to aby mieć r. stabilny:

$$\bar{f}_{Y_N}(k) = f(k, \{a'(N)\}) = [f(k, \{a\})]^N$$

Przykłady:

$$\bar{f}_{Y_N}(\mathbf{k}) = f(\mathbf{k}, \{\mathbf{a}'(N)\}) = [f(\mathbf{k}, \{\mathbf{a}\})]^N$$

(a) Rozkład Gaussa

$$\rho_{Y_N}(y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma_Y^2}} \exp\left(-\frac{(y-a)^2}{2\sigma_Y^2}\right) \Rightarrow \bar{f}_{Y_N}(\mathbf{k}) = e^{iak - \frac{\sigma_Y^2}{2} k^2}$$

$$f(\mathbf{k}) = \sqrt[N]{e^{iak - \frac{\sigma_Y^2}{2} k^2}} = e^{i\left(\frac{a}{N}\right)k - \frac{\sigma_Y^2}{2N} k^2}$$

$$\rho_X(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi(\sigma_Y^2/N)}} \exp\left(-\frac{\left(x - \frac{a}{N}\right)^2}{2(\sigma_Y^2/N)}\right)$$

Przykłady:

$$\bar{f}_{Y_N}(k) = f(k, \{a'(N)\}) = [f(k, \{a\})]^N$$

(a) Rozkłady Levy'ego

$$\bar{f}_{Y_N}(k) = \exp(-c|k|^\alpha); \quad 0 < \alpha \leq 2, \quad c > 0$$

(tylko 1 – szy moment jest skończony)

$$f(k) = \sqrt[N]{\exp(-c|k|^\alpha)} = \exp\left[-\left(\frac{c}{N}\right) |k|^\alpha\right]$$

Dziękuję za uwagę