Wykład 4

II Zasada Termodynamiki

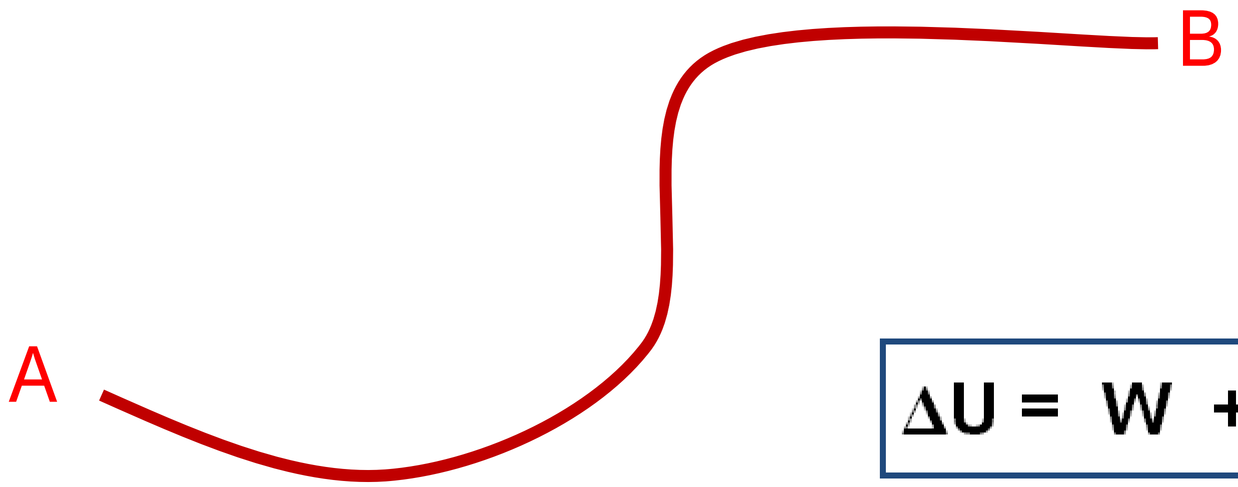
Ogólne sformułowanie: istnienie strzałki czasu

Pojęcie entropii i temperatury absolutnej

Ćwiczenia: Formy różniczkowe Pfaffa

I-sza Zasada Termodynamiki:

- I-sza zasada termodynamiki: - bilans energii w procesie przejścia układu ze stanu A do stanu B
  - identyfikacja kanałów przekazu



$$\boxed{\Delta U = W + Q + Z}$$

$$\boxed{\Delta U = W + Q + Z}$$

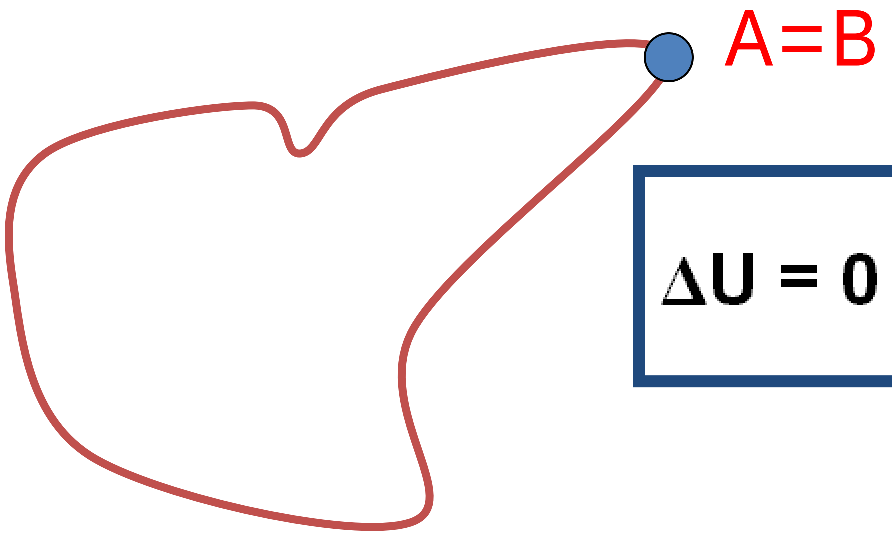
W oparciu o I-szą zasadę wiemy, że

- **Q, W, Z** odgrywają tą samą rolę.

- Przekaz może się odbywać każdym z tych kanałów; rozróżnienie nie jest istotne.

- Na razie nie ma żadnych ograniczeń co do wzajemnego przekształcania się pracy w ciepło i vice-versa.

W szczególności dla procesu kołowego:



$$\Delta U = 0 \quad \overset{Z=0}{\Longrightarrow} \quad \boxed{Q = -W}$$

tj. możliwość <u>całkowitej</u> zamiany pobranego ciepła na równoważną ilość pracy lub odwrotnie.

- I - sza zasada nie mówi nic o tym czy i kiedy dany proces jest możliwy.

Dopiero II zasada termodynamiki wprowadza głębokie rozróżnienie między ciepłem a pracą

Historyczne sformułowania II zasady podane są w uzupełnieniach

Tutaj: **nowocześniejsze (głębsze) sformułowanie odwołujące się do ogólnych własności procesów adiabatycznych; powiązanie z matematycznymi własnościami form Pfaffa, a także wypowiedź na temat procesów nieodwracalnych.**

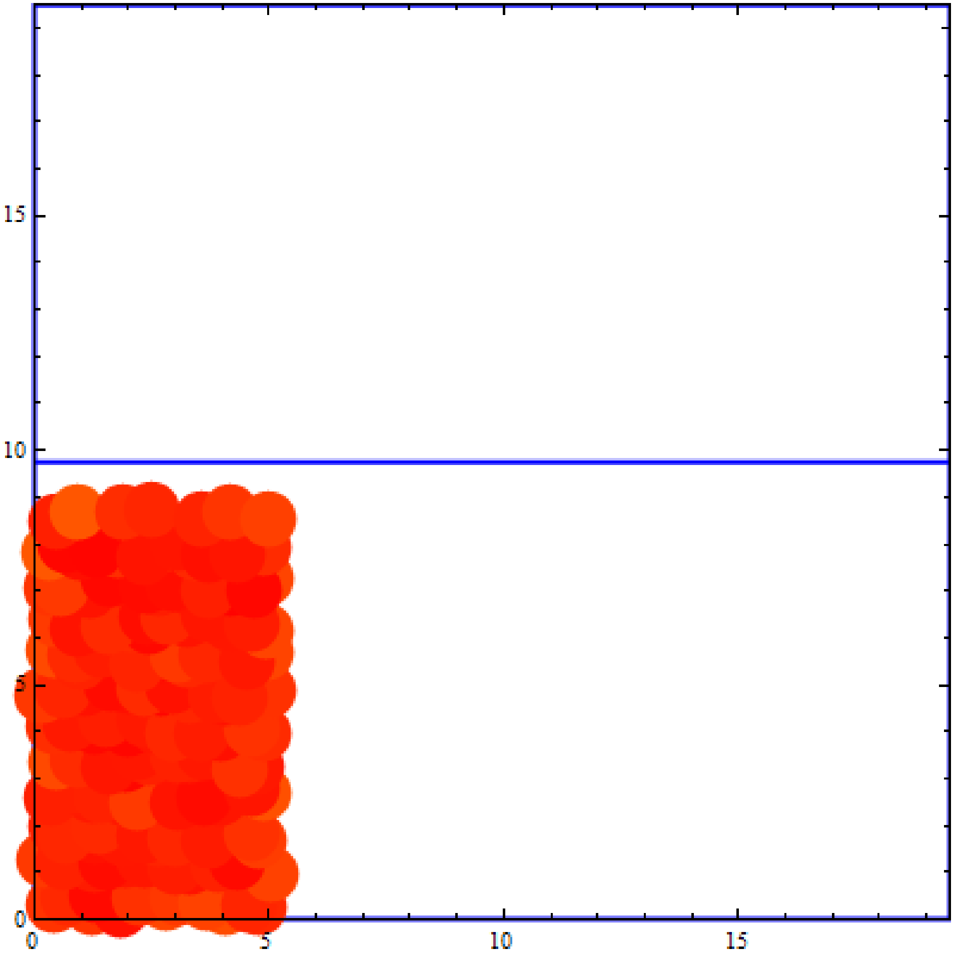
Część pierwsza

II Zasada Termodynamiki: wypowiedź na temat procesów nieodwracalnych

W układach makroskopowych (do których stosuje się granica termodynamiczna) **wszystkie procesy globalne dążą do wyrównywania różnic** (między układem a otoczeniem), tzn. przebiegają w jednym, ściśle określonym kierunku (**istnienie `strzałki czasu**).

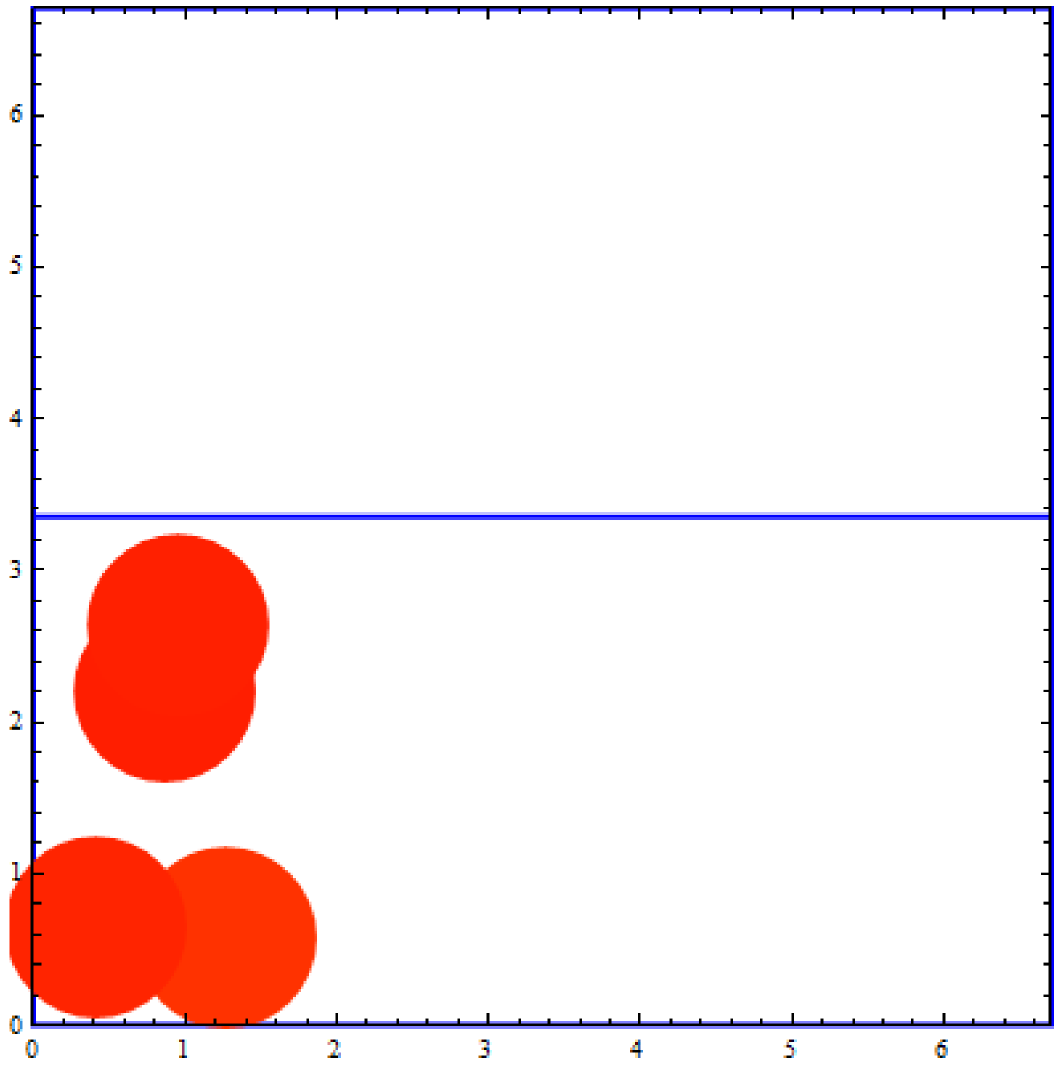
(dopuszczalne są fluktuacje !!!)

Zatem osiągnięcie stanu równowagi zachodzi w sposób nieodwracalny (przykład z Argonem):



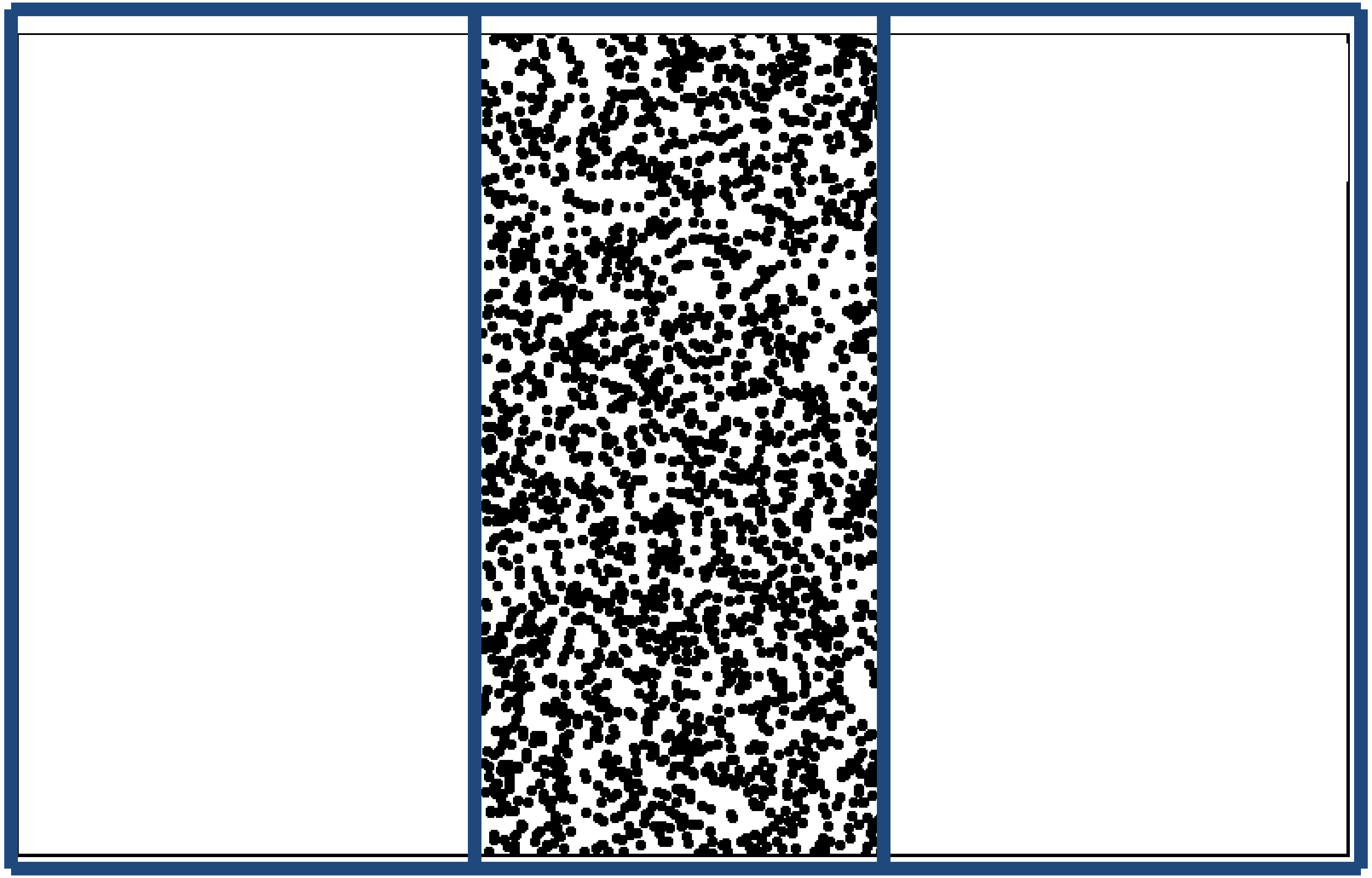
Cząstki Argonu (150), zamknięte w dolnej część zbiornika ekspandują do całej dostępnej objętości;
(T=30 ^{O}C: śledzimy rozwiązania klasycznych równań ruchu dla potencjału Lenarda-Jonesa)

Jednak dla kilku cząstek odwracalność jest możliwa

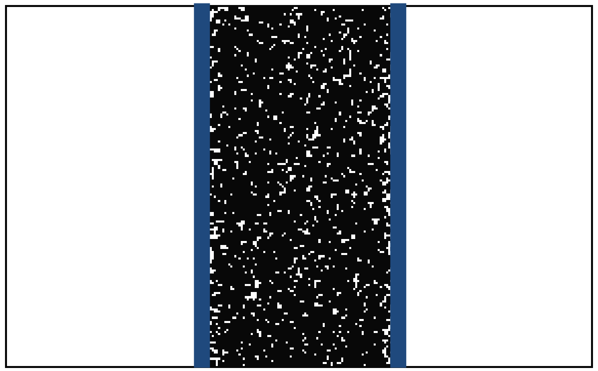


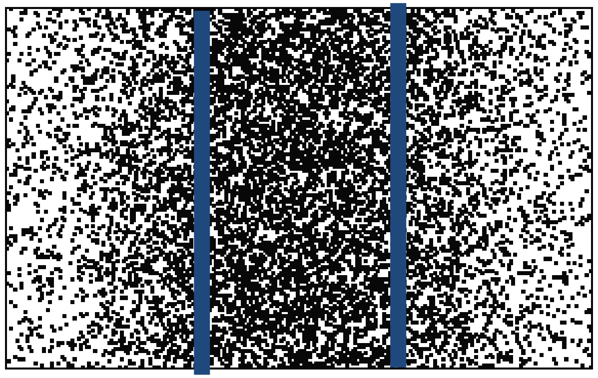
Zatem dla wielu cząstek osiągnięcie stanu równowagi zachodzi w sposób nieodwracalny (przykład II: gaz doskonały):

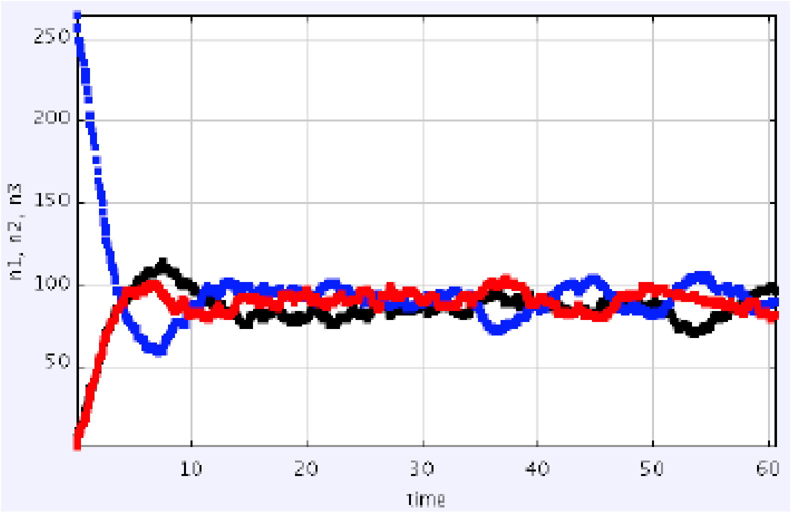
3 zbiorniki mają tą samą objętość



3 zbiorniki mają tą samą objętość





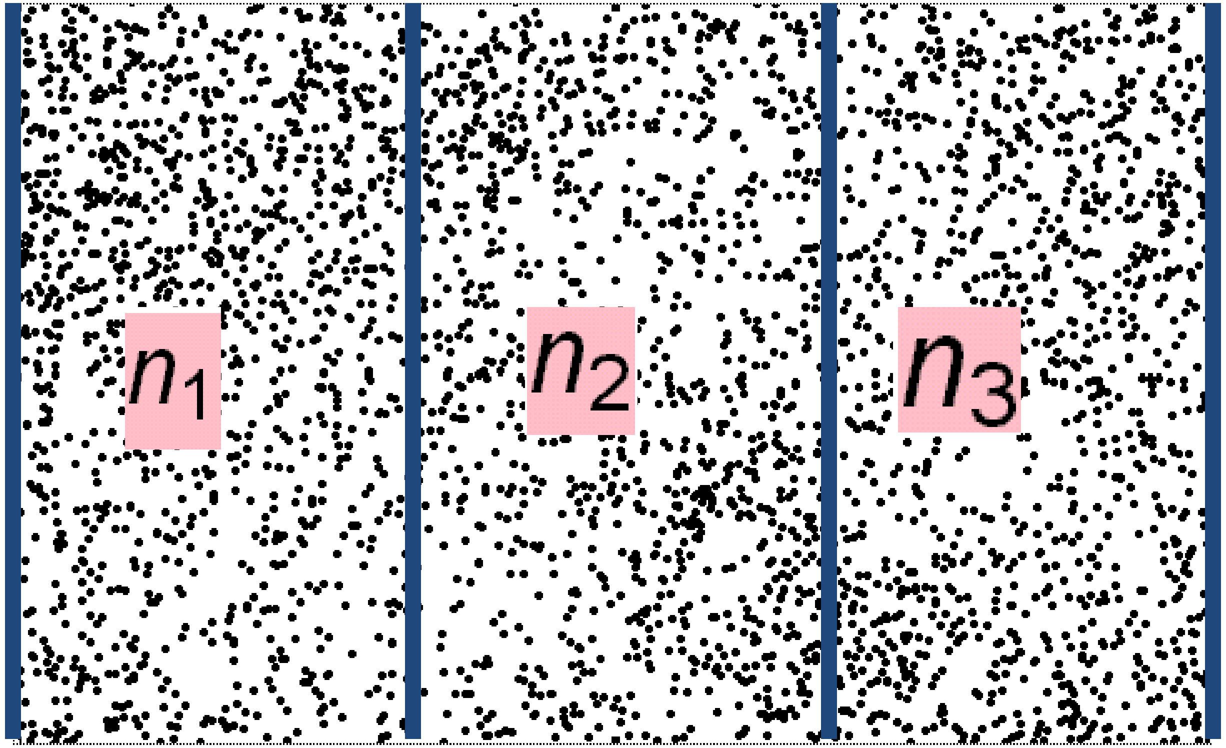


Fluktuacje liczby cząstek w kolejnych częściach naczynia (całkowita liczba cząstek: 250)

$$P_N(n_1, n_2, n_3) = \frac{\frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}}{3^N} \; ; \quad n_1 + n_2 + n_3 = N$$

$$0 \le n_\alpha \le N$$

$$\overline{n_2} = \sum_{n_1,n_2,n_3}^{n_1+n_2+n_3=N} n_2 P_N(n_1, n_2, n_3) = \frac{N}{3}$$



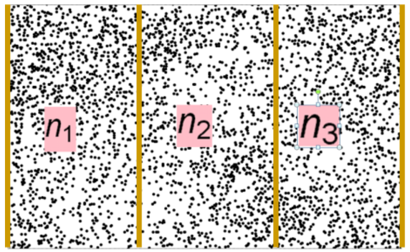
$$\sigma_{\overline{n_2}} = \sqrt{\overline{(n_2 - \overline{n_2})^2}} = \sqrt{\overline{n_2^2} - \overline{n_2}^2} = \frac{\sqrt{2N}}{3}$$

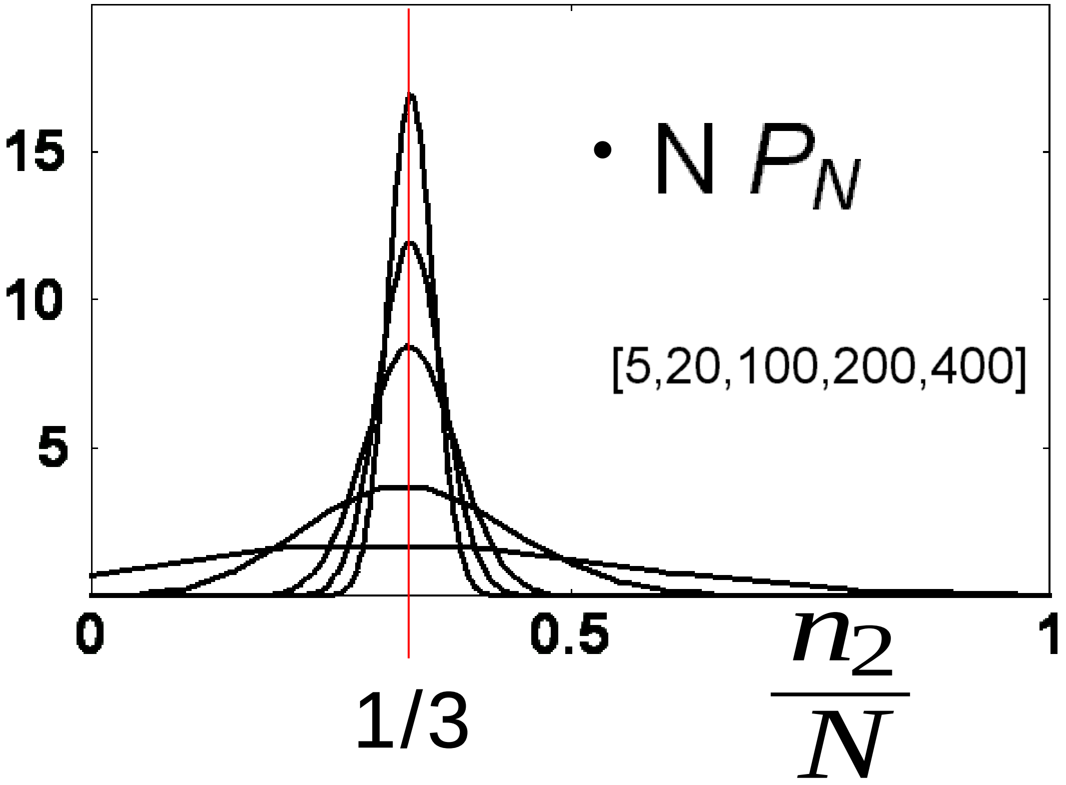
3 zbiorniki mają tą samą objętość

$$\boxed{P_N(n_1, n_2, n_3) = \frac{\frac{N!}{n_1!\, n_2!\, n_3!}}{3^N} \; ; \quad \begin{array}{l} n_1 + n_2 + n_3 = N \\ 0 \le n_\alpha \le N \end{array}}$$

$$\frac{P_N(0,N,0)}{P_N\left(\frac{1}{3}N, \frac{1}{3}N, \frac{1}{3}N\right)} \sim \frac{1}{3^N}$$

$$P_N(n_2) = \sum_{n_1, n_3}^{n_1+n_2+n_3=N} P_N(n_1, n_2, n_3)$$





Część druga

II Zasada Termodynamiki

- Sformułowanie (Carathéodory, Born)
- W kierunku pojęcia entropii i temperatury absolutnej.

Część 2A

- W przypadku I-szej zasady termodynamiki.

$$dU = \sum_i DW_i + DQ + DZ$$

formy Pfaffa (liniowe)

$$\begin{cases} DW_i = X_i\, dx_i \\ DZ = \sum_j \mu_j\, dN_j \end{cases} ;$$

ale jak zinterpretować DQ ?

Powinna to być forma różniczkowa typu :

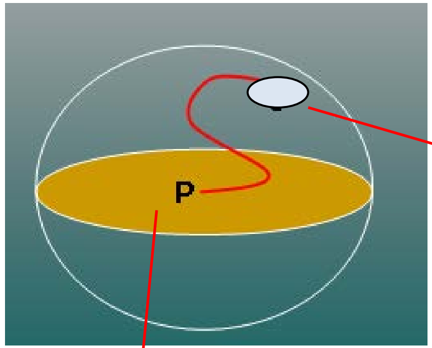
$$DQ = \tilde{T}\, d\tilde{S} \quad (\tilde{T}\,?,\ \tilde{S}\,?)$$

Czy jest to możliwe ?; jeśli tak to kiedy

II Zasada Termodynamiki (postulat)

(Carathéodory, Born):

W otoczeniu dowolnego stanu termodynamicznego zawsze są stany, których nie można osiągnąć po drogach adiabatycznych tzn. w wyniku procesu adiabatycznego (DQ = 0)



$$DQ \neq 0$$

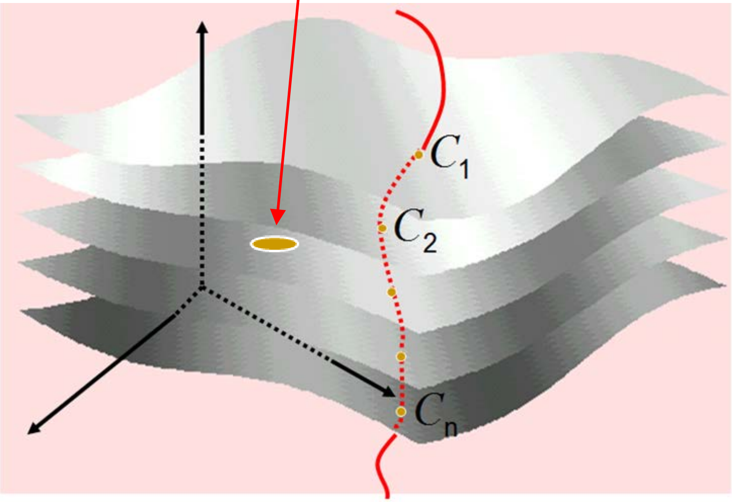
Konsekwencje II zasady termodynamiki w odniesieniu do procesów quasistatycznych (odwracalnych).

II zasada stwierdza, że adiabaty $\boxed{DQ = 0}$ nie przecinają się ani nie są styczne w żadnym punkcie do wspólnej hiperpowierzchni.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **: niezależne parametry wewnętrzne opisujące stan układu; jeden z nich np. x_1 to temperatura empiryczna.**

x_i : nie są osobliwe,
mają ciągłe pochodne,
nie znikają wszystkie w żadnym punkcie

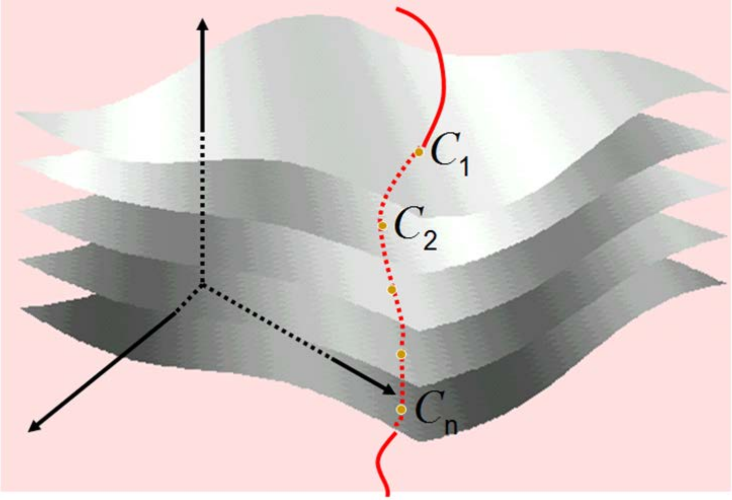
Interesujący nas kawałek przestrzeni termodynamicznej $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jest jednospójny (tj. bez dziur)



(szczegółowa dyskusja na ćwiczeniach: patrz uzupełnienia do wykładu)

Konsekwencje II zasady termodynamiki w odniesieniu do procesów quasistatycznych (odwracalnych).

Adiabaty: (DQ=0)



Hiperpowierzchnie DQ = 0 można sparametryzować za pomocą f:
$f(x_1 , x_2 , \ldots, x_n) = \text{const} = C$:

$$\boxed{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f = f(x), \quad x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

dla różnych C hiperpowierzchnie nie przecinają się nigdzie ani nie są styczne !!! Każdy punkt należy tylko do jednej hiperpowierzchni.
Jest to zagwarantowane warunkiem:

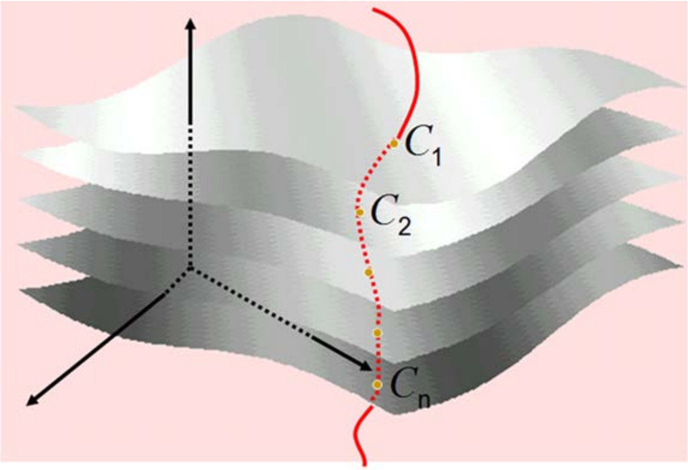
(a) $$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 > 0$$

(dowód na ćwiczeniach, patrz uzupełnienia)

(b) $$df = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i$$

(jest dowolne, i jest różniczką zupełną z konstrukcji)

Czy w takim razie można DQ utożsamić z df



(nie!, bowiem procedura nie jest jednoznaczna)

Uwarstwienie można opisać przez f = const
albo przez g(f) ($g' \neq 0$), gdzie g(•) jest dowolną funkcją rzeczywistą, taką że g'(•) ≠ 0. Istotnie

$$\boxed{d\,g(f) = \underbrace{\left(\frac{dg}{df}\right)}_{\neq 0} df = 0}$$

Uwarstwienie jest geometrycznie o wiele bogatsze niż sugeruje parametryzacja przy pomocy f. Określa ono rodzinę funkcji (zależnych od siebie).
Różne parametryzacje g, f są takie, że **dg ~ df**

Czy w takim razie DQ ~ df ?

TAK !

$$\boxed{DQ \sim df \quad \Leftrightarrow \quad DQ = \lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)\, df}$$

$$\boxed{DQ \sim df \quad \Leftrightarrow \quad DQ = \lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)\, df(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ **: czynnik całkujący formy Pfaffa DQ**

Wnioski:

Istnieje nieskończenie wiele par funkcji $\{\lambda, f\}$ takich, że $DQ = \lambda\, df$

Ta swoboda zostanie znacznie ograniczona jeśli zażądamy spełnienia warunku addytywności dla DQ, tj. po połączeniu dwóch podukładów wymagamy aby $DQ=DQ_1 + DQ_2$ (ekstensywność). Istnienie czynników całkujących dla DQ, DQ_1 oraz DQ_2 + addytywność + równowaga termiczna dla podukładów implikują zależność czynnika całkującego jedynie od temperatury empirycznej.

To prowadzi (z dokładnością do czynnika skali) do pojęcia temperatury absolutnej i entropii!

(dokładna dyskusja w następnym wykładzie)

UZUPEŁNIENIA
oraz materiał na ćwiczenia

II zasada termodynamiki wprowadza głębokie rozróżnienie między ciepłem a pracą:

- O ile pracę pobraną przez układ <u>można w całości zamienić na równoważną ilość ciepła oddanego przez układ, o tyle proces odwrotny podlega bardzo istotnym ograniczeniom</u>.
- **(Clausius, 1850):** niemożliwe jest przekazywanie ciepła przez ciało o niższej temperaturze ciału o temperaturze wyższej bez wprowadzania innych zmian w obu ciałach i otoczeniu.

- **(Kelvin, Thompson, 1851):** Ciepło pobrane z jednego ciała nie daje się zamienić na pracę oddaną przez układ bez wprowadzenia dodatkowych zmian w układzie lub otoczeniu

Sformułowania powyższe wiążą się ściśle z rozwijaną w XIX wieku teorią maszyn cieplnych

Bardzo eleganckie, aksjomatyczne sformułowanie II zasady zapoczątkował Grecki Matematyk Constantin Carathéodory. Bazuje ono na własnościach form Pfaffa, dyskutowanych w dalszej części uzupełnienia

http://en.wikipedia.org/wiki/Constantin_Carath%C3%A9odory

Dygresja Matematyczna

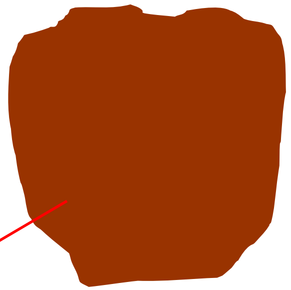
Elementarne własności form Pfaffa:

Jak odróżnić różniczkę zupełną od wyrażenia różniczkowego, które różniczką zupełną nie jest.

$$\begin{cases} DX = \sum_i X_i (x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n)\, d\, x_i \\ \sum_i X_i^2 > 0 \end{cases} \qquad (A)$$

nazywamy formą Pfaffa (lub 1-formą w geometrii różniczkowej), gdy:

X_i : nie są osobliwe,
mają ciągłe pochodne,
nie znikają wszystkie w żadnym punkcie



Interesujący nas kawałek przestrzeni termodynamicznej $\{x_1, \; x_2, \; \ldots, \; x_n\}$ jest jednospójny (tj. bez dziur)

DX można scałkować po drodze $a \smile b$

w przestrzeni stanów :

$$\int_{a \smile b} DX = W_{a \smile b}$$ (na ogół zależy od od drogi)

Aby nie zależała, wtedy musimy mieć

$$DX = d f(x_1, \ldots, x_n)$$

$$\int_{a \smile b} DX = \int_a^b df = f(b_1, b_2, \ldots, b_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$DX = d\,f(x_1, \ \ldots, \ x_n) = \sum_i X_i(x_1, \ x_2, \ \ldots, \ x_n)\, d\,x_i$$

ale

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} = X_1; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = X_2; \ \ldots \ \frac{\partial f}{\partial x_n} = X_n}$$

$\Longrightarrow$ **X_i : pochodne cząstkowe tej samej funkcji**

$\Longrightarrow$ **jeśli dodatkowo drugie pochodne istnieją :**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Longrightarrow \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad ; \quad \forall \ i, j$$

Wtedy otrzymujemy tzw.

Relacje Maxwella, tożsamości krzyżowe, warunki całkowalności formy różniczkowej

Równania
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Longrightarrow \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}; \quad \forall\ i, j \qquad \text{(B)}$$

są warunkami koniecznymi na to aby forma Pfaffa była r. zup.

Jeśli dodatkowo rozmaitość na której różniczka jest określona jest jednospójna, to wtedy wraz z (B) jest to warunek konieczny i wystarczający na to aby

$$DX = \sum_i X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i = df(x_1, \ldots, x_n);$$

wtedy
$$\oint DX = 0$$

Ma to konsekwencje fizyczne (tożsamości krzyżowe: jak pamiętamy z elementarnego kursu termodynamiki)

Jeśli przynajmniej jedna para równań

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Longrightarrow \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}; \quad \forall\ i, j$$

nie jest spełniona, wtedy DX nie jest różniczką zupełną.

$$np. \qquad DX = (x^2 + y)dx - xdy$$

$$nie\ jest\ różniczką\ zupełną\ bo \quad \frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x}$$

Przyjrzyjmy się obecnie strukturom geometrycznym jakie różniczki zupełne indukują w przestrzeni na której różniczka jest określona.
W tym celu załóżmy, że zadane jest odwzorowanie:

$$\boxed{f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad f = f(x), \qquad x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)}$$

Dodatkowo założymy, że

$$df = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) dx_i \ \text{ może być różne od } 0$$

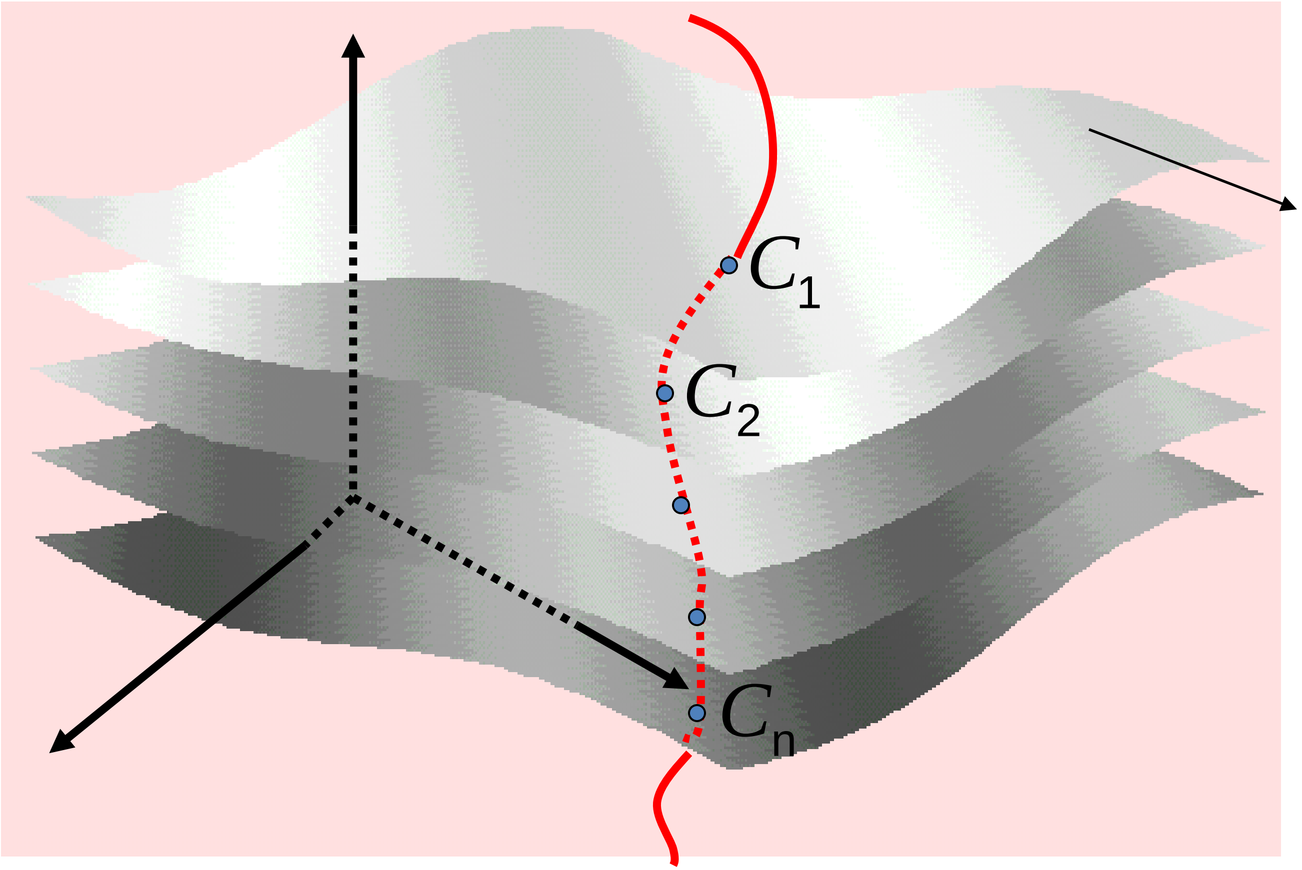
co jest zagwarantowane, gdy

$$\boxed{df \neq 0 \iff \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 > 0}$$

Równanie Pfaffa : $df = 0 \equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const} = C,$

przy założeniu, że $\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 > 0$ **ma bardzo prostą**

interpretację geometryczną :



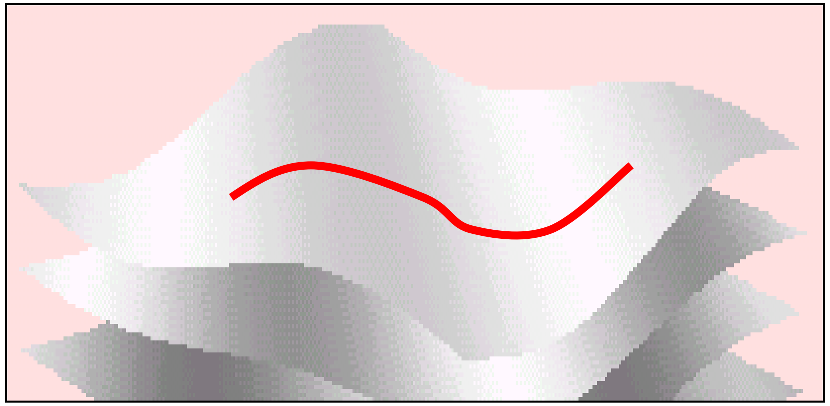
hiperpowierzchnie
f = const = C;

dla różnych C
hiperpowierzchnie
nie przecinają się
nigdzie ani nie
stykają !!!

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 > 0 \qquad df = 0 \quad \equiv \quad f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const} = C$$

definiuje rodzinę hiperpowierzchni w $\mathbb{R}^n$ (przynajmniej lokalnie) o wymiarze n – 1 takich, że każdy punkt $\mathbb{R}^n$ należy do jednej i tylko jednej z nich

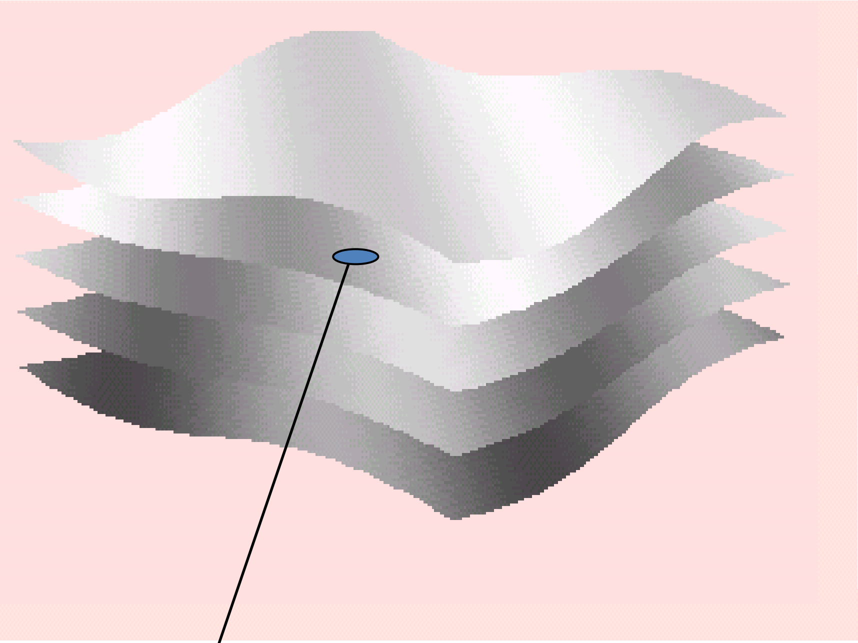
Uwaga:



Interesujemy się jedynie maksymalnie wymiarowymi (tj. o wymiarze $(n-1)$) hiperpowierzchniami generowanymi przez $df = 0$ ($\equiv f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$).

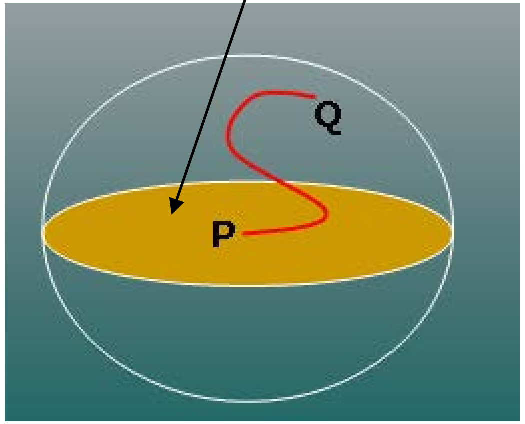
Hiperpowierzchnie o wymiarze mniejszym niż $(n-1)$ oczywiście też istnieją i są szczególnymi rozwiązaniami równania $\boxed{df = 0}$.

Np. jeśli krzywa $[x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)]$ leży na $(n-1)$ wym. hiperpowierzchni $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$, wtedy oczywiście spełnia równanie $\boxed{df = 0}$



Hiperpowierzchnie pokrywają (przynajmniej lokalnie) $\mathbb{R}^n$, a rodzina $\{f^{-1}(C)_{C\in\mathbb{R}}\}$ nazywa się uwarstwieniem $\mathbb{R}^n$.

Hiperpowierzchnie odpowiadające różnym wartościom C nie przecinają się ani nie stykają !!!



Jest to zagwarantowane przez warunek :

$$\sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_i X_i^2 > 0$$

(Wynika to z twierdzenia Caratheodoryego: W otoczeniu dowolnego punktu istnieją punkty nieosiągalne na drogach

df =0)

Wnioski:

Z całkowalnością liniowej formy Pfaffa

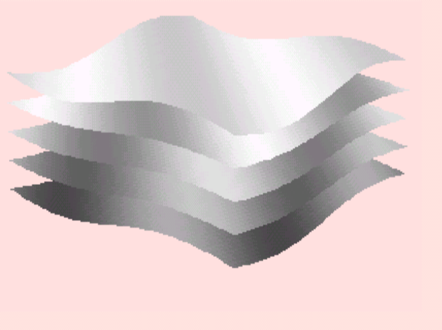
$$DX = \sum_i X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_i = df(x_1, \ldots, x_n)$$

możemy związać istnienie geometrycznej struktury nieprzecinających się hiperpłaszczyzn (uwarstwienia) f=const, jeśli poza warunkami

(A) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial X_i}{\partial x_j} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}; \quad \forall\ i, j$$

(B) oraz jednospójności, mamy dodatkowo

(C) $$\sum_i X_i^2 > 0$$



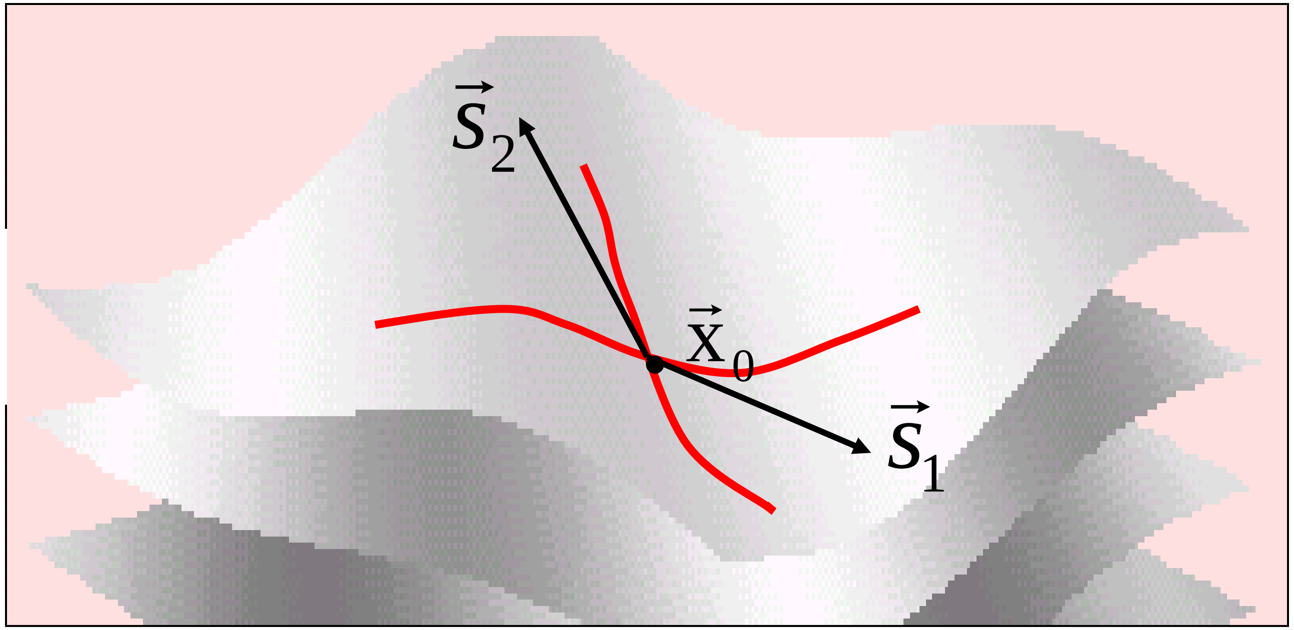
Dowód dotyczący form Pfaffa:

do str. 14

Dowód (ćwiczenia):

$\vec{x_0} = [\, x_{10},\ x_{20},\ \dots x_{n0}]$

$f(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = C$



Poprowadźmy dowolną krzywą $\{x_i(t)\}$ **przez** $\vec{x_0}$ **zawartą w hiperpowierzchni** $\{x_i(t_0) \equiv x_{i0}\}$. **Wtedy**

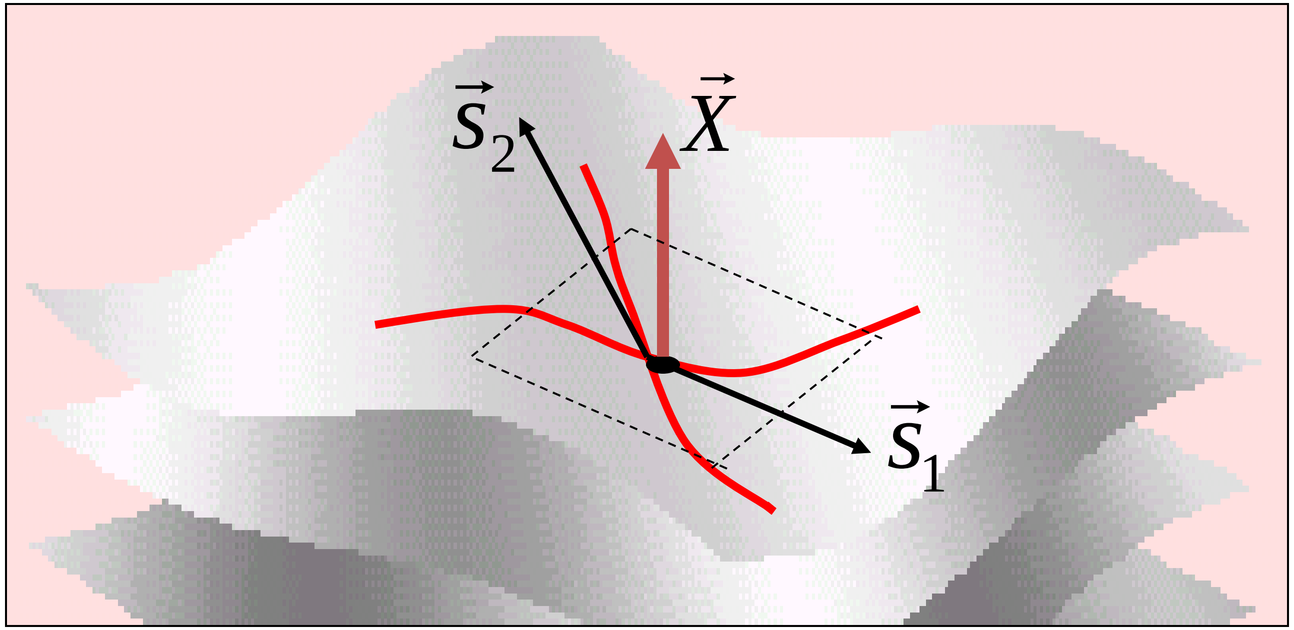
$$df = 0 = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \cdot \frac{dx_i}{dt}\, dt = 0$$

$$\left[\, \frac{\partial f}{\partial x_1}\bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0},\ \dots,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}\bigg|_{\vec{x}=\vec{x}_0} \right] \cdot \left[\, \frac{\partial x_1}{\partial t}\bigg|_{t=t_0},\ \dots,\ \frac{\partial x_n}{\partial t}\bigg|_{t=t_0} \right] = 0$$

$$[\, X_1 \dots,\ X_n\,] \cdot [\,\text{wektor styczny}: \vec{s}_1\,] = \vec{X} \cdot \vec{s}_1 = 0$$

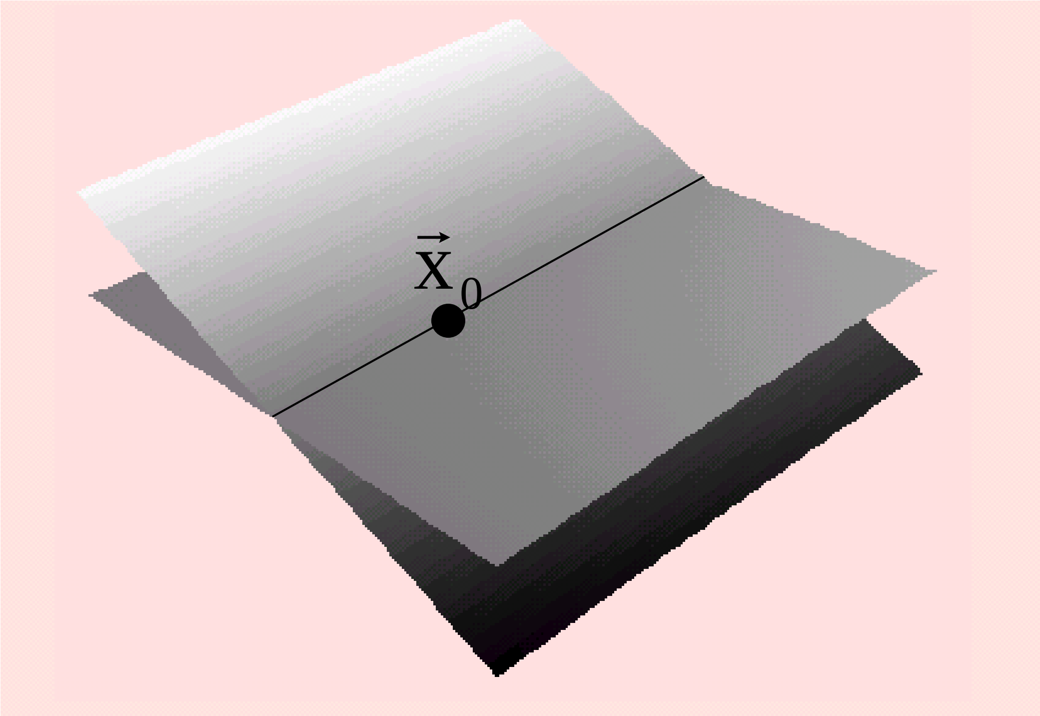
dla innej krzywej mamy:

$$\vec{X} \cdot \vec{s}_2 = 0$$



Wektory $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_{n-1}$ generują $n-1$ wymiarową hiperpłaszczyznę $\pi_c(\vec{x}_0)$ styczną do hiperpowierzchni w p – cie $\vec{x}_0$.

$$\boxed{\vec{X} \perp \pi_c(\vec{x}_0)}$$



$$DX = \sum_i X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d x_i = d f(x_1, \ldots, x_n)$$

Wedy $\vec{X}$ musi być prostopadłe do obu hiperpowierzchni w p – cie $\vec{x}_0$. A to jest możliwe tylko wtedy

(a) gdy $\vec{X} = \vec{0}$

(b) obie hiperpowierzchnie są styczne do tej samej hiperpłaszczyzny lub pokrywają się

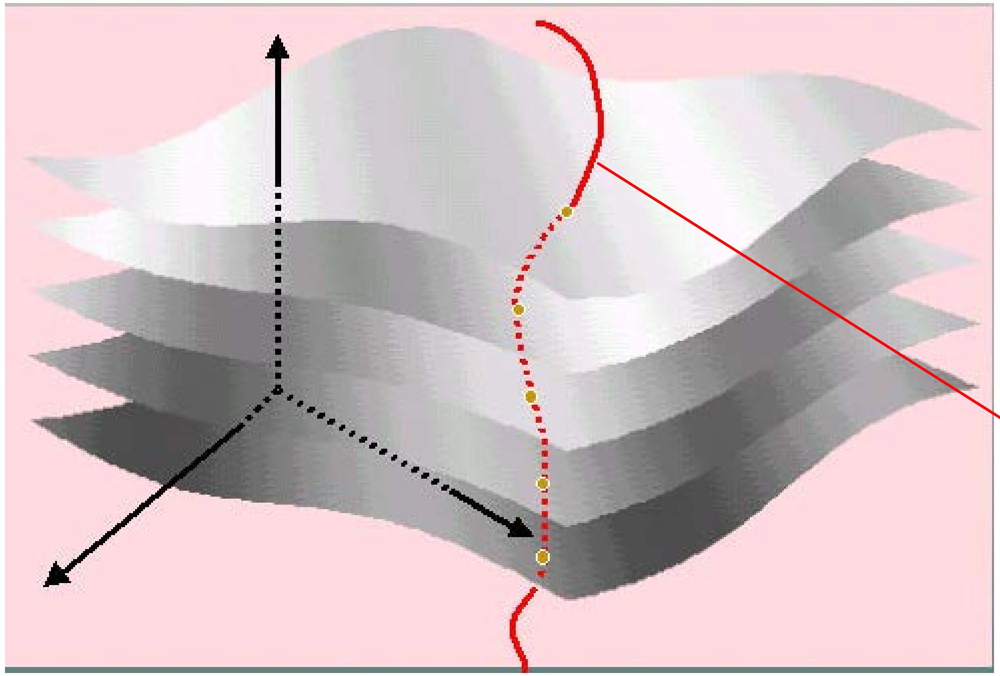
Wszystkie te przypadki eliminują założenia.

Konsekwencje istnienia struktury nieprzecinających się hiperpłaszczyzn:

Czynnik całkujący formy Pfaffa:

Przypuśćmy obecnie, że mamy proces odwrotny

Mamy uwarstwienie (foliację) $\mathbf{R}^n$



Czy możemy skonstruować funkcję $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, taką, że uwarstwienie pokrywa się z rodziną hiperpowierzchni

$$f = \text{const}$$

Tak

dowolna krzywa gładka 'poprzeczna' do uwarstwienia, parametryzowana powiedzmy przez t

Wtedy, z definicji, $f = t = \text{const}$ na warstwie wprowadza funkcję w $\mathbb{R}^n$, z którą można utożsamić dane uwarstwienie.

Procedura nie jest jednoznaczna

Uwarstwienie można opisać przez $f =$ const

albo przez $g(f)$ $(g' \neq 0)$, gdzie $g(\bullet)$ jest <u>dowolną</u> funkcją rzeczywistą, taką że $g'(\bullet) \neq 0$. Istotnie

$$\boxed{dg(f) = \underbrace{\left(\frac{dg}{df}\right)}_{\neq 0} df = 0}$$

Uwarstwienie jest geometrycznie o wiele bogatsze niż sugeruje parametryzacja przy pomocy f. Określa ono <u>rodzinę funkcji</u> (zależnych od siebie).

Różne parametryzacje g, f są takie, że **dg ~ df**

Czy jest możliwe aby DX ~ df ?

Odpowiedź jest twierdząca!!!

DEF.

Formę Pfaffa DX będziemy uważać za <u>całkowalną</u> w obszarze jednospójnym $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, gdy rozwiązania równania Pfaffa

$$DX = 0$$

są uwarstwieniem (foliacją) $\mathbb{R}^n$.

$$\Rightarrow \quad DX \sim df \quad \Leftrightarrow \quad DX = \lambda(x_1, x_2, \ldots x_n)\, df$$

równoważnie: $\frac{DX}{\lambda} = df$ jest różniczką zupełną; f zadaje uwarstwienie

TW.1.

DX jest całkowalna $\Longleftrightarrow$ $\exists$ para funkcji (f, λ):

$$DX = \lambda\, df$$

λ: czynnik całkujący formy Pfaffa DX

TW.2.

Jeśli $\exists$ chociażby jeden czynnik całkujący to istnieje ich nieskończenie wiele (udowodniliśmy poprzednio)

WKW na to aby forma $DX = \sum_i X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_i$

posiadała czynnik całkujący λ: $DX = \lambda\, df$

(A) $$\frac{X_\alpha}{\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$$

(B) $$\forall\ \alpha, \beta : \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\beta \partial x_\alpha} \iff \partial_\beta\left(\frac{X_\alpha}{\lambda}\right) = \partial_\alpha\left(\frac{X_\beta}{\lambda}\right)$$

(tożsamości krzyżowe: warunek na λ)

(B) można także zapisać w innej formie

Na ćwiczenia:

$$\frac{1}{\lambda}\partial_\beta X_\alpha + X_\alpha \partial_\beta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\partial_\alpha X_\beta + X_\beta \partial_\alpha\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\partial_\alpha X_\beta - \partial_\beta X_\alpha = (X_\alpha \partial_\beta - X_\beta \partial_\alpha)\ln\lambda}$$

Oznaczając

$$\Delta_{ij} \overset{\text{df}}{=} \partial_i X_j - \partial_j X_i$$

$$D_{ij} \overset{\text{df}}{=} X_i \partial_j - X_j \partial_i$$

$$\Delta_{ij} = D_{ij} \ln(\lambda)$$

$\binom{n}{2}$ **warunków**

$W\ poprzednim\ przykładzie$: $DX = (x^2 + y)dx - xdy$

$nie\ było\ różniczką\ zupełną, bo$ $\frac{\partial(x^2 + y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(-x)}{\partial x}$;

$lecz\ forma\ ma\ czynnik\ całkujący, bo\ można\ znaleźć$

$takie\ \lambda(x, y), aby\ spełniona\ była\ równość$: $\frac{\partial(\frac{1}{\lambda}(x^2 + y))}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{1}{\lambda}(-x))}{\partial x}$

$np.\ \ \lambda = -\frac{1}{x^2}$ $(na\ ćwiczeniach\ znajdzemy\ bardziej\ ogólny\ cz.c.)$

Dalsze przykłady:

$$DX = y\,dx - x\,dy \quad (\equiv X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2)$$

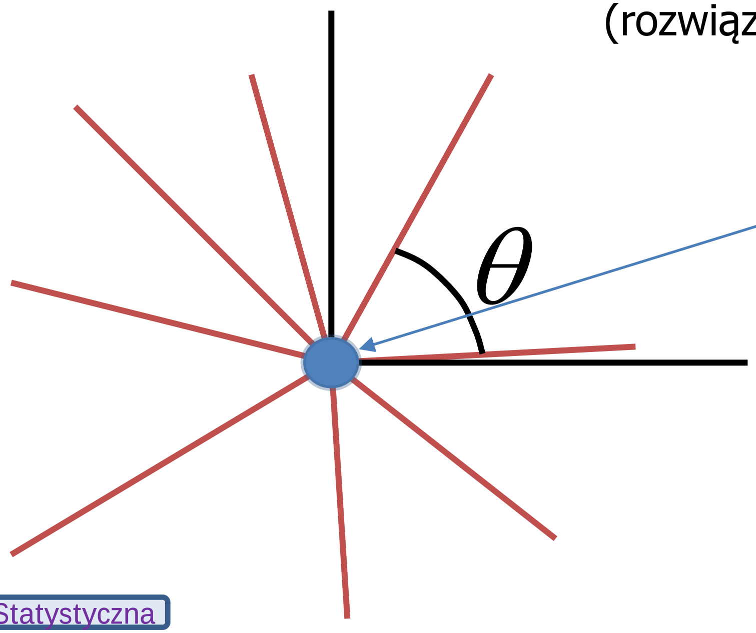
$$\Longrightarrow (x\,\partial_x + y\,\partial_y)\lambda = 2\lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda = A\left(x^2 + y^2\right)$$

$$\frac{DX}{\lambda} = \frac{y}{A\left(x^2 + y^2\right)}dx - \frac{x}{A\left(x^2 + y^2\right)}dy = df$$

$$f(x, y) = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \equiv \theta \;\rightarrow\; \text{kąt na płaszczyźnie}$$

(rozwiązanie istnieje poza początkiem układu współrzędnych)



Dygresja (całkowalnośc form Pfaffa)

(a) n = 1 (trywialny)

$X_1(x_1)\,dx_1 = 0$ zawsze całkowalne $\int X_1(x_1)\,dx_1 = F(x_1)$

(b) n = 2: $\dfrac{1}{\lambda}DX = \dfrac{X_1(x_1,x_2)}{\lambda}dx_1 + \dfrac{X_2(x_1,x_2)}{\lambda}dx_2 = df;$

szukamy rozwiązania równania Pfaffa: $df = 0$,

co prowadzi do równania różniczkowego zwyczajnego:

$\dfrac{dx_2}{dx_1} = -\dfrac{X_1(x_1,x_2)}{X_2(x_1,x_2)}$. *Rozwiązaniem tego równania jest funkcja*

$f(x_1,x_2) = C$ $(C$: *stała*); *wtedy czynnikiem całkującym jest*

$$\lambda = \frac{\chi(f)\,X_1}{\partial f/\partial x_1} = \frac{\chi(f)\,X_2}{\partial f/\partial x_2},$$

gdzie χ *jest dowolną różniczkowalną funkcją.*

Każda liniowa forma Pfaffa w jednej i dwóch zmiennych ma zawsze czynnik całkujący (a zatem ma ich nieskończenie wiele).

Na ćwiczenia:

$$\Delta_{ij} \overset{df}{=} \partial_i X_j - \partial_j X_i \qquad D_{ij} \overset{df}{=} X_i \partial_j - X_j \partial_i$$

$$\Delta_{ij} = D_{ij} \ln(\lambda)$$

$$\Downarrow$$

$$X_\alpha D_{\beta\gamma} + X_\beta D_{\gamma\alpha} + X_\gamma D_{\alpha\beta} \equiv 0 \qquad (\forall\ \alpha, \beta, \gamma); \quad \binom{n}{3} \text{ związków}$$

$\Longrightarrow$ mamy związek pomiędzy Δ_{ij}

$$X_\alpha \Delta_{\beta\gamma} + X_\beta \Delta_{\gamma\alpha} + X_\gamma \Delta_{\alpha\beta} = 0 \qquad \forall\ \alpha, \beta, \gamma$$

(warunki zgodności (Freboniusa)) **(X Rot X=0)**

Są to warunki konieczne na to aby DX miała czynnik całkujący.

(lecz w d=3 są to warunki konieczne i wystarczające na to aby forma miała cz.c.)

Jeśli warunki zgodności nie są spełnione forma Pfaffa nie będzie miała czynnika całkującego.

Przykład niecałkowalnej formy Pfaffa:

$$DX = -x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2 + k\,dx_3, \qquad k = \text{const} \neq 0$$
$$= X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + X_3\,dx_3$$

$n = 3$

$$\Delta_{12} = \partial_2 X_1 - \partial_1 X_2 = \partial_2(-x_2) - \partial_1(x_1) = -2$$
$$\Delta_{13} = \Delta_{23} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad X_1\,\Delta_{23} + X_2\,\Delta_{31} + X_3\,\Delta_{12} = -2k \neq 0$$

Zatem forma nie posiada czynnika całkującego.

Niecałkowalność oznacza na ogół niejednoznaczność rozwiązań równania $DX = 0$.

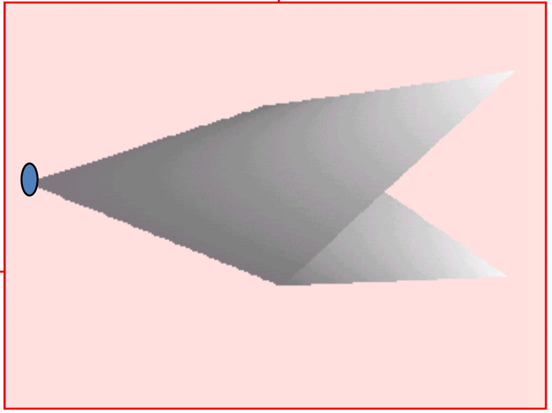
W naszym przykładzie przez każdy punkt (a,b,c) przechodzą dwie powierzchnie:

$$DX = -x_2\,dx_1 + x_1\,dx_2 + k\,dx_3, \qquad k = \text{const} \neq 0$$

$$k(x_3 - c) = \pm(x_1 - a)(x_2 - b) + b(x_1 - a) - a(x_2 - b);$$

powierzchnie mają wspólną płaszczyznę styczną w p.cie (a, b, c) daną równaniem :

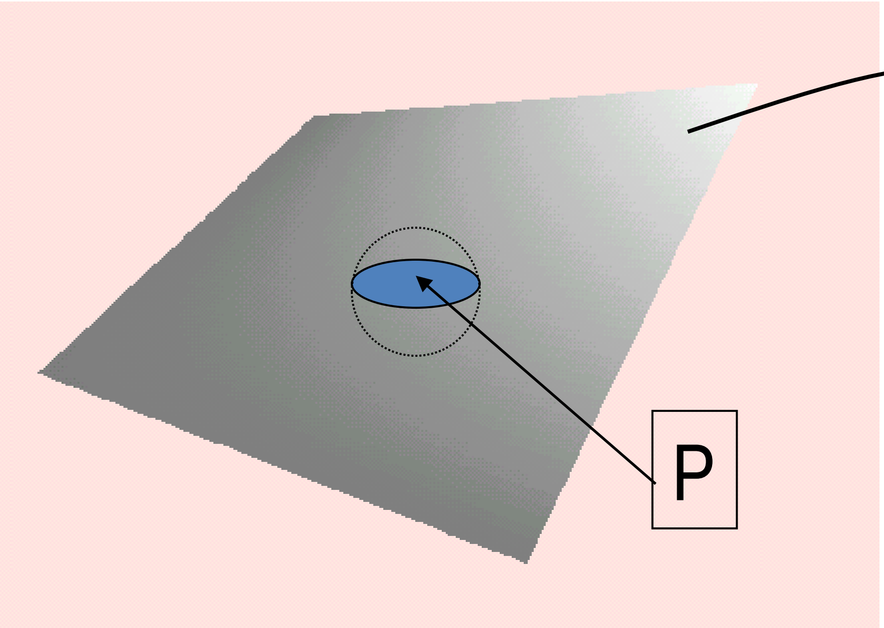
$$k(x_3 - c) = b(x_1 - a) - a(x_2 - b)$$



Geometryczne (niezależne od parametryzacji) sformułowanie warunku na całkowalność DX

TW. 3

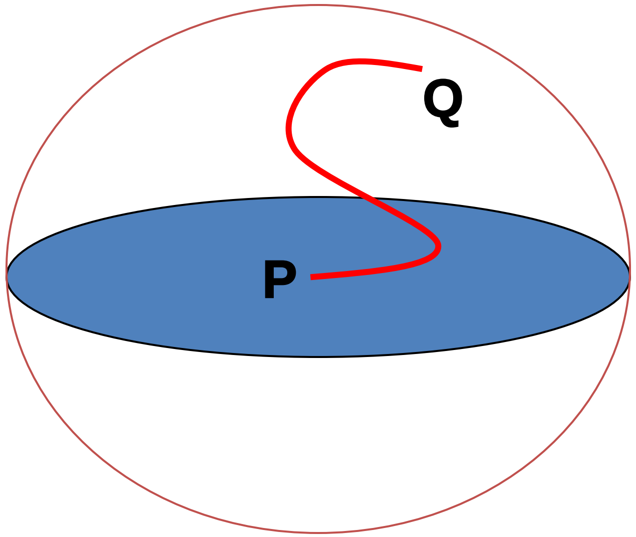
Jeśli w jednospójnym obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ forma Pfaffa DX ma czynnik całkujący (jest całkowalna), wtedy w dowolnie bliskim sąsiedztwie każdego punktu P $\in \Omega$ znajdują się punkty których nie można osiągnąć na drodze DX = 0.



Dowolna hiperpłaszczyzna generowana przez DX = 0

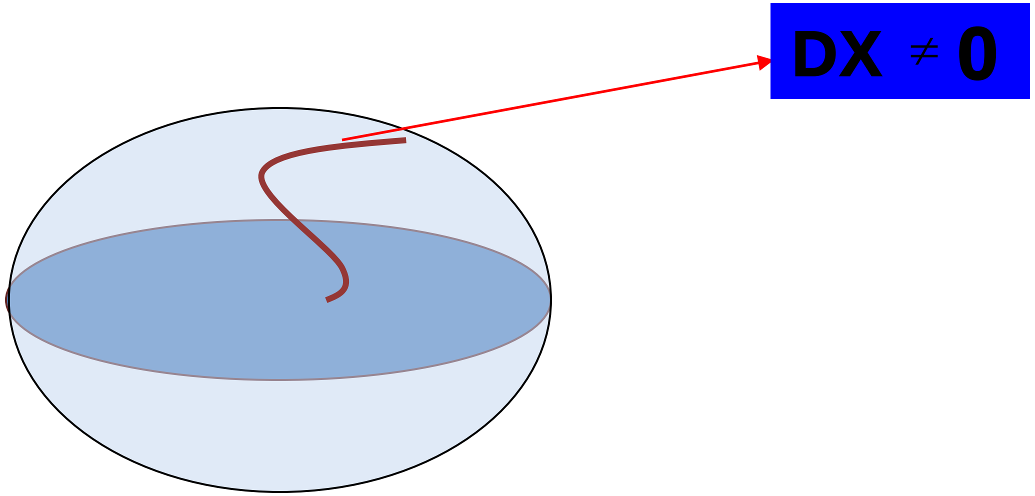
TW. 4

Dla niecałkowalnej formy Pfaffa DX, w dowolnym otoczeniu punktu P, dowolny inny punkt Q z tego otoczenia można połączyć drogą γ(P, Q) : DX = 0 wzdłóż tej drogi.



Twierdzenie odwrotne do powyższych dwóch też jest prawdziwe

Twierdzenie Caratheodory'ego



Jeśli liniowa forma różniczkowa $DX = \sum_i X_i\, dx_i$ ma własność, że w dowolnym sąsiedztwie dowolnego punktu obszaru jednospójnego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ są punkty nieosiągalne na drogach spełniających warunek $DX = 0$, wtedy forma jest całkowalna (ma czynnik całkujący)