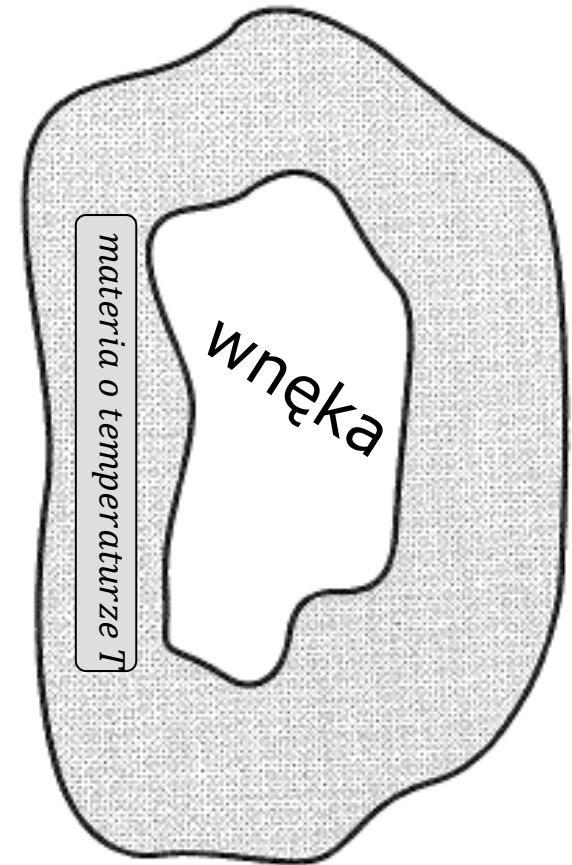


Promieniowanie elektromagnetyczne i prawo Stefana-Boltzmann



- Relacje dyspersji dla fotonów
- Gęstość stanów
- Energia swobodna, średnia energia, średnia liczba fotonów i jej fluktuacja
- Rozkład energii po częstościach i długościach fal
- Ciśnienie, entropia i ciepło właściwe

- Wszystkie ciała, dla $T > 0$, emitują promieniowanie elektromagnetyczne skutkiem wzbudzeń termicznych ładunków w pobliżu powierzchni;
- Rozważmy wnękę w materiale podgrzanym do temperatury T :
- Atomy ścian wnęki bez przerwy emitują i absorbują promieniowanie; zakładamy równowagę pr. ze ściankami.
- materiał jest doskonale czarny, tzn. nie wypuszcza promieniowania na zewnątrz.
- W równowadze wnękę wypełnia promieniowanie, które jest gazem fotonów.
- Częstości (energii) fotonów nie są ograniczone od góry jak mieliśmy dla fononów.



Wnęka wypełniona jest promieniowaniem o różnych częstościach, bądź długościach fal. Ilość promieniowania o danej częstości specyfikujemy podając gęstość energii o danej częstości na jednostkę objętości, $\epsilon(\omega)$:

$$\epsilon(\omega) = \frac{E(\omega)}{V};$$

$\epsilon(\omega)d\omega$ jest energią promieniowania na jednostkę objętości dla częstości z przedziału $[\omega, \omega + d\omega]$, w temperaturze T . Celem fizyki statystycznej jest wyznaczenie $\epsilon(\omega)$ ($\equiv E(\omega)$). Jedną z najważniejszych własności $\epsilon(\omega)$ wynikającą z warunków równowagi w ustalonej temperaturze T i II zasady termodynamiki jest (a) niezależność $\epsilon(\omega)$ od położenia, oraz (b) niezależność $\epsilon(\omega)$ od kierunku wektora falowego, czy polaryzacji promieniowania. Ponieważ $\omega = \omega(k)$ (str. 7 – 8), więc – istotnie – $\epsilon = \epsilon(\omega)$. To sprawia, że **w równowadze $\epsilon(\omega)$ nie zależy ani od kształtu i rozmiaru wnęki, ani od materiału otaczającego wnękę.**

gęstość stanów:

traktujemy fotony jak cząstki kwantowe z pędem $\hbar \mathbf{k}$ (i energią $\hbar \omega$) zamknięte w objętości V (objętość wnęki). Zatem, jak wynika z poprzedniej analizy (wykład 15) w przypadku nieoddziaływujących cząstek, w objętości $d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}$ przestrzeni fazowej mamy $\frac{\sigma d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{p}}{h^3}$ stanów (σ : degeneracja spinowa), lub odwołując się do wektorów falowych ($\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$) mamy $\frac{\sigma d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{k}}{(2 \pi)^3}$ stanów. Można teraz wyciąkować po objętości wnęki aby otrzymać $\frac{\sigma V d^3 \mathbf{k}}{(2 \pi)^3}$ stanów we wnęce, w przedziale $[\mathbf{k}, \mathbf{k} + d^3 \mathbf{k}]$. Jeśli dodatkowo kierunek wektora falowego nie jest istotny, wtedy $\frac{\sigma V d^3 \mathbf{k}}{(2 \pi)^3} = \frac{\sigma V 4 \pi k^2 d k}{(2 \pi)^3} = D(k) dk$.

Musimy jeszcze znaleźć relacje dyspersji $\omega(k)$ oraz σ .

Będziemy brali pod uwagę jedynie część ‘ elektryczną ’ fali elektromagnetycznej - jest ona kilka rzędów wielkości bardziej istotna niż część magnetyczna

Ogólnie, z równań Maxwella, mamy

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} = \mathbf{E}_0 e^{i \frac{2\pi}{\lambda} (\mathbf{x} - \mathbf{c}t)} \quad \text{gdzie} \quad \mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k},$$

z każdym modem $\mathbf{k}$ związane są 2 mody poprzeczne ($\sigma = 2$).

Natomiast relacje dyspersji mają postać:

$$\omega = ck; \quad \text{gdzie } c \text{ jest prędkością światła.}$$

Fale stojące we wnętrzu otrzymamy analogicznie jak dla kryształu, biorąc liniowe kombinacje fal biegnących w przeciwnych kierunkach

$$\mathbf{E}_0 [e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} + e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + \omega t)}] = 2\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \cos(\omega t).$$

Na poziomie kwantowomechanicznym (kwantowej teorii pola, patrz strona 4) takie fale elektromagnetyczne to w rzeczywistości fotony – bezmasowe cząstki o spinie 1 (w jednostkach $\hbar$)

których energia i pęd zależą od wektora falowego jak $\epsilon_{\mathbf{k}} = cp(\mathbf{k}) = c\hbar k = \hbar\omega_k$.

$$E(\{n_{\tau, \sigma_{\mathbf{k}}}\}) = \sum_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_k = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} \hbar ck, \quad n_{\tau, \sigma_{\mathbf{k}}} = 0, 1, 2, \dots; \quad \sigma_{\tau} = \pm 1,$$

Zatem gęstość stanów ($D(k)dk = D(\omega)d\omega$) :

tutaj $D(\omega) \equiv \sigma D(\omega)$; tzn. degeneracja spinowa jest włączona do D

$$D(\omega) d\omega = 2 \times \frac{V}{2\pi^2} k^2(\omega) \frac{dk(\omega)}{d\omega} d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

$$2 \times \leftrightarrow \{\sigma_{\tau} = \pm 1; \sigma = 2\}$$

Alternatywnie:

dla cząstek relatywistycznych:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \mathbf{p}^2} = c |\mathbf{p}|,$$

gdzie ostatnia część wzoru jest prawdziwa dla fotonów

Korzystając z relacji:

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}, \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad E = \hbar \omega, \quad \omega = 2\pi \nu$$

możemy wyrazić energię, gęstość stanów, oraz relacje dyspersji w zmiennych, które są najbardziej istotne w opisie interesującego nas zagadnienia.

$$E(\{n_{\tau,\sigma_{\tau}}\}) = \sum_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} \hbar ck, \quad n_{\tau,\sigma_{\tau}} = 0, 1, 2, \dots; \quad \sigma_{\tau} = \pm 1,$$

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = cp(\mathbf{k}) = c\hbar k = \hbar\omega_{\mathbf{k}} \quad D(\omega) d\omega = 2 \times \frac{V}{2\pi^2} k^2(\omega) \frac{dk(\omega)}{d\omega} d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

Porównanie z modelem Debya

$$E = E(\{n_j\}) = \sum_{j=1}^{3N} \hbar\omega_j (n_j + \frac{1}{2}) = \sum_{j=1}^{3N} \hbar\omega_j n_j + \text{energia drgań zerowych}$$

relacje dyspersji:
$$\begin{cases} \omega = v_l k; & \text{dla 1 modu podłużnego} \\ & v_L : \text{prędkość dźwięku} \\ \omega = v_t k; & \text{dla 2 modów poprzecznych} \end{cases}$$

$$D(\omega)d\omega = \begin{cases} \frac{V}{2\pi^2} \left(\frac{1}{v_l^3} + \frac{2}{v_t^3} \right) \omega^2 d\omega = \frac{9N}{\omega_D^3} \omega^2, & \omega < \omega_D \\ 0, & \omega > \omega_D, \end{cases}$$

Podczas gdy w modelu Deby'a najkrótsze długości fal (a więc największe częstotliwości) określone są przez odległości między atomami, dla promieniowania elektromagnetycznego nie ma takiego "atomowego" wymiaru, a więc całkowanie po częstotliwościach biegnie do nieskończonych częstotliwości.

$$Z = \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_1 n_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_2 n_2} \right) \dots = \prod_{\tau} \left(\sum_{n_{\tau}=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_{\tau} n_{\tau}} \right) = \prod_{\tau} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_{\tau}}} \right).$$

Stąd, dla energii swobodnej otrzymamy wzór

$$F = k_B T \sum_{\tau} \ln(1 - e^{-\beta \epsilon_{\tau}}) = k_B T \int \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) D(\omega) d\omega,$$

*tutaj $D(\omega) \equiv \sigma D(\omega)$; tzn. degeneracja
spinowa jest włączona do D*

Stąd energia swobodna gazu fotonów dana jest wzorem

$$F = k_B T \int_0^\infty \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) D(\omega) d\omega$$

tutaj $D(\omega) \equiv \sigma D(\omega)$; tzn. degeneracja spinowa jest włączona do D

$$D(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

$$= \frac{V k_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) d\omega$$

$$\stackrel{\beta \hbar \omega = x}{=} \frac{V k_B T}{\pi^2 c^3} \left(\frac{1}{\beta \hbar} \right)^3 \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

$$\frac{2}{n^3}$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3 \hbar^3 \beta^4} \left(- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty x^2 e^{-nx} dx \right)$$

$$F = -\frac{2V}{\pi^2 c^3 \hbar^3 \beta^4} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}}_{\frac{\pi^4}{90} = \zeta(4)} = -\frac{V \pi^2 k_B^4 T^4}{45 c^3 \hbar^3},$$

Z energii swobodnej możemy otrzymać dowolną inną funkcję termodynamiczną.

$$U = F - TS = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = V a T^4,$$

gdzie

$$a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7.569 \times 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4}.$$

Fizyka statystyczna pozwala wyliczyć parametr a we wzorze Stefana-Boltzmana.

Można też otrzymać znane formuły takie jak
prawo promieniowania Plancka, formułę Rayleigha-Jeansa, czy prawo Wiena.

W tym celu musimy wprowadzić pojęcie rozkładu energii po częstościach i długościach fal

Wyliczmy najpierw: $\langle n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} \rangle$

$$\begin{aligned}\langle n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} \rangle &= Z_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}}^{-1} \sum_{n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}}=0}^{\infty} n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} e^{-\beta \hbar n_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}} \omega_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}}} \\ &= \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k},\sigma_{\mathbf{k}}}} - 1}.\end{aligned}$$

$$\langle n_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}}} - 1}.$$

$$\langle N \rangle \equiv \bar{N} = N(T, V) \stackrel{df}{=} \sum_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} \langle n_{\mathbf{k}, \sigma_{\mathbf{k}}} \rangle$$

tutaj $D(\omega) \equiv \sigma D(\omega)$; tzn. degeneracja spinowa jest włączona do D

$$= \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} D(\omega) d\omega \stackrel{df}{=} \int_0^\infty N(\omega) d\omega$$

$$= \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} d\omega = 0.244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 V,$$

liczba fotonów maleje z malejącą temperaturą i w $T = 0$ mamy $N(0, V) = 0$.

Zadanie: wyznaczyć fluktuację liczby cząstek wokół $\langle N \rangle$

$$\int_0^\infty N(\omega) d\omega = \int_0^\infty \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} D(\omega) d\omega$$

$$D(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 d\omega,$$

tutaj $D(\omega) \equiv \sigma D(\omega)$; tzn. degeneracja spinowa jest włączona do D

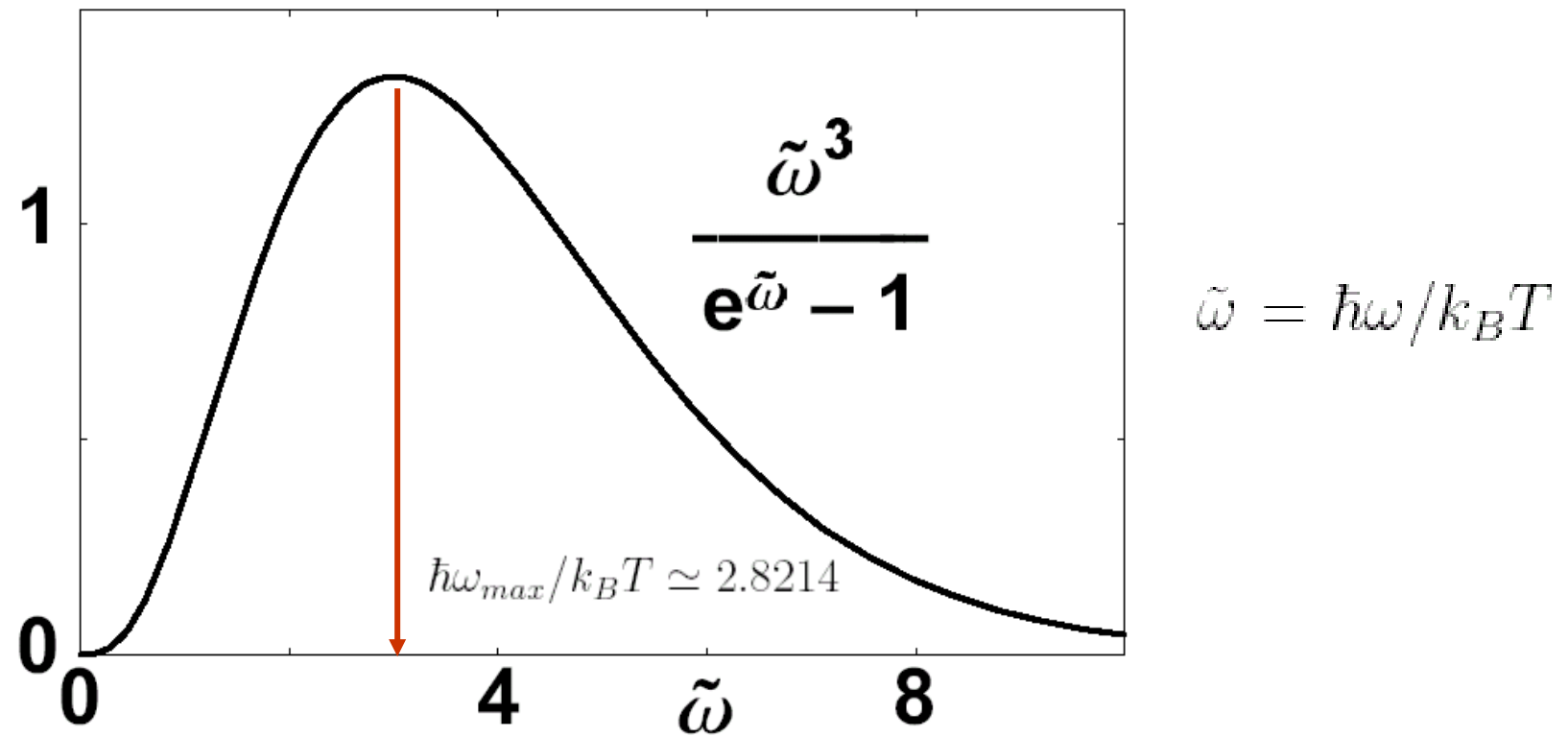
Stąd $U(T, V) = E(T, V)$ można zapisać jako

$$E(T, V) = \int_0^\infty d\omega \hbar \omega N(\omega) = \int_0^\infty d\omega E(\omega),$$

gdzie

$$E(\omega) d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega.$$

$$E(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega \quad \text{bądź równoważnie} \quad \epsilon(\omega) =^{(str.4)} \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1}$$



$$E(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega$$

- w granicy niskich częstości ($\hbar \omega \ll k_B T$):

$$\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) \simeq 1 + \frac{\hbar \omega}{k_B T}$$

co daje wzór Rayleigha-Jeansa na rozkład energii po częstościach

$$E(\omega) = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 k_B T. \quad (\text{ultrafioletowa katastrofa})$$

Proszę zwrócić uwagę, że stała $\hbar$ nie występuje we wzorze na $E(\omega)$!, zatem często przybliżenie to nazywa się przybliżeniem klasycznym.

$$E(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega$$

- W granicy wysokich częstości ($\hbar \omega \gg k_B T$) otrzymamy z kolei

$$\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1 \simeq \exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right),$$

co daje prawo promieniowania Wiena

$$E(\omega) = \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \omega^3 \exp\left(-\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right).$$

Prawo Plancka, czyli rozkład energii po długościach fal otrzymamy z

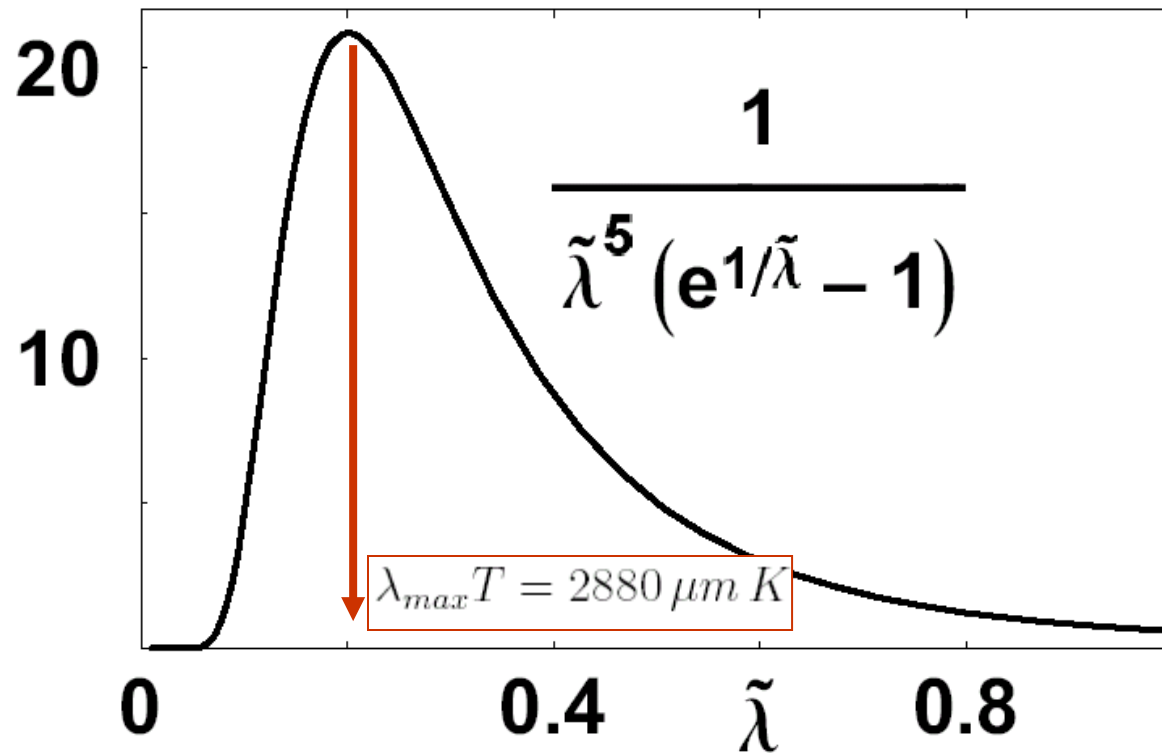
$$E(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar \omega^3}{\exp\left(\frac{\hbar \omega}{k_B T}\right) - 1} d\omega$$

zamieniając zmienne

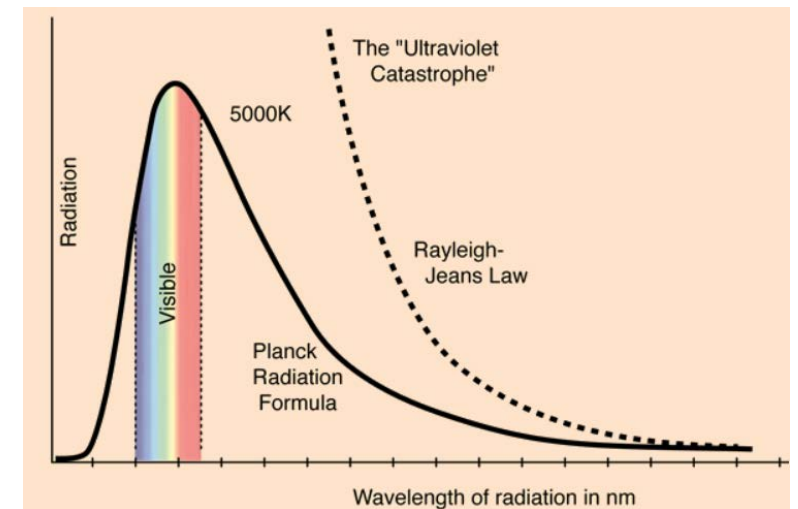
$$k \equiv |\mathbf{k}| = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \omega = ck = c \frac{2\pi}{\lambda} \quad (d\omega = \left|\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right| d\lambda)$$

$$E(\omega)d\omega = E(\lambda)d\lambda = \frac{V \hbar 16\pi^2 c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi \hbar c}{\lambda k_B T} - 1\right)} d\lambda.$$

$$E(\lambda)d\lambda = \frac{V\hbar 16\pi^2 c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda k_B T} - 1\right)} d\lambda.$$



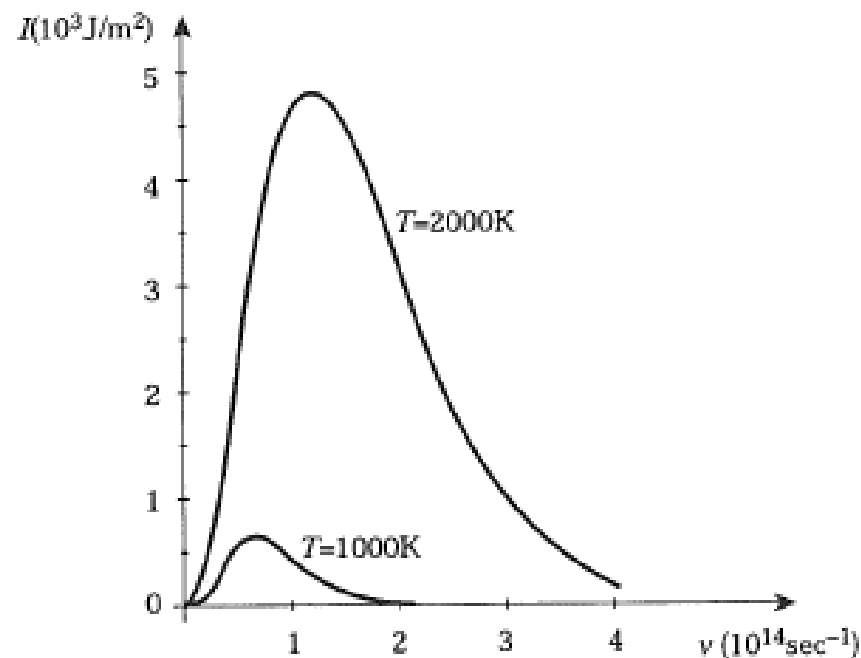
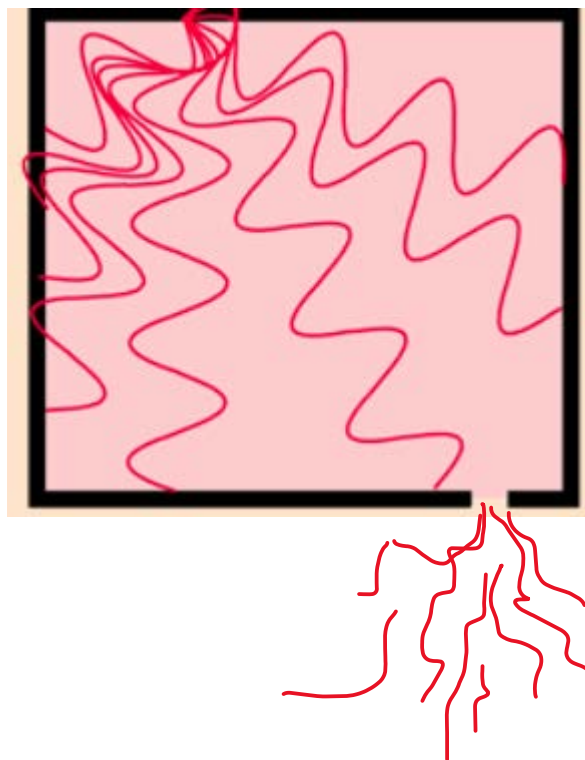
$$\tilde{\lambda} = \lambda k_B T / 2\pi \hbar c$$



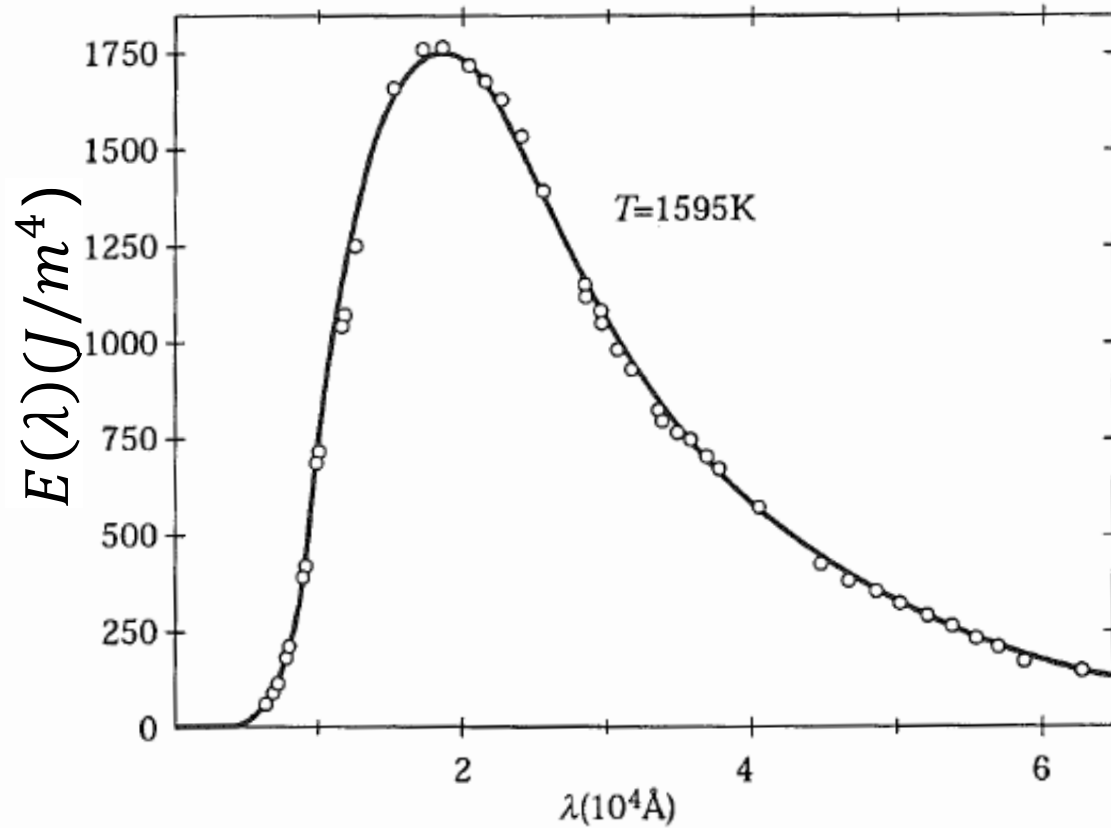
$$\tilde{E}/\tilde{T}^5 = \tilde{\lambda}^{-5}/(\exp(1/\tilde{\lambda}) - 1)$$

Aby sprawdzić doświadczalnie słuszność wzoru na gęstość promieniowania rozważa się promieniowanie emitowane przez mały otwór. Otwór musi być na tyle mały aby 'uciekające' promieniowanie nie zakłóciło równowagi termodynamicznej ciała doskonale czarnego. Można wtedy pokazać, że gęstość energii wypromieniowanej przez jednostkową powierzchnię na jednostkę częstości (emisyjność):

$$I(\omega) = \frac{c E(\omega)}{4V} = \frac{1}{4\pi^2 c^2} \frac{\hbar \omega^3}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \quad (\text{str. 15})$$



Doświadczalne potwierdzenie formuły Plancka (gęstość energii na jednostkę objętości na długość fali: Coblentz 1916)



William Coblentz



Formuła Plancka (odkryta w 1900 roku) odgrywała wielką rolę w ewolucji współczesnej fizyki. Można ją uważać za narodziny mechaniki kwantowej. Ma także liczne praktyczne zastosowania:

- *Pomiary temperatury bardzo gorących ciał (piece hutnicze, odległe obiekty w astronomii); produkcja ciepła w reaktorach – pomiary wykonywane przez samoloty zwiadowcze.*
- *Rozkłady spektralne promieniowania mierzone przez astronomów często różnią się od formuły Plancka, stanowiąc szum (tło), które można oddzielić. Zwykle promieniowanie pochodzące z gwiazd nie dopasowuje się do formuły Plancka (tzn. nie całe promieniowanie jest promieniowaniem CDCz.*
- **Kosmiczne promieniowanie tła**, odkryte przez Penziasa i Wilsona ma rozkład odpowiadający promieniowaniu ciała doskonale czarnego o temp. 2.7 K. Z tych badań wszechświat jawi się jako ogromny piekarnik, jednorodnie wypełniony promieniowaniem, którego ścianki miały temperaturę 2.7K. Te obserwacje są konsystentne z teorią wielkiego wybuchu. W 1992 roku satelita COBE znalazła małe odstępstwa, rzędu 15 μ K, od jednorodności w rozkładzie promieniowania tła ($2.7K \pm 15 \mu K$). Te fluktuacje wskazują na to, że niedługo po wielkim wybuchu zaczęły pojawiać się niejednorodności rozkładu materii w początkowo jednorodnym wszechświecie.
- **Niestabilność czarnych dziur.** Na poziomie klasycznym czarna dziura stanowi idealną pułapkę (o promieniu $r = \frac{2GM}{c^2}$) dla promieniowania. Jednak, jak pokazał Hawking, uwzględnienie efektów kwantowych sprawia, że czarna dziura nie jest czarniejsza niż ciało doskonale czarne. Emituje mianowicie promieniowanie, którego gęstość ma rozkład Plancka o temperaturze $T = \frac{hc^3}{16 \pi^2 k_B GM}$. Dla czarnej dziury o masie 5 x masa słońca ta temperatura jest rzędu $10^{-8}K$, a więc marginalnie mała (ale niezerowa). Wraz z postępującą emisją T rośnie aż, w końcu, czarna dziura znika.

Ciśnienie, entropia, ciepło właściwe

$$F = -\frac{V \pi^2 k_B^4 T^4}{45 c^3 \hbar^3},$$

- ciśnienie

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V}_T = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{45 (\hbar c)^3} \simeq 2.523 \times 10^{-15} T^4$$

– ciśnienie promieniowania jest zanedbywalnie małe, z wyjątkiem ekstremalnych temperatur;

– p jest niezależne od objętości, zatem izotermy w płaszczyźnie $p - V$ są liniami prostymi. Takie izotermy można rozumieć jako współlistnienie stanu próżni (stanu bez fotonów) z gazem fotonów. Zwiększanie ciśnienia (zmniejszanie objętości) powoduje, że fotony przechodzą do stanu podstawowego, gdzie anihilują.

$$F = -\frac{V \pi^2 k_B^4 T^4}{45 c^3 \hbar^3}, \quad U = V a T^4 \quad a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3}$$

- Entropia, ciepło właściwe

$$S = \frac{F - U}{T} = \frac{4 \pi^2 V k_B (k_B T)^3}{45 (\hbar c)^3}$$

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T} \sim T^3$$

W granicy niskich temperatur ($T \rightarrow 0$), ciśnienie, entropia, ciepło właściwe znikają. Układ jest wtedy w stanie podstawowym, charakteryzującym się kompletnym brakiem fotonów. Odpowiada to stanowi próżni, który jest tylko jeden (stąd entropia = 0).

Promieniowanie elektromagnetyczne odpowiadające gazowi fotonowemu nazywa się także pr. cieplnym.

Związek między ciśnieniem, objętością i energią:

$$U = F - TS = F - T \frac{\partial F}{\partial T} = \frac{\partial(\beta F)}{\partial \beta} = V a T^4,$$

gdzie

$$a = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 c^3 \hbar^3} = 7.569 \times 10^{-15} \text{erg cm}^{-3} \text{ deg}^{-4}.$$

• ciśnienie

$$p = -\frac{\partial F}{\partial V_T} = \frac{\pi^2 (k_B T)^4}{45 (\hbar c)^3} \simeq 2.523 \times 10^{-15} T^4$$



$$pV = \frac{1}{3} U$$

koniec