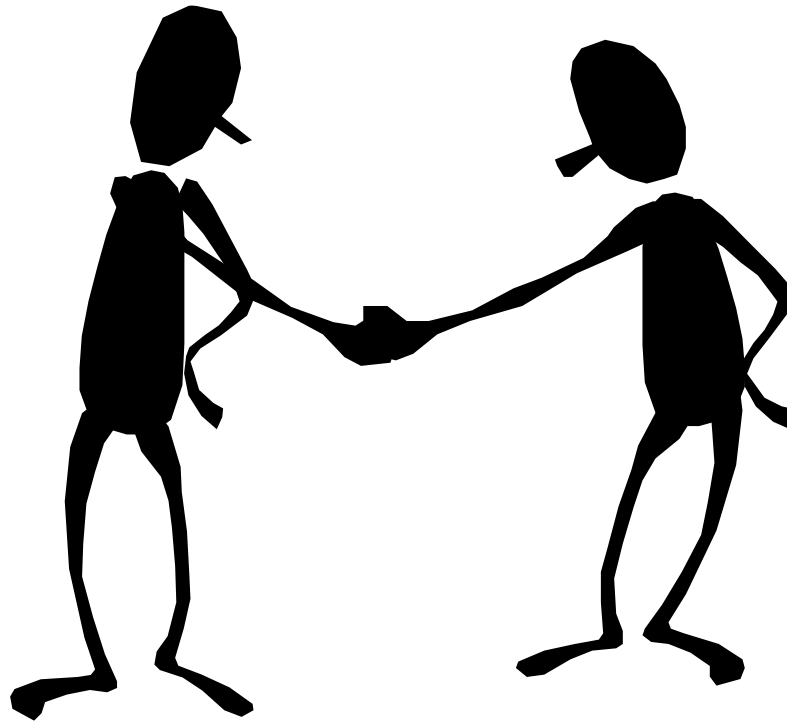


WYKŁAD 22:

Fizyka statystyczna układów z oddziaływaniami:
ściśle wyniki i przybliżenia



- Model Isinga i inne modele sieciowe.
- Ścisła fizyka statystyczna dla modelu Isinga: przypadek jednowymiarowy oraz dyskusja rozwiązania Onsagera dla przypadku dwuwymiarowego.
- Rachunki przybliżone: Twierdzenie Bogoliubova-Hellmana-Feynmana.
- Przykład zastosowań: średnie pole dla modelu Isinga.

Rachunki dla konkretnych oddziaływań

Praktycznie nie ma ścisłych wyników dla układów trójwymiarowych.

- *Układy jednowymiarowe, klasyczne, posiadają ścisłe rozwiązania (tzn. wyliczenie sumy statystycznej w granicy termodynamicznej redukuje się do wyliczenia skończenie-wymiarowych całek (ew. szukania wartości- i wektorów własnych równań całkowych liniowych bądź macierzowych równań własnych)).*
- *Rozwiązanie (nietrywialne) istnieje dla prostych, dwuwymiarowych modeli sieciowych, których przedstawicielem jest model Isinga.*

Model Isinga (i inne modele sieciowe)

Ogólny model magnetyka (Model Heisenberga):

$$\hat{H} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j - g \mu_B H \sum_i \hat{s}_{i,z}$$

g – czynnik (żyromagnetyczny) Landégo ;

$$\mu_B = \frac{e \hbar}{2 m c} \quad - \text{magneton Bohra}$$

J_{ij} – tzw. całka wymiany: potencjał oddziaływania zależy od odległości $|r_i - r_j|$

$J_{ij} = J_{ji}$; $J > 0 \rightarrow$ oddziaływanie ferromagnetyczne
 $J < 0 \rightarrow$ oddziaływanie antyferromagnetyczne

$$\hat{H} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j - g \mu_B H \sum_i \hat{s}_{i,z}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \hat{s}_{i,x} \hat{s}_{j,x} + \hat{s}_{i,y} \hat{s}_{j,y} + \hat{s}_{i,z} \hat{s}_{j,z}$$

Jeśli $|s| = 1/2$, to $g = 2$ oraz $\hat{s}_{i,x}$, $\hat{s}_{i,y}$, $\hat{s}_{i,z}$ – macierze Pauliego

$$\hat{s}_{i,x} = \frac{1}{2} (\sigma_x)_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_i; \quad \hat{s}_{i,y} = \frac{1}{2} (\sigma_y)_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_i$$

$$\hat{s}_{i,z} = \frac{1}{2} (\sigma_z)_i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_i$$

$$\hat{H} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j - g \mu_B H \sum_i \hat{s}_{i,z}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \hat{s}_{i,x} \hat{s}_{j,x} + \hat{s}_{i,y} \hat{s}_{j,y} + \hat{s}_{i,z} \hat{s}_{j,z}$$

Model Heisenberga nie posiada ścisłych rozwiązań.

Szczególne przypadki:

**Model xy: zaniedbujemy składową z;
ma ścisłe rozwiązania dla pewnych przypadków;**

$$\hat{H} = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} \hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j - g \mu_B H \sum_i \hat{s}_{i,z}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_i \cdot \hat{\mathbf{s}}_j = \hat{s}_{i,x} \hat{s}_{j,x} + \hat{s}_{i,y} \hat{s}_{j,y} + \hat{s}_{i,z} \hat{s}_{j,z}$$

Model Isinga:

Zaniedbujemy składowe x,y

$\hat{H}$ można zdiagonalizować:

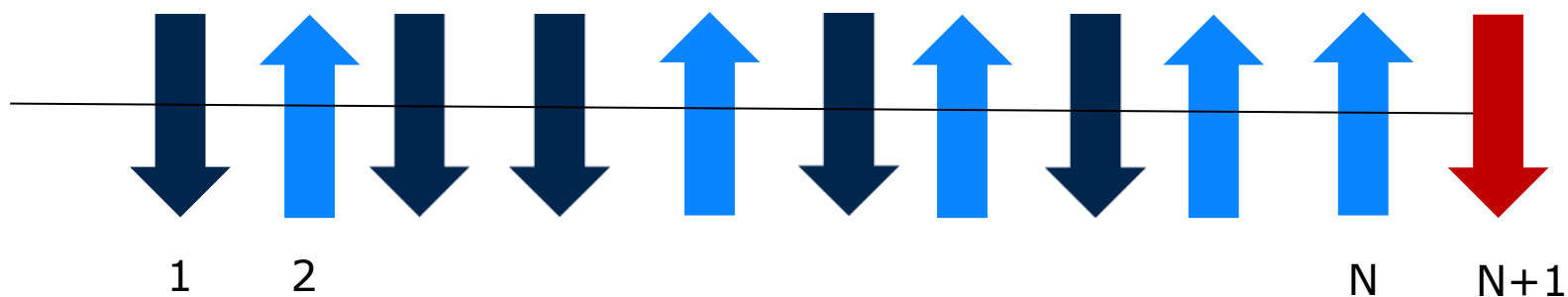
$$H \equiv E = - \sum_{\{i,j\}} J_{ij} s_{i,z} s_{j,z} - g \mu_B H \sum_i s_{i,z}; \quad s_{i,z} = \pm 1$$

(w tym przypadku model jest równoważny modelom sieciowym; opisuje stopy i silnie anizotropowe magnetyki);

**Model jest ściśle rozwiązywalny w 1d;
z oddziaływaniami ograniczonymi do najbliższych sąsiadów
ma także rozwiązanie w 2d.**

Przypadek jednowymiarowy z oddz. Najbliższych sąsiadów: (E. Ising, Z. Phys. 31, 253 (1925))

$$\mathbf{E} = - \sum_{i=1}^N J s_i s_{i+1} - m H \sum_{i=1}^N s_i; \quad s_i = \pm 1$$



Periodyczne warunki brzegowe: $1 \equiv N+1$

Stan podstawowy:

$J > 0$, dowolne h : ferro

$$h = \frac{mH}{J}$$

$J < 0$, $|h| < 2$: anty-ferro
 $|h| > 2$: ferro

$$E[\{j\}] \equiv E[\{s_j\}] = - \sum_{i=1}^N J s_i s_{i+1} - m H \sum_{i=1}^N s_i; \quad s_i = \pm 1$$

Przypadek $J=0$:

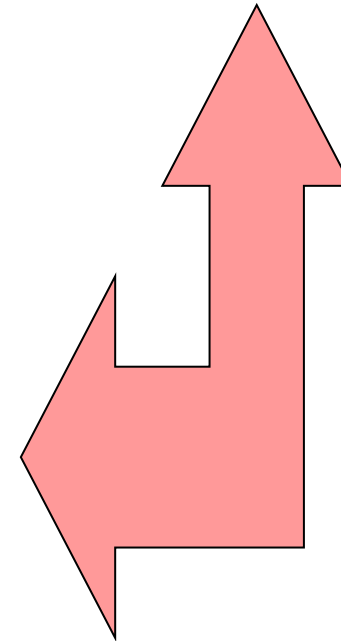
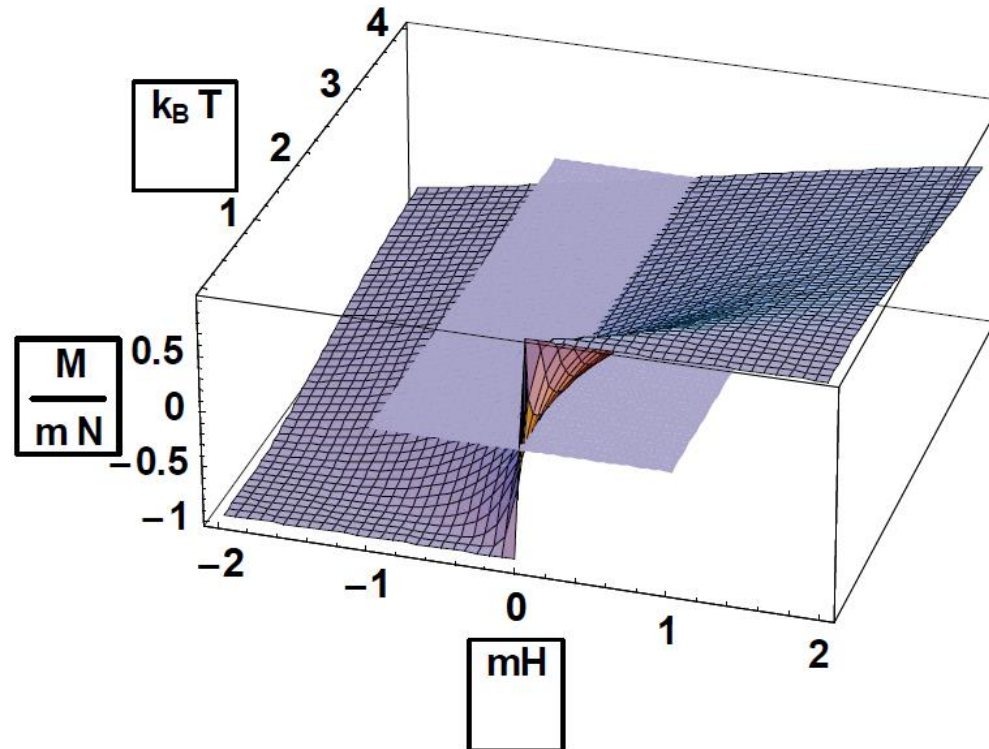
$$E[\{s_j\}] = - m H \sum_{i=1}^N s_i; \quad s_i = \pm 1$$

$$Z = \sum_{\{j\}} e^{-\beta E[\{j\}]} = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\frac{mH}{k_B T} \sum_{i=1}^N s_i} = \left[2 \sinh\left(\frac{mH}{k_B T}\right) \right]^N$$

$$f = - k_B T \ln \left[2 \cosh\left(\frac{Hm}{k_B T}\right) \right]; \quad \frac{M}{N} = - \frac{\partial f}{\partial H} = m \tanh\left(\frac{Hm}{k_B T}\right)$$

J=0: Model dwustanowy (w tym przypadku model paramagnetyka):

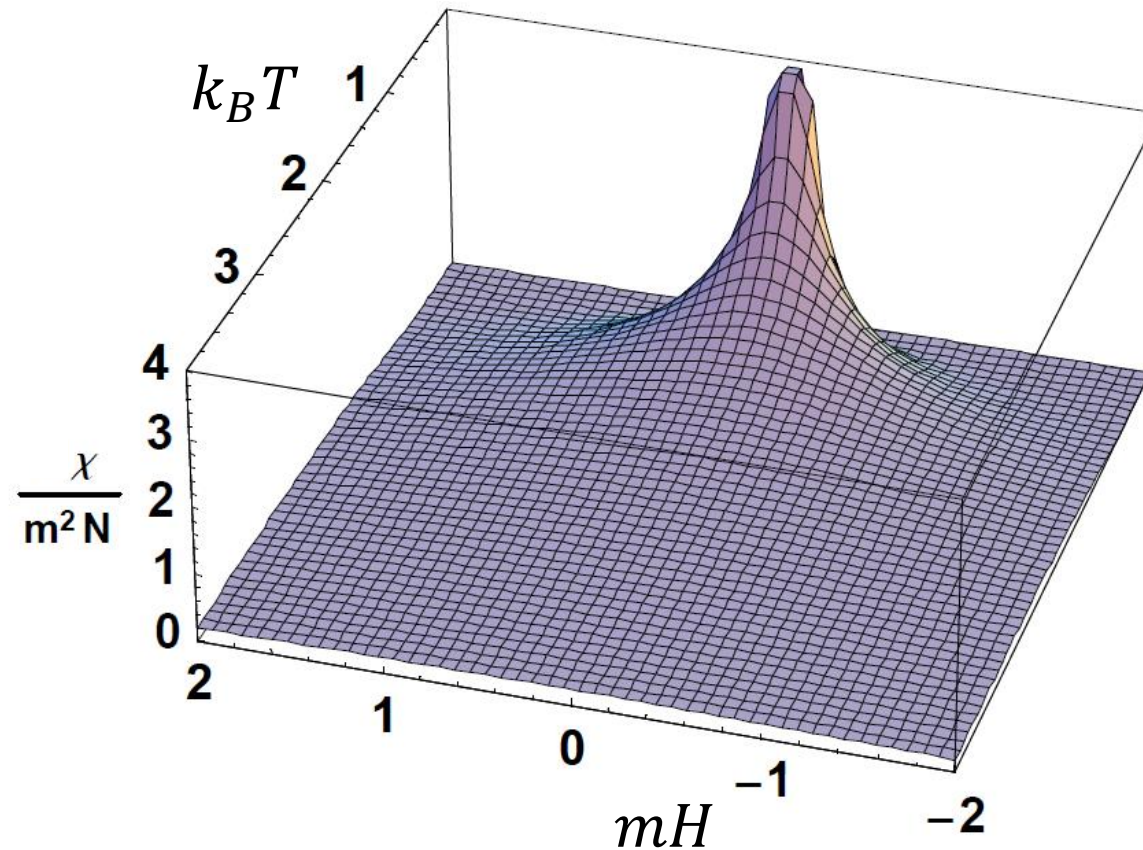
$$f = -k_B T \ln \left[2 \cosh \left(\frac{H m}{k_B T} \right) \right]; \quad \frac{M}{N} = -\frac{\partial f}{\partial H} = m \tanh \left(\frac{H m}{k_B T} \right)$$



$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{m^2 N}{k_B T \cosh^2 \left(\frac{Hm}{k_B T} \right)}$$

$$\sim \frac{1}{T} \quad (H=0)$$

**Prawo
Curie**



Przypadek $J \neq 0$:

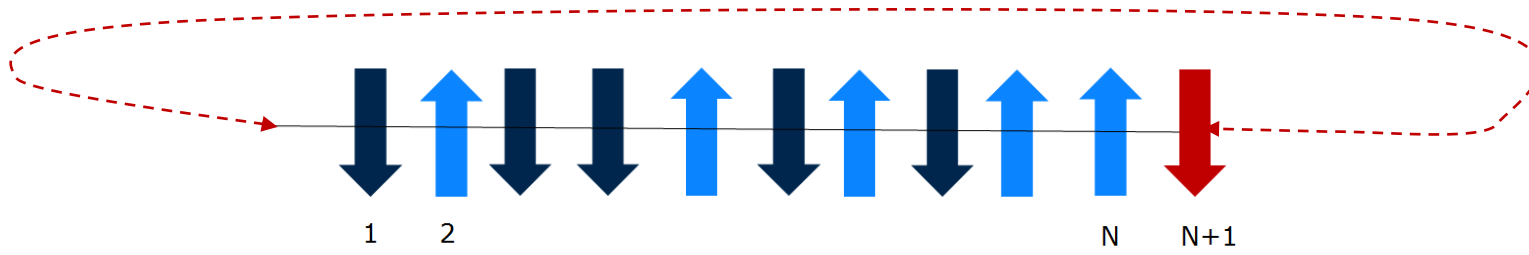
$$E[\{j\}] \equiv E[\{s_j\}] = - \sum_{i=1}^N J s_i s_{i+1} - m H \sum_{i=1}^N s_i; \quad s_i = \pm 1$$

$$Z = \sum_{\{j\}} e^{-\beta E[\{j\}]} = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} e^{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^N s_i s_{i+1} + \frac{h}{t} \sum_{i=1}^N s_i}$$

$$t = k_B T / J; \quad h = \frac{mH}{J}; \quad 1 \equiv N+1$$

$$\tau := -t$$

$$K(s_i, s_j) = e^{\frac{1}{t} s_i s_j + \frac{h}{2t} (s_i + s_j)}$$



$$K(s_i, s_j) = e^{\frac{1}{t} s_i s_j + \frac{h}{2t} (s_i + s_j)}$$

$$Z = \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} K(s_1, s_2) K(s_2, s_3) K(s_3, s_4) \dots K(s_{N-1}, s_N) K(s_N, s_1)$$

$$K(s_i, s_{i+1}) = \begin{matrix} s_i = +1 & \frac{s_{i+1}=+1}{e^{\frac{h+1}{t}} e^{-\frac{1}{t}}} \\ s_i = -1 & \frac{s_{i+1}=-1}{e^{-\frac{1}{t}} e^{-\frac{h+1}{t}}} \end{matrix}$$

$$= \sum_{s_1=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \dots \sum_{s_N=\pm 1} \begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{-\frac{h+1}{t}} \end{pmatrix}_{s_1 s_2} \begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{-\frac{h+1}{t}} \end{pmatrix}_{s_2 s_3} \dots \begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{-\frac{h+1}{t}} \end{pmatrix}_{s_{N-1} s_N} \begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{-\frac{h+1}{t}} \end{pmatrix}_{s_N s_1}$$

$$Z = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{-\frac{h+1}{t}} \end{pmatrix}^N \right]$$

$$\mathbf{Z} = \lambda_+^N \left[\mathbf{1} + (\lambda_- / \lambda_+)^N \right]$$

λ_α : wartości własne macierzy :

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{h+1}{t}} & e^{-\frac{1}{t}} \\ e^{-\frac{1}{t}} & e^{\frac{-h+1}{t}} \end{pmatrix}$$

$$Z = \lambda_+^N [1 + (\lambda_- / \lambda_+)^N]$$

gdzie

$$\lambda_{\pm} = e^{\frac{1}{t}} \cosh\left(\frac{h}{t}\right) \pm \sqrt{e^{\frac{2}{t}} \sinh^2\left(\frac{h}{t}\right) + e^{-\frac{2}{t}}}$$

i dla dużych N mamy:

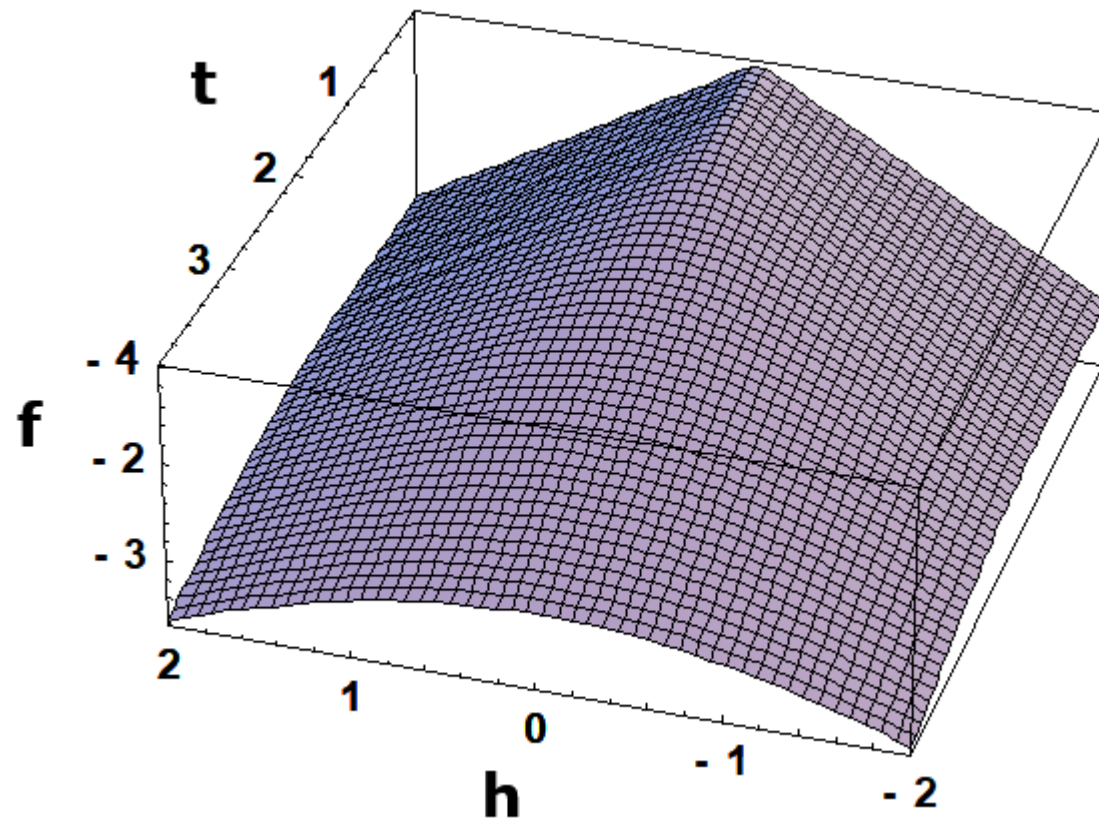
$$F \simeq -k_B T N \ln(\lambda_+)$$

lub

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{F}{NJ} = -t \ln(\lambda_+)$$

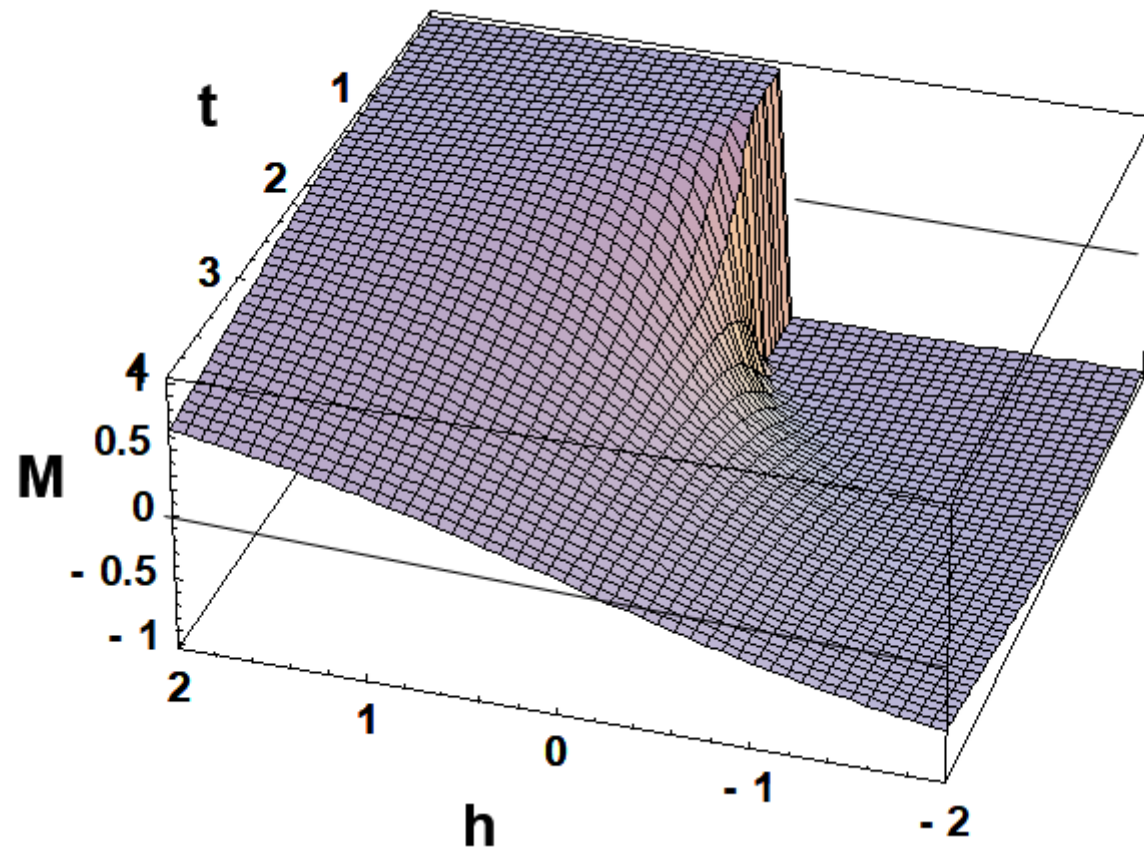
Uwaga: $\lambda_+ = \lambda_-$ gdy jednocześnie $t \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$

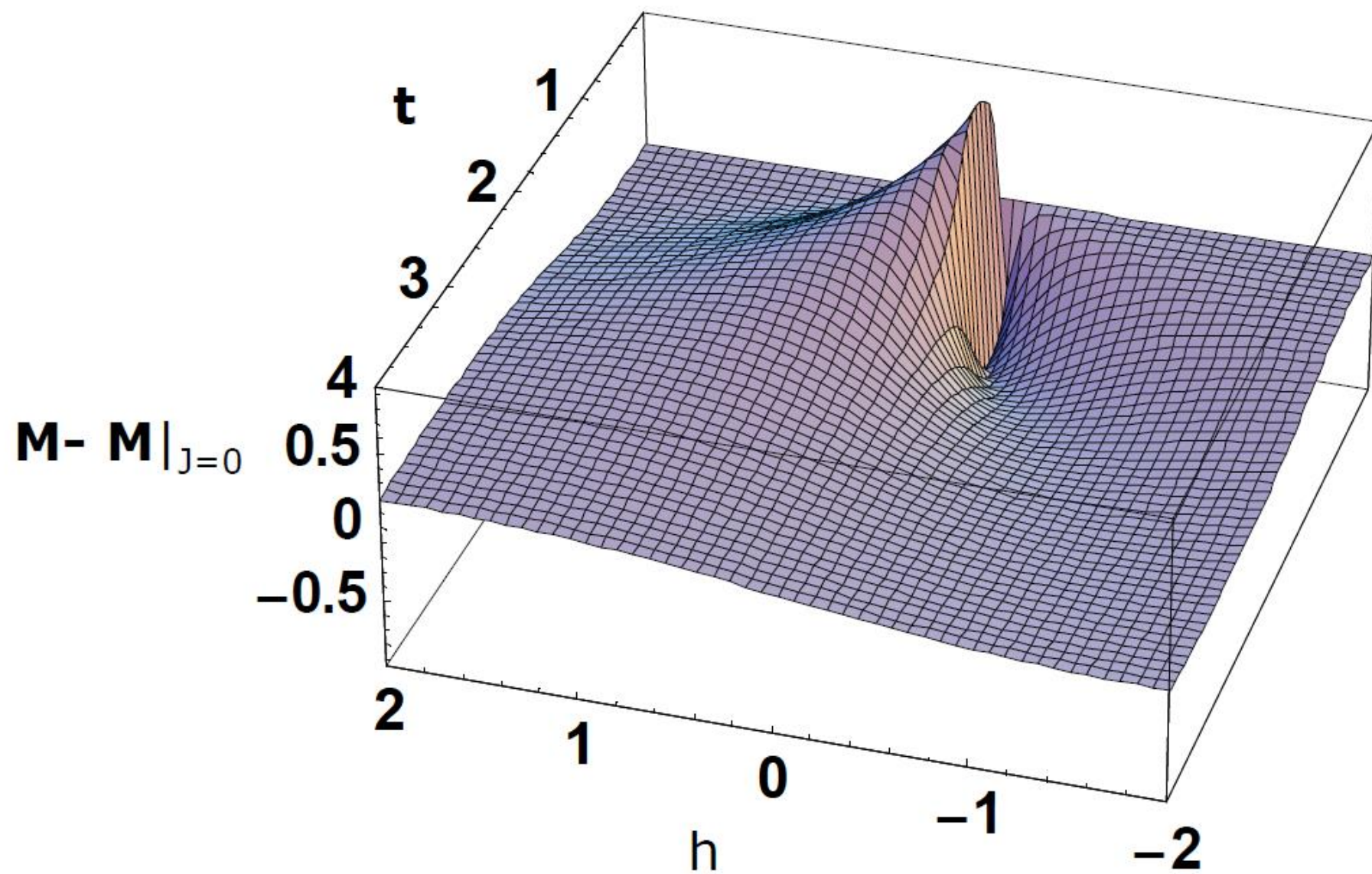
$$f = -t \ln \left(e^{\frac{1}{t}} \cosh \left(\frac{h}{t} \right) + \sqrt{e^{\frac{2}{t}} \sinh^2 \left(\frac{h}{t} \right) + e^{-\frac{2}{t}}} \right)$$

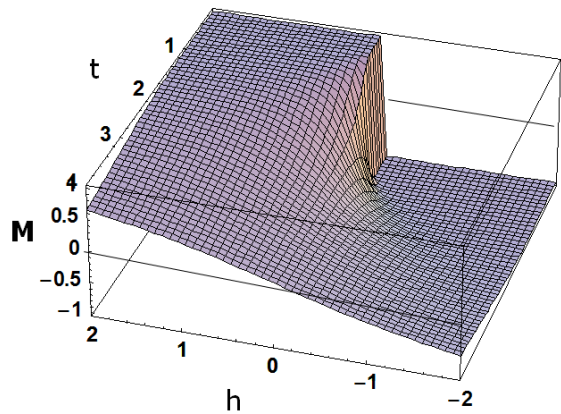


$J > 0$: ferro

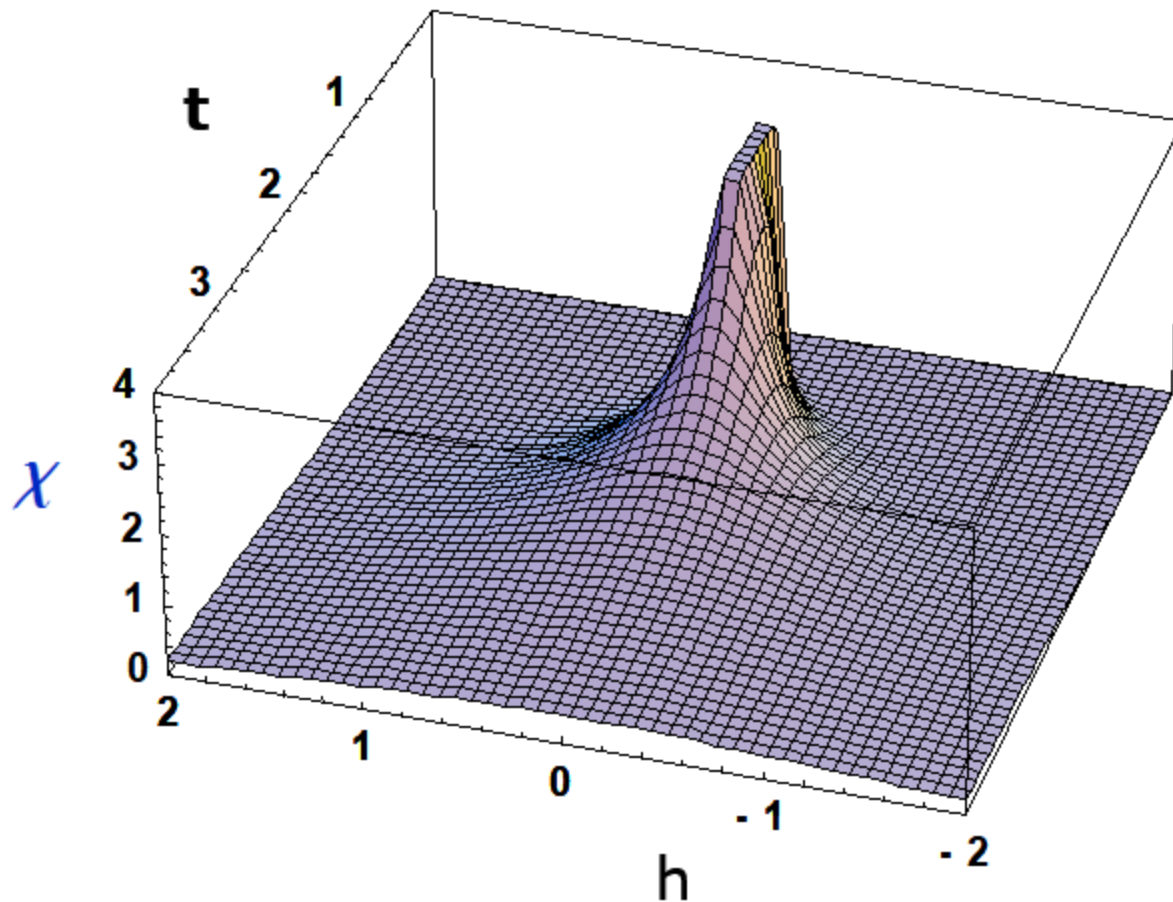
$$M = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\sinh\left(\frac{h}{t}\right)}{\sqrt{e^{-\frac{4}{t}} + \sinh\left(\frac{h}{t}\right)^2}}$$





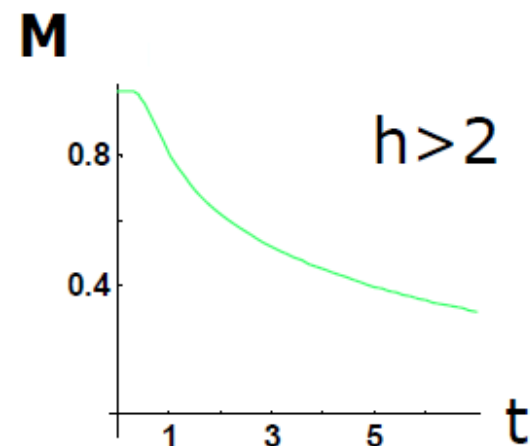
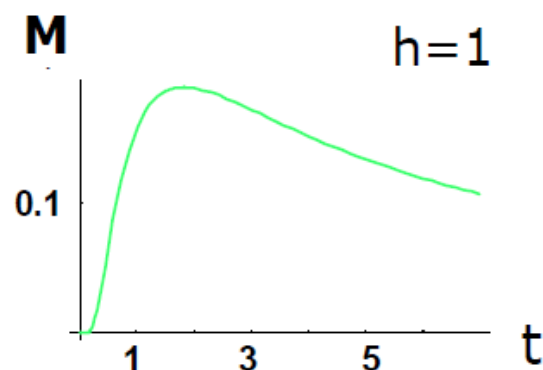
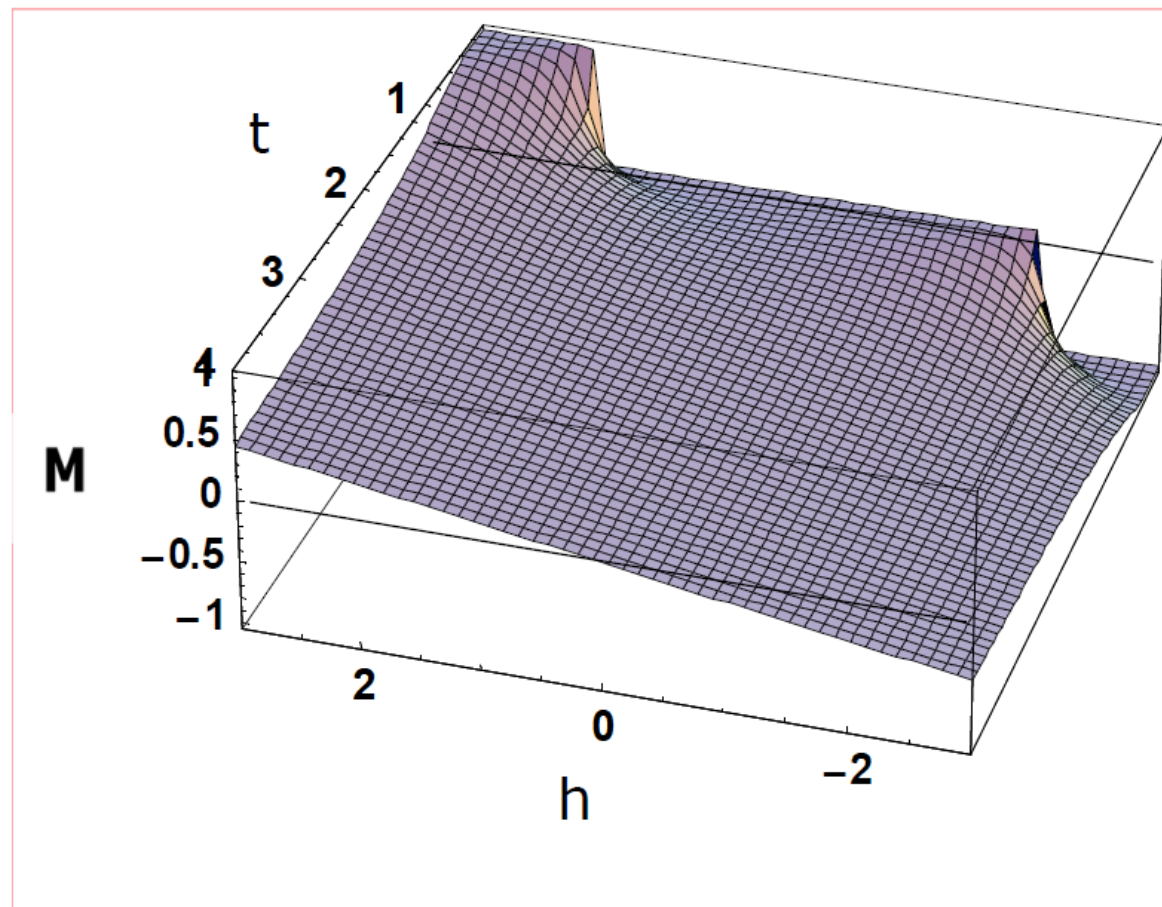


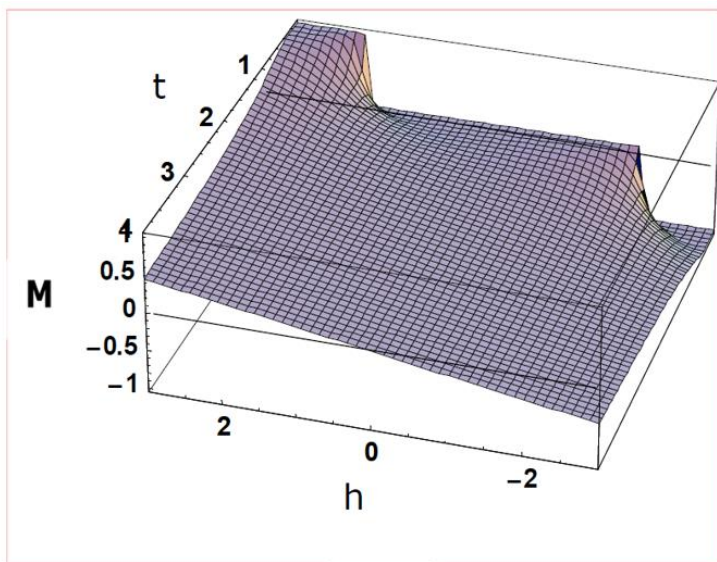
$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{e^{\frac{2}{t}} \text{Cosh}\left[\frac{h}{t}\right]}{t \left(1 + e^{\frac{4}{t}} \text{Sinh}\left[\frac{h}{t}\right]^2\right)^{3/2}}$$



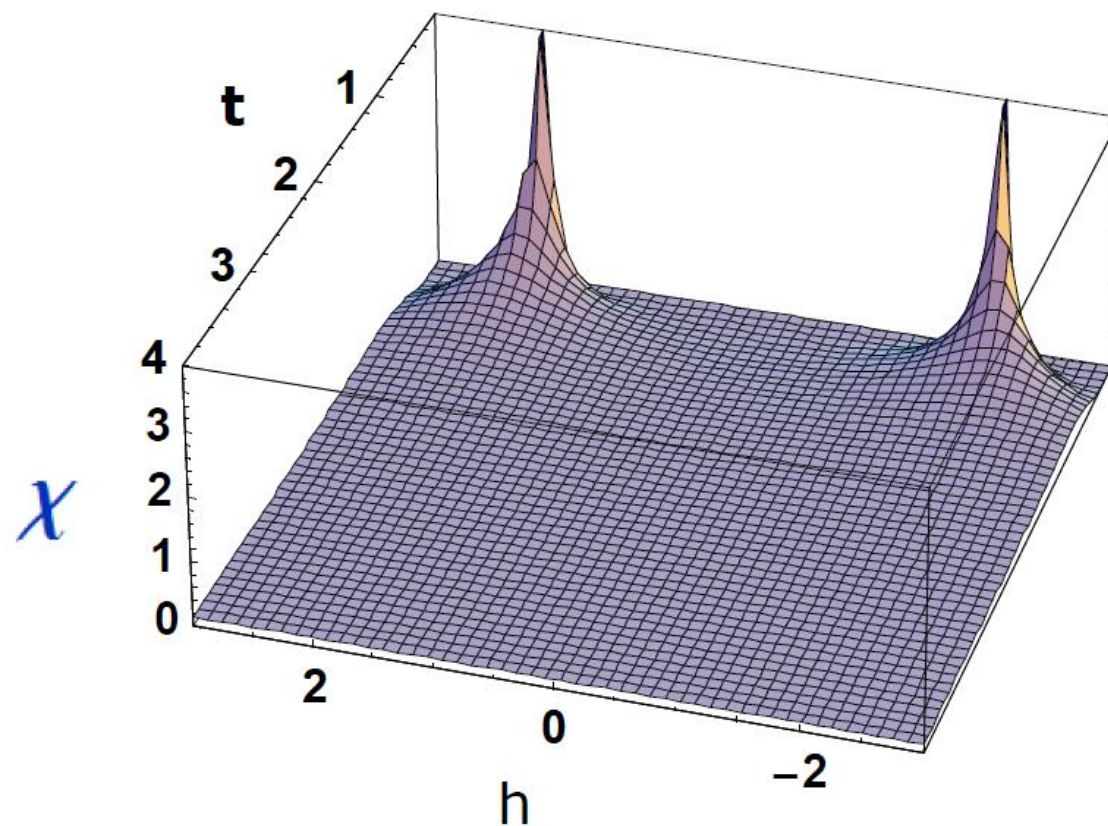
$J < 0$: anty-ferro;

$$M = -\frac{\partial f}{\partial h} = \frac{\sinh\left(\frac{h}{t}\right)}{\sqrt{e^{\frac{4}{t}} + \sinh\left(\frac{h}{t}\right)^2}}$$





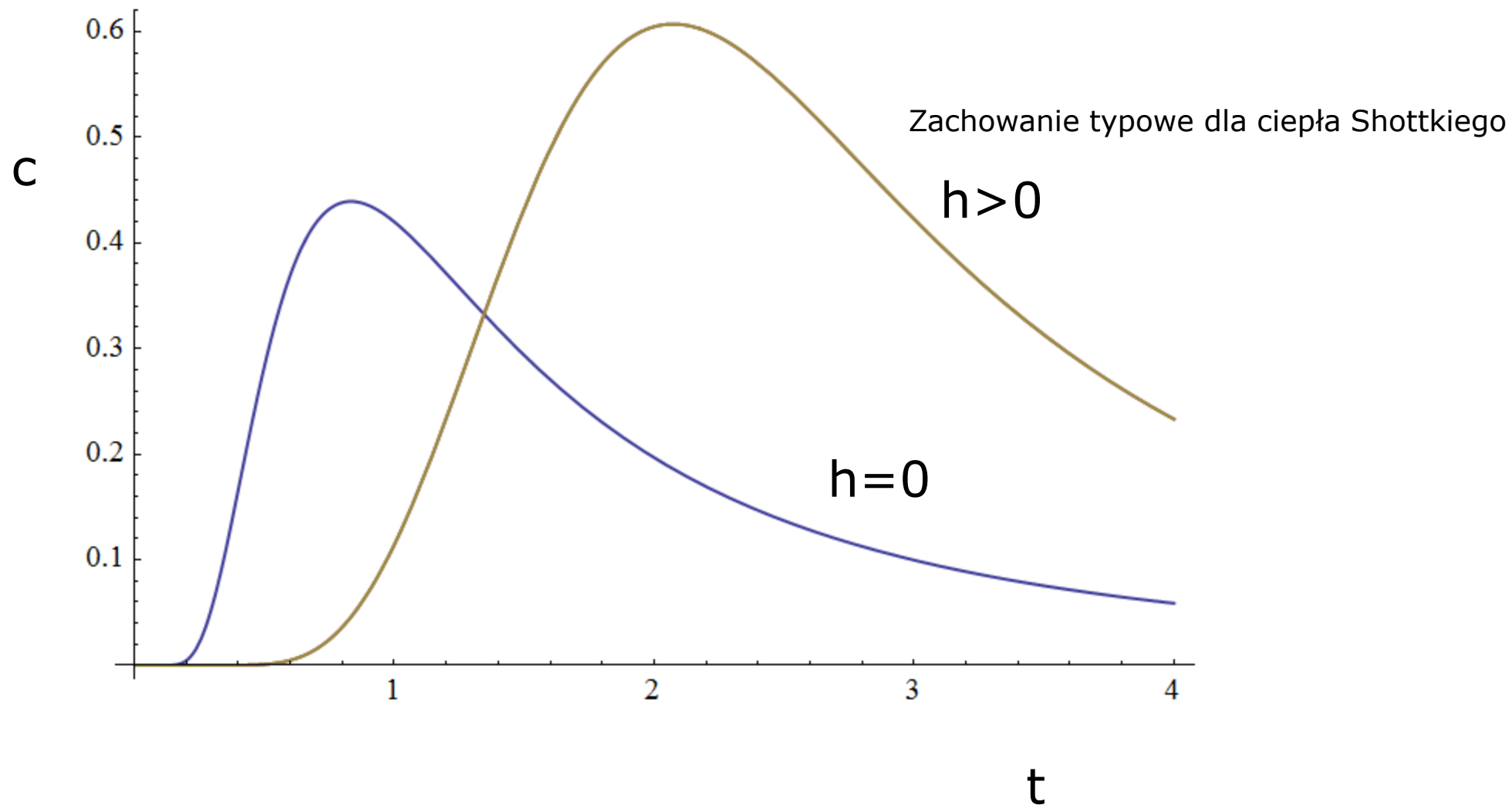
$$\chi = \frac{\partial M}{\partial h} = \frac{e^{-\frac{2}{t}} \text{Cosh}\left[\frac{h}{t}\right]}{t \left(1 + e^{-\frac{4}{t}} \text{Sinh}\left[\frac{h}{t}\right]^2\right)^{3/2}}$$



$$J > 0$$

Ciepło właściwe: $c_h = \frac{\partial u}{\partial t}$

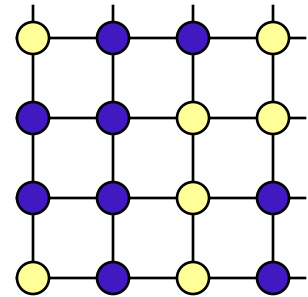
$$u = f - t \frac{\partial f}{\partial t}$$



Przypadek dwuwymiarowy z oddz. najbliższych sąsiadów, bez zewnętrznego pola, sieć kwadratowa:

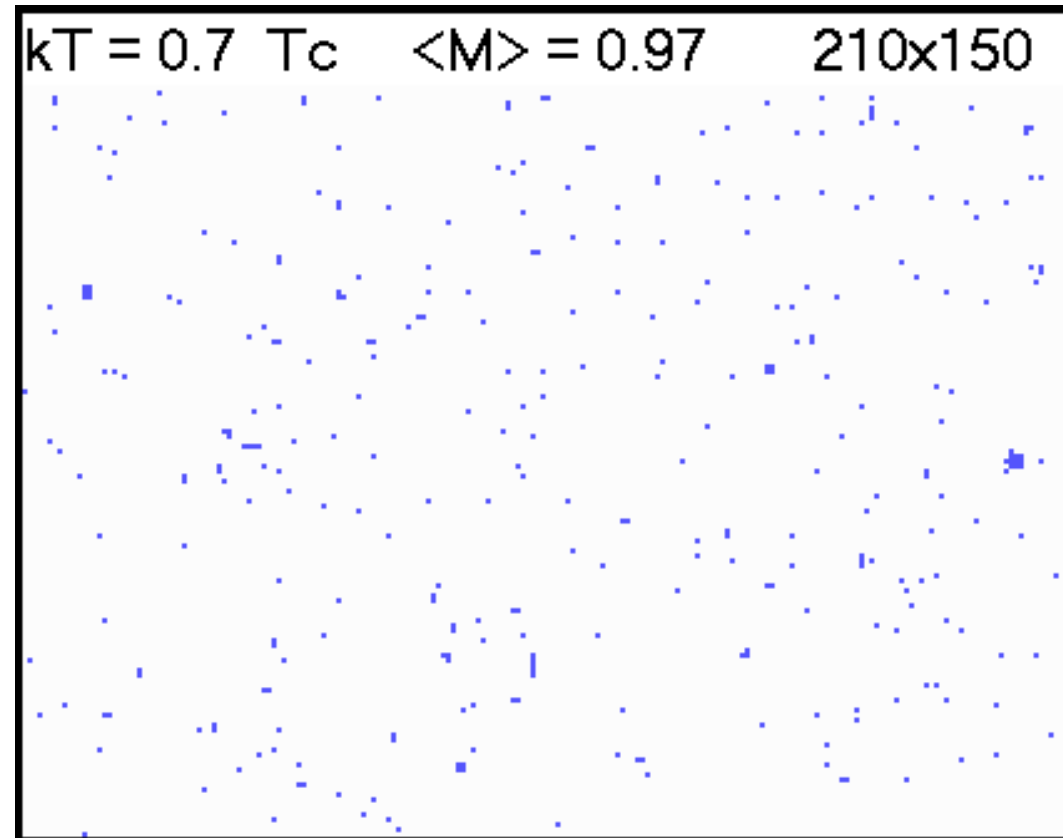
L. Onsager, 1944

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j; \quad s = \pm 1$$



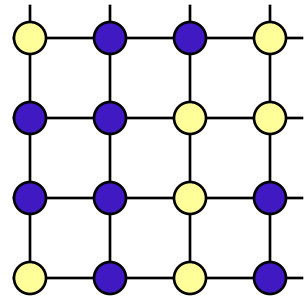
● ↓ (s = +1)

● ↑ (s = -1)



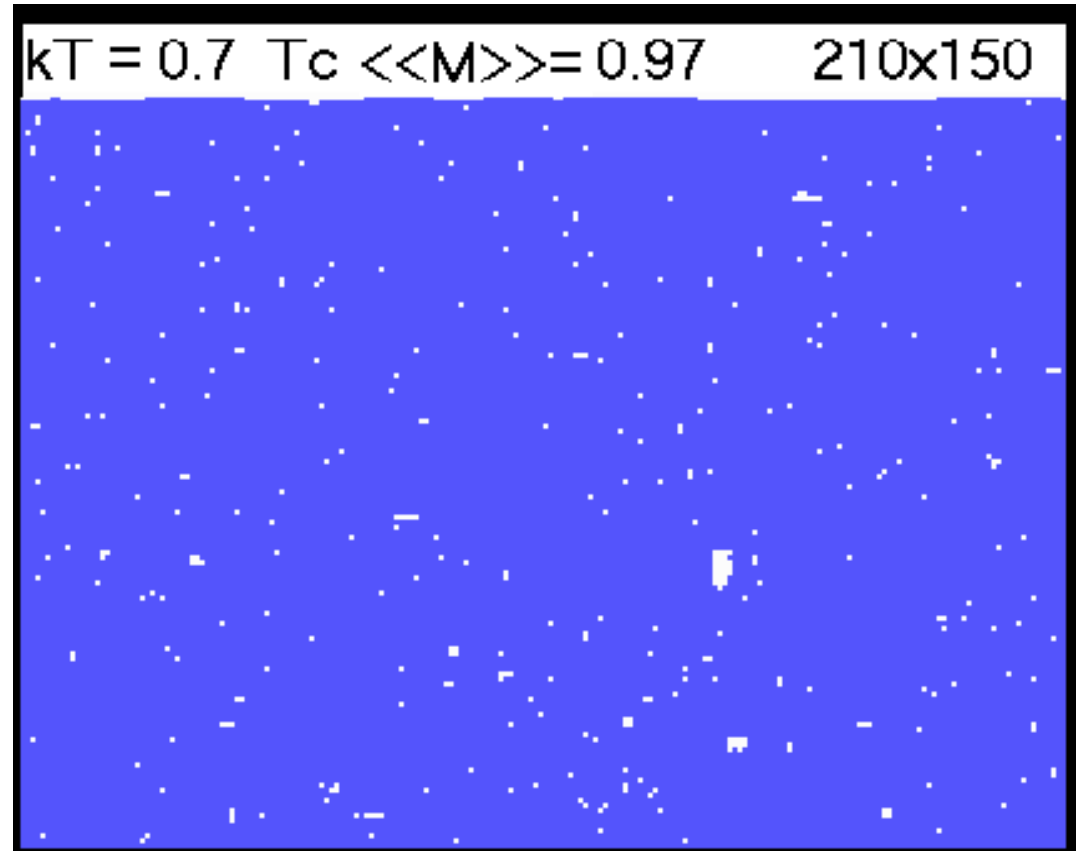
Model Isinga: (2d)

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j; \quad s = \pm 1$$

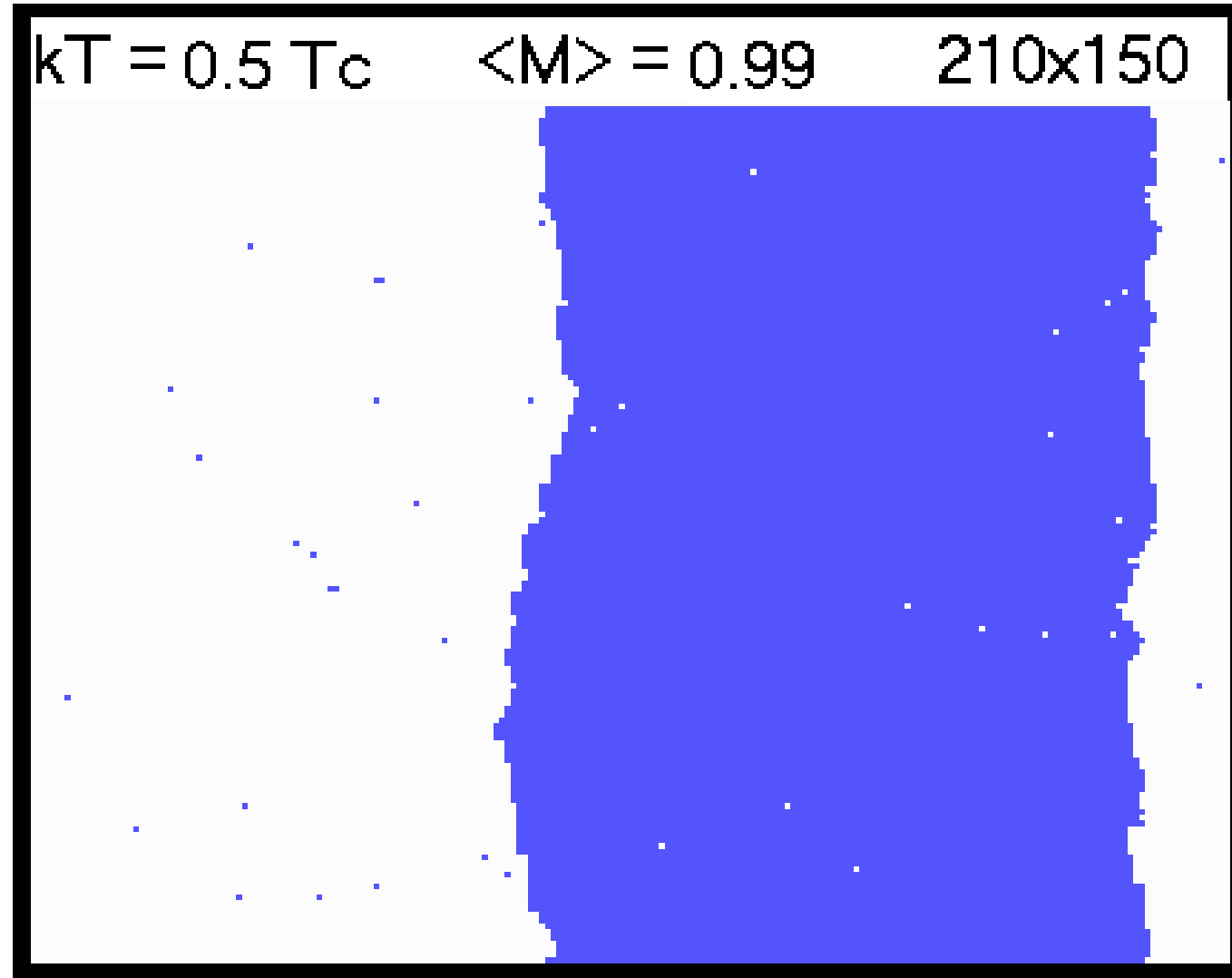


● ↓ (s = +1)

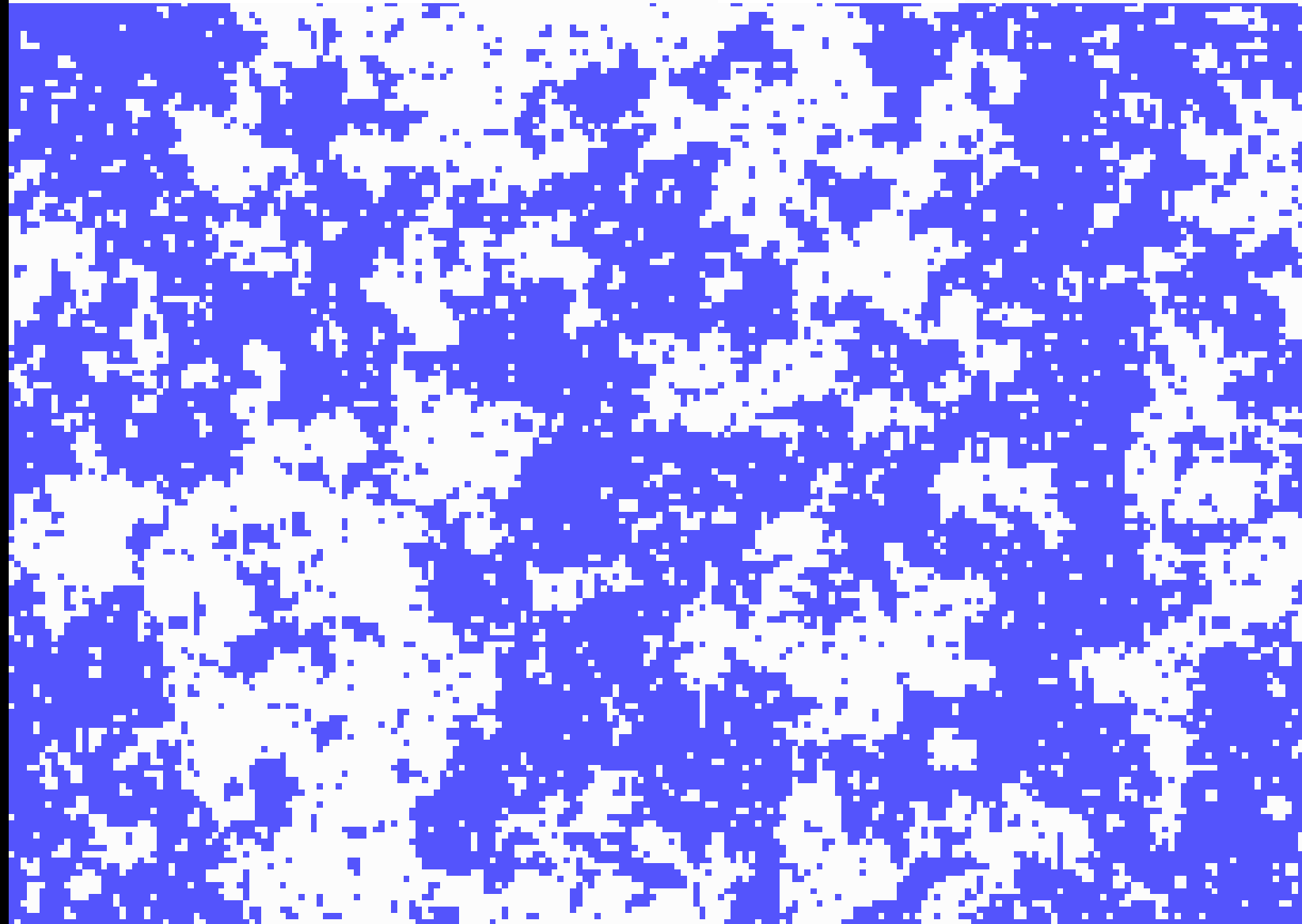
● ↑ (s = -1)



model Isinga: $\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j;$ $s = \pm 1$
(2d)



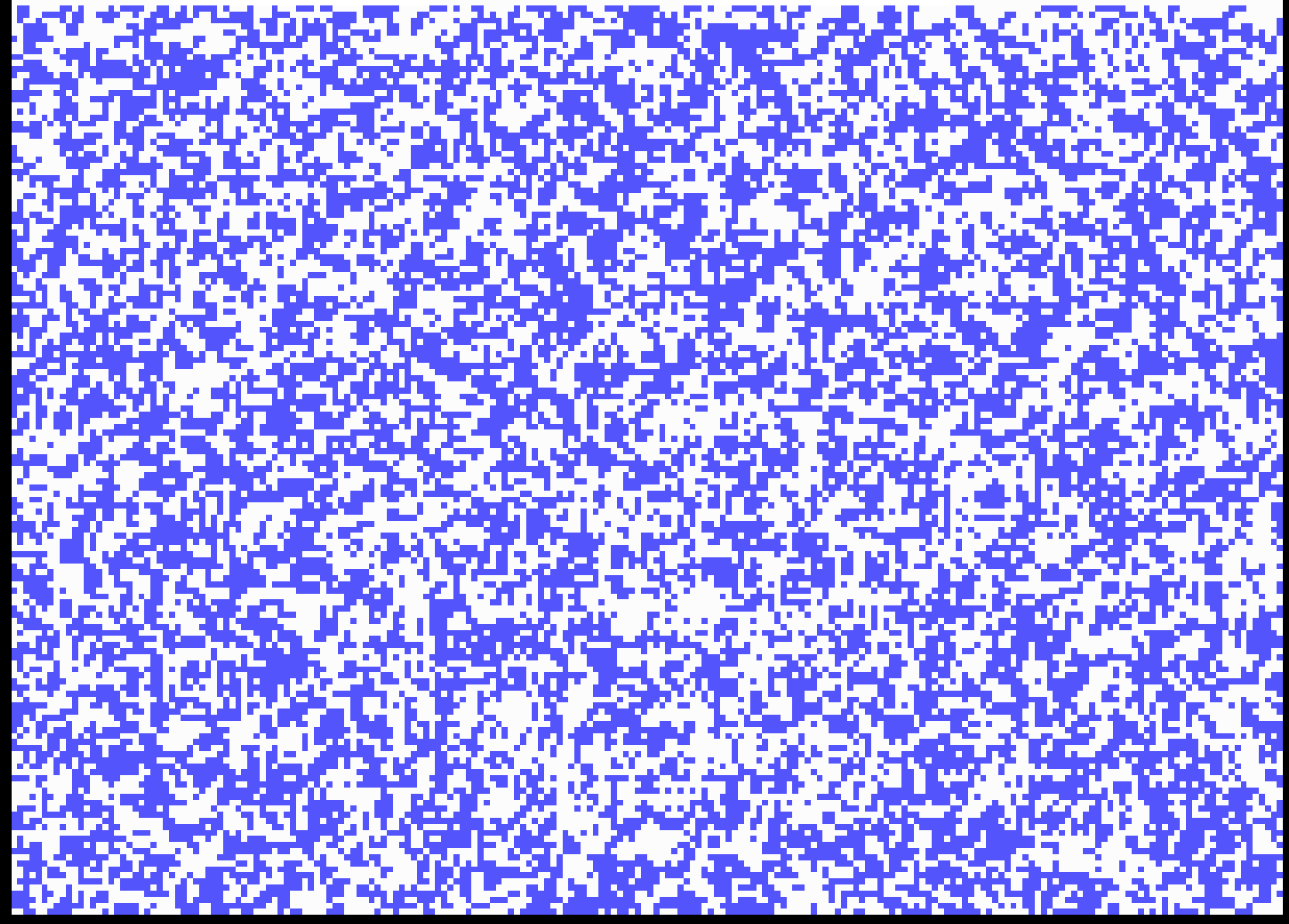
$kT = 1.01T_c$ $\langle M \rangle = 0.03$ 210x150



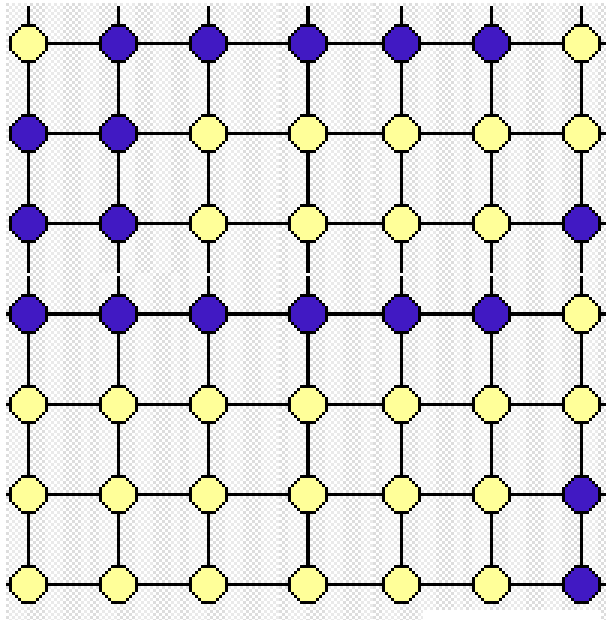
$$kT = 2.0T_c$$

$$\langle M \rangle = 0.03$$

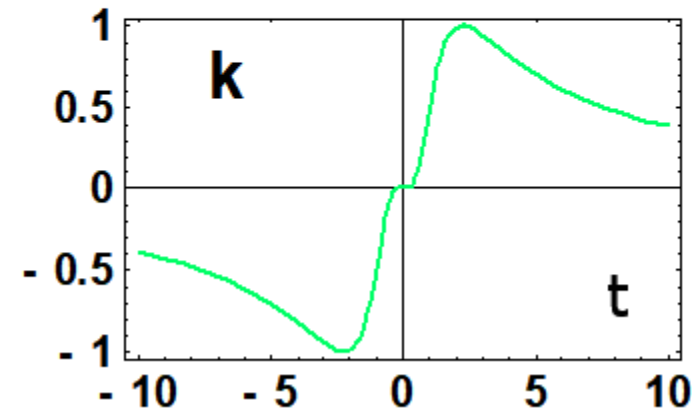
210x150



$$f = -t \ln \left(2 \cosh \left(\frac{1}{t} \right) \right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\phi)} \right) \right] d\phi$$



$$\kappa = \frac{2 \sinh \left(\frac{2}{t} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{2}{t} \right)}$$

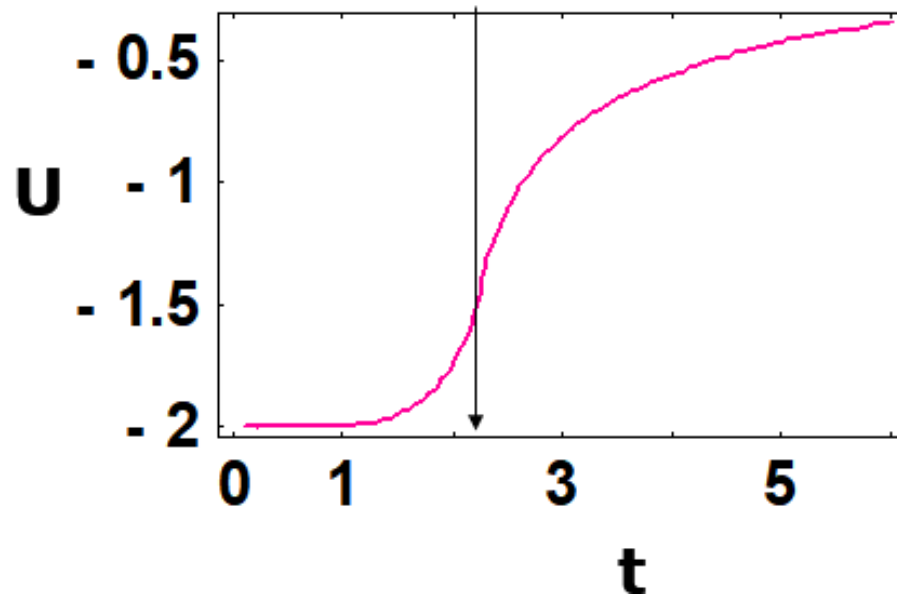


$$t_c = \frac{1}{\text{ArcCosh} \left[\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}} \right]} \approx 2.2692$$

$$f = -t \ln \left(2 \cosh \left(\frac{1}{t} \right) \right) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \left[\frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2(\phi)} \right) \right] d\phi$$

$$\kappa = \frac{2 \sinh \left(\frac{2}{t} \right)}{\cosh^2 \left(\frac{2}{t} \right)}$$

$$U = \frac{\partial(f/t)}{\partial(1/t)} = -2 \tanh \left(\frac{2}{t} \right) - \frac{\kappa'[(1/t)]}{2\kappa} + \frac{\kappa'[(1/t)] \operatorname{EllipticK}[\kappa^2]}{\pi \kappa}$$



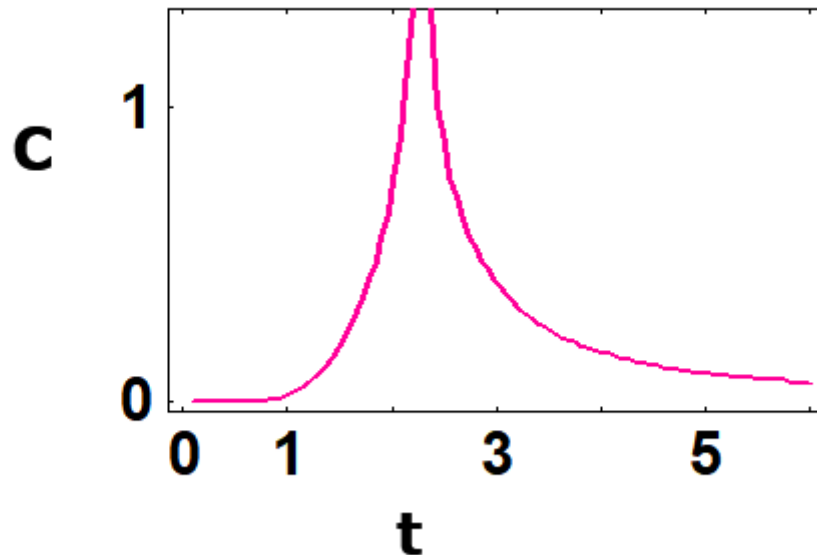
$$\operatorname{EllipticK}[m] =$$

$$\int_0^{\pi/2} [1 - m \sin^2(\theta)]^{-1/2} d\theta$$

całka eliptyczna zupełna
I- szego rodzaju

Ciepło właściwe:

(zależy od całek eliptycznych zupełnych I-szego i II rodzaju; wzór można znaleźć np. w podręczniku Kersona Huanga)

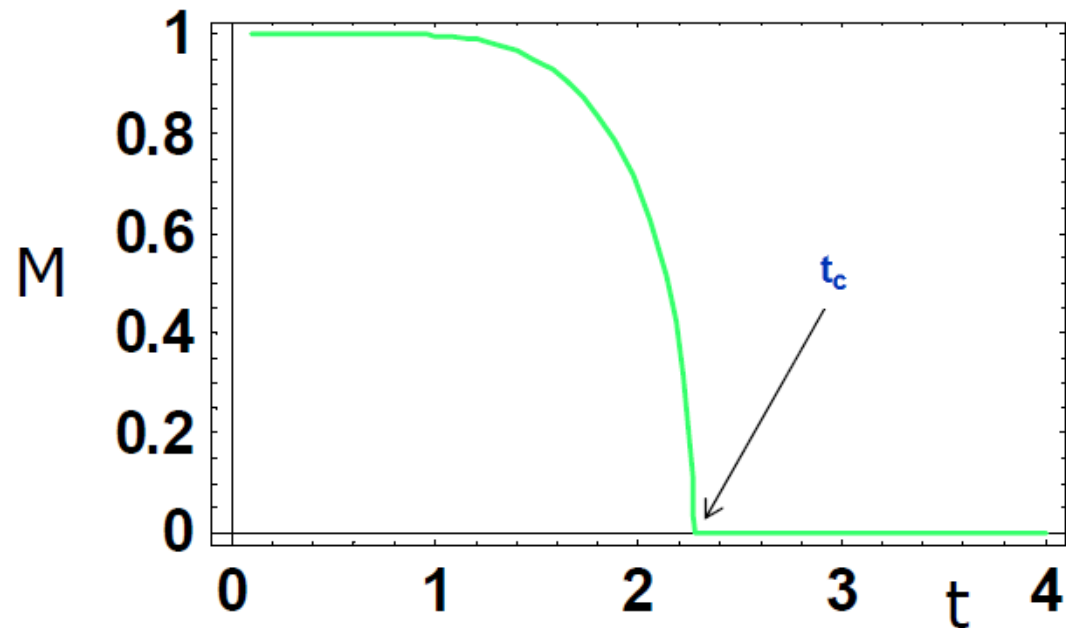


$$C = \frac{\partial U}{\partial t} \sim \ln(|t - 2.2692|)$$

Magnetyzacja dla $h \rightarrow 0$ (Yang, 1952)

$$M = \begin{cases} 0 & t > t_c \\ \sqrt{1 - \frac{1}{\sinh^4\left(\frac{2}{t}\right)}} & t < t_c \end{cases} \sim (t_c - t)^{\frac{1}{8}}$$

$$t_c = \frac{1}{\text{ArcCosh}\left[\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}\right]} \approx 2.2692$$



Rachunki przybliżone

Twierdzenie Bogoliubova-Hellmana- Feynmana

Niech $H = H_0 + H_1$

Wtedy $\mathbf{F} \leq F_0 + \langle H_1 \rangle_0,$

gdzie $\langle H_1 \rangle_0 = Z_0^{-1} \text{Tr} [H_1 e^{-\beta H_0}], \quad F_0 = -\beta^{-1} \ln Z_0, \quad Z_0 = \text{Tr} [e^{-\beta H_0}]$

dowód (dla komutujących hamiltonianów)

(ogólnie: patrz R. Feynman, Statistical Mechanics)

$$H(\lambda) = H_0 + \lambda H_1$$

$$-\beta F(\lambda) = \ln \sum_j e^{-\beta E_j(\lambda)} \equiv \ln \text{Tr} e^{-\beta H(\lambda)}$$

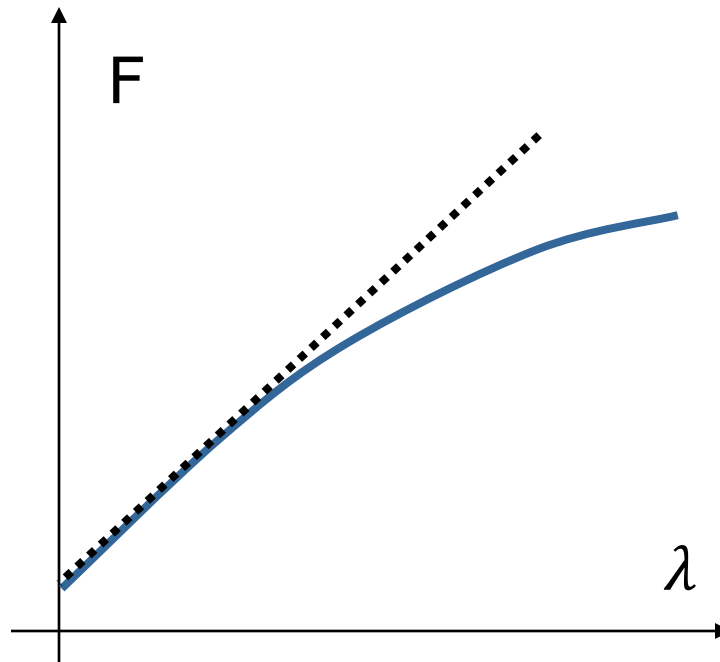
$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\text{Tr} H_1 e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}}{\text{Tr} e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}} \equiv \langle H_1 \rangle$$

$$\frac{d^2 F}{d\lambda^2} = -\beta [\langle H_1^2 \rangle - \langle H_1 \rangle^2]$$

$$= -\beta \langle (H_1 - \langle H_1 \rangle)^2 \rangle$$

$$\leq 0 \quad (\forall \lambda)$$

F: wypukła f-cja λ



F leży poniżej prostej,
stycznej dla $\lambda=0$

$$F(\lambda) \leq F(0) + \lambda (dF / d\lambda)_{\lambda \rightarrow 0}$$

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\text{Tr } H_1 e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}}{\text{Tr } e^{-\beta(H_0 + \lambda H_1)}} \equiv \langle H_1 \rangle$$

$$F(\lambda) \leq F(0) + \lambda (dF / d\lambda)_{\lambda \rightarrow 0}$$

w szczególności dla $\lambda=1$:

$$F \leq F_0 + \langle H_1 \rangle_0$$

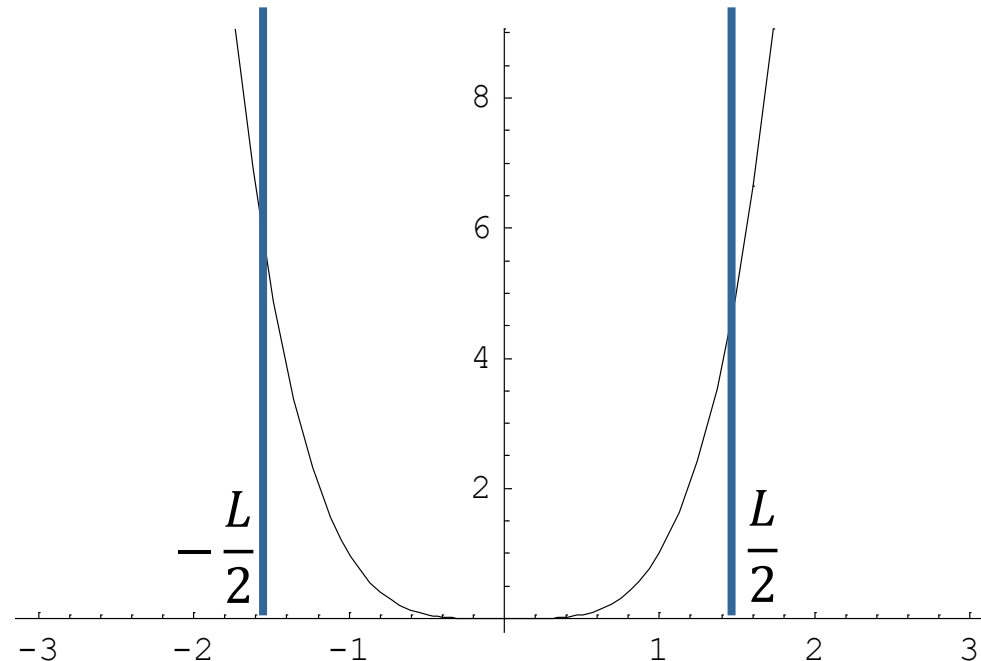
c.b.d.o

Przykłady:

(1) Klasyczny układ nieoddziaływujących cząstek
w 1-dim w potencjale:

$$V(x) = D\left(\frac{x}{a}\right)^4$$

$$V_0 = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \infty & \text{gdy } |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
 e^{-\beta F_0} &= \int \int \frac{dx dp_x}{h} e^{-\beta [p_x^2/2m + V_0(x)]} \\
 &= \frac{1}{h} \int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-\infty}^{\infty} dp_x e^{-\beta p_x^2/2m} \\
 &= \frac{1}{h} (2\pi m k_B T)^{1/2} L
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle H_1 \rangle_0 &= \frac{\text{Tr}[\text{Da}^{-4} x^4 - V_0(x)] e^{-\beta H_0}}{\text{Tr}[e^{-\beta H_0}]} \\
 &= \frac{D}{a^4} \langle x^4 \rangle_0 = \frac{D}{a^4 L} \int_{-L/2}^{L/2} x^4 dx \\
 &= \frac{D}{80} \left(\frac{L}{a} \right)^4
 \end{aligned}$$

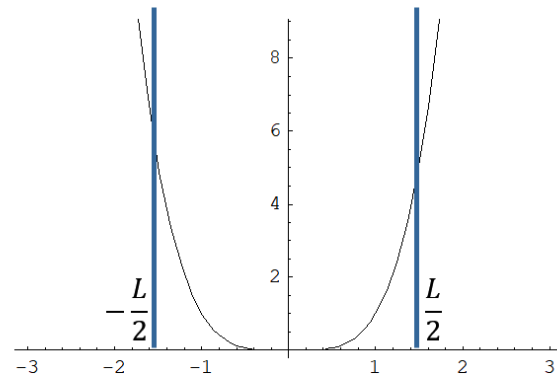
$$F \leq -k_B T \ln \left[\frac{1}{h} (2 \pi m k_B T)^{1/2} L \right] + \frac{1}{80} D \left(\frac{L}{a} \right)^4$$

$$F \leq -k_B T \ln \left[\frac{1}{h} (2 \pi m k_B T)^{1/2} L \right] + \frac{1}{80} D \left(\frac{L}{a} \right)^4$$

Minimalizując względem L otrzymamy:

$$V(x) = D \left(\frac{x}{a} \right)^4 \quad V_0 = \begin{cases} 0 & \text{dla } -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ \infty & \text{gdy } |x| > \frac{L}{2} \end{cases}$$

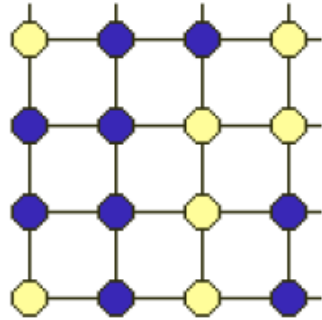
$$\frac{L}{a} = [20 k_B T / D]^{1/4}$$



(2) Średnie pole

Na przykładzie modelu Isinga:

Model Isinga



$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

$$\mathbf{Z}(\{\beta J\}) = \text{Tr}[e^{-\beta \mathcal{H}}]$$

● ↓ (s = +1)

● ↑ (s = -1)

$$s_i = \pm 1$$

$$\text{Tr} \equiv \prod_{i=1}^N \sum_{s_i = \pm 1}$$

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

$$\begin{aligned} H_0 &= -B \sum_j s_j - H \sum_j s_j \\ &= -(B + H) \sum_j s_j \\ &= -B^* \sum_j s_j \end{aligned}$$

$$H_0 = -B^* \sum_j s_j$$

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j - H \sum_i s_i$$

$$F_0 = -k_B T \ln \text{Tr} e^{-\beta H_0}$$

$$= -N k_B T \ln [e^{\beta B^*} + e^{-\beta B^*}]$$

$$F \leq F_0 + \langle H - H_0 \rangle_0$$

$$= F_0 - \sum_{i,j} \frac{J}{2} \langle s_i s_j \rangle_0 + (B^* - H) N \langle s_1 \rangle_0$$

$$\langle s_i s_j \rangle_0 = \langle s_i \rangle_0 \langle s_j \rangle_0 = \langle s_1 \rangle_0^2$$

$$F \leq F_0 + \langle H - H_0 \rangle_0$$

$$= F_0 - \sum_{i,j} \frac{J}{2} \langle s_i s_j \rangle_0 + (B^* - H) N \langle s_1 \rangle_0$$

$$\langle s_i s_j \rangle_0 = \langle s_i \rangle_0 \langle s_j \rangle_0 = \langle s_1 \rangle_0^2$$

$$F \leq F_0 - \frac{NzJ}{2} \langle s_1 \rangle_0^2 + (B^* - H) N \langle s_1 \rangle_0$$

$$\begin{aligned} \langle s_1 \rangle_0 &= \frac{\text{Tr} [s_1 e^{\beta B^* s_1}]}{\text{Tr} [e^{\beta B^* s_1}]} = \frac{e^{\beta B^*} - e^{-\beta B^*}}{e^{\beta B^*} + e^{-\beta B^*}} \\ &= \tanh[\beta B^*] \end{aligned}$$

reasumując

$$H_0 = -(B + H) \sum_j s_j = -B^* \sum_j s_j$$

$$F \leq F_0 - \frac{NzJ}{2} \langle s_1 \rangle_0^2 + (B^* - H) N \langle s_1 \rangle_0$$

$$\langle s_1 \rangle_0 = \tanh[\beta B^*]$$

$$F_0 = -N k_B T \ln [e^{\beta B^*} + e^{-\beta B^*}]$$

Parametr B^* dobieramy wariacyjnie

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial B^*} = 0 \implies 0 = & \cancel{\frac{\partial F_0}{\partial B^*}} - NzJ \langle s_1 \rangle_0 \frac{\partial \langle s_1 \rangle_0}{\partial B^*} \\ & + \cancel{N \langle s_1 \rangle_0} + (B^* - H) N \frac{\partial \langle s_1 \rangle_0}{\partial B^*} \end{aligned}$$

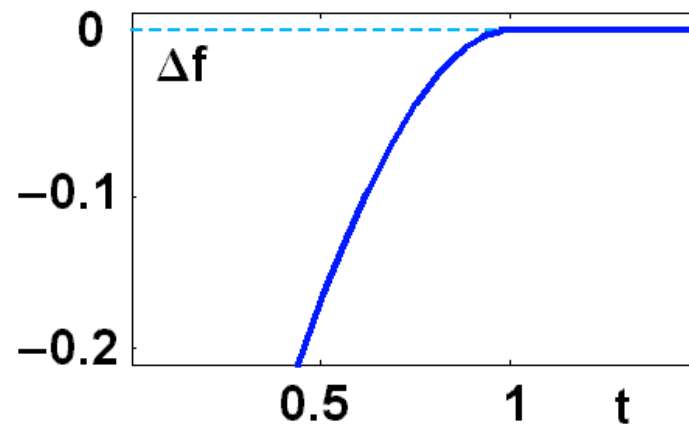
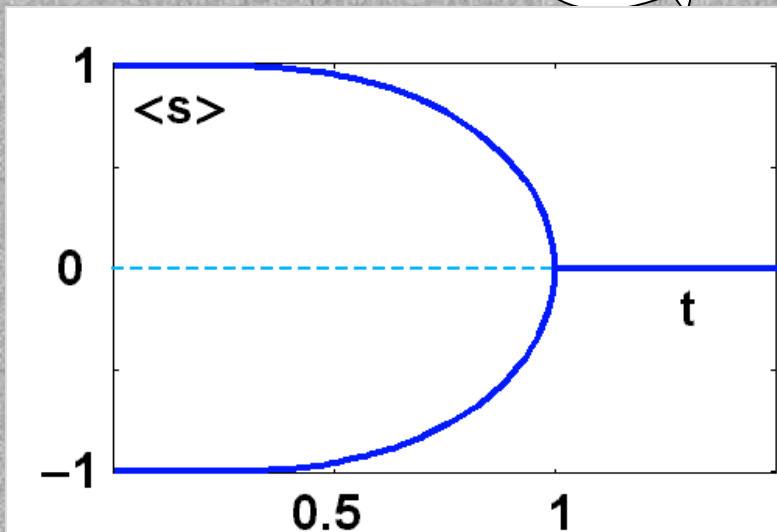
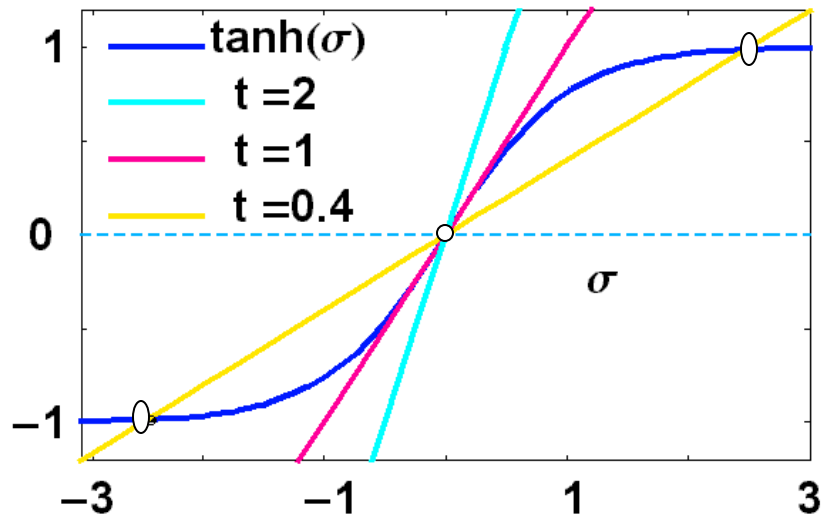
$$\implies NzJ \langle s_1 \rangle_0 = (B^* - H) N \implies B^* = zJ \langle s_1 \rangle_0 + H$$

$$\langle s_1 \rangle_0 = \tanh[\beta B^*]$$

$$B^* = zJ \langle s_1 \rangle_0 + H$$

$$H=0$$

$$\sigma t = \tanh(\sigma)$$



Przejście fazowe ciągłe

Porównanie z rozwiązaniem Younga-Lee

