Zjawiska wywoływane szumami przestrzennie skorelowanymi

P. F. Góra

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ

3 grudnia 2012

Przetłumiony ruch (co najmniej) *dwóch* cząstek:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{x}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial\vec{x}}U_x(\vec{x},\vec{y}) + \sigma_x\vec{\xi}_x(t)\\ \frac{d\vec{y}}{dt} &= -\frac{\partial}{\partial\vec{y}}U_y(\vec{x},\vec{y}) + \sigma_y\vec{\xi}_y(t)\end{aligned}$$

Białe szumy Gaussowskie:

$$\left\langle\vec{\xi}_x(t)\right\rangle = \left\langle\vec{\xi}_x(t)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle\vec{\xi}_x(t)\vec{\xi}_x^{\,T}(t')\right\rangle = \left\langle\vec{\xi}_y(t)\vec{\xi}_y^{\,T}(t')\right\rangle = \delta(t-t')\mathbf{C}_{x,y}$$

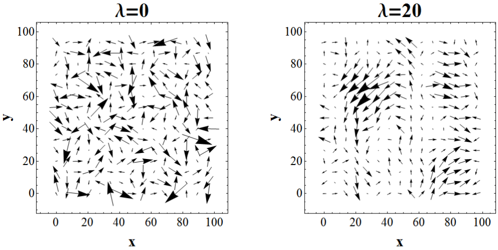
$\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_y$ symetryczne, dodatnio określone — ewentualne korelacje pomiędzy składowymi $\vec{\xi}_x, \vec{\xi}_y$.

$$\left\langle\vec{\xi}_x(t)\vec{\xi}_y^{\,T}(t')\right\rangle = \delta(t-t')\mathbf{F}(|x-y|)$$

Oddziaływanie z oddziałującym srodowiskiem (płyny, żele, . . .)

Prace nad wyjaśnieniem mechanizmu mikroskopowego trwają. . .

Przykład: Korelacje zanikające wykładniczo



Dwuwymiarowy model polimeru z oddziaływaniami pomiędzy najbliższymi sąsiadami, oddziaływaniami kątowymi i globalnym potencjałem Lennarda-Jonesa

- M. Majka, PFG, Acta Phys. Pol. B **43**, 1133 (2012)
- M. Majka, PFG, Phys. Rev. E **86**, 051122 (2012)
  - environmentally induced stiffening of the chain
  - inhibition of chain geometry dynamics
  - bead motion synchronization
  - spontaneous polymer unfolding

W tym seminarium nie będzie nic więcej na ten temat ☺

Dwie cząstki harmonicznie sprzężone w jednym wymiarze

Najprostszy możliwy model:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -g(x-y) + \sigma\xi_x(t) \\ \dot{y} &= g(x-y) + \sigma\xi_y(t) \end{aligned}$$

Szumy Gaussowskie:

$$\langle \xi_x(t) \rangle = \langle \xi_y(t) \rangle = 0$$

$$\left\langle \xi_x(t)\xi_x(t') \right\rangle = \left\langle \xi_y(t)\xi_y(t') \right\rangle = \delta(t-t')$$

$$\left\langle \xi_x(t)\xi_y(t') \right\rangle = \delta(t-t')\, f(|x-y|)$$

Własności funkcji $f(\cdot)$:

- $|f(u)| \leqslant 1$
- $f(0) = 1$
- $\lim\limits_{u\to\infty} f(u) = 0$

Względne położenie cząstek

$$u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

$$\dot{u} = -2gu + \sigma \frac{\xi_x(t) - \xi_y(t)}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle \frac{\xi_x(t) - \xi_y(t)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\xi_x(t') - \xi_y(t')}{\sqrt{2}} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left(\langle \xi_x(t)\xi_x(t') \rangle + \langle \xi_y(t)\xi_y(t') \rangle - \langle \xi_x(t)\xi_y(t') \rangle - \langle \xi_y(t)\xi_x(t') \rangle \right)$$

$$= \delta(t - t') \left(1 - f(|x - y|)\right)$$

Ponieważ ξ_x, ξ_y są Gaussowskie,

$$\dot{u} = -2gu + \sigma\sqrt{1 - f(|u|)}\,\eta(t)$$
$$\langle\eta(t)\rangle = 0\,, \quad \langle\eta(t)\eta(t')\rangle = \delta(t - t')$$

Praktyczna realizacja:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -g(x - y) + \sigma\eta(t) \\
\dot{y} &= g(x - y) + \sigma\left(c \cdot \eta(t) + \sqrt{1 - c^2} \cdot \zeta(t)\right) \\
c &= f(|x - y|)
\end{aligned}$$

η, ζ — *niezależne* GWN.
Dla dużych $|x - y|$ szumy niezależne.

Związek z pewnym dawnym modelem

Niech

$$f(|u|) = \exp\left(-\left|\frac{u}{r}\right|^{2\alpha}\right)\,,\ \alpha > 0$$

Wówczas *dla małych u*

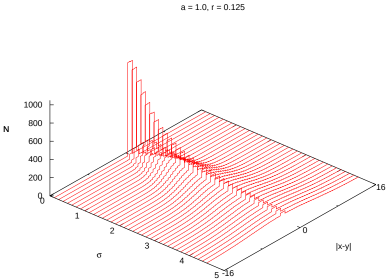
$$\dot{u} = -2gu + \sigma\left|\frac{u}{r}\right|^{\alpha}\eta(t)$$

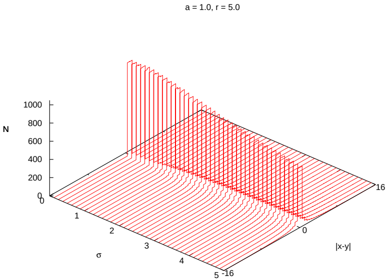
Model (bez ograniczeń na u, ale dla $0 < \alpha < 1$) dyskutowany w pracach:

S.I. Denisov, W. Horsthemke, Phys. Rev. E **65**, 031105 (2002)

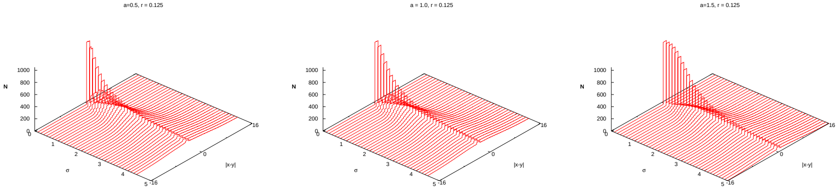
A.N. Vitrenko, Physica A **359**, 65 (2006)

PFG, Physica A **378**, 201 (2007)





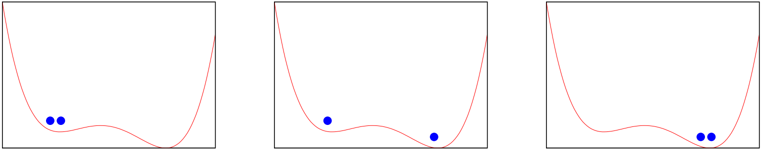
Korelacje wykładnicze $\exp(-|x-y|/r)$



Korelacje w postaci “stretched exponential” $\exp(-|x-y|^{\alpha}/r^{\alpha})$

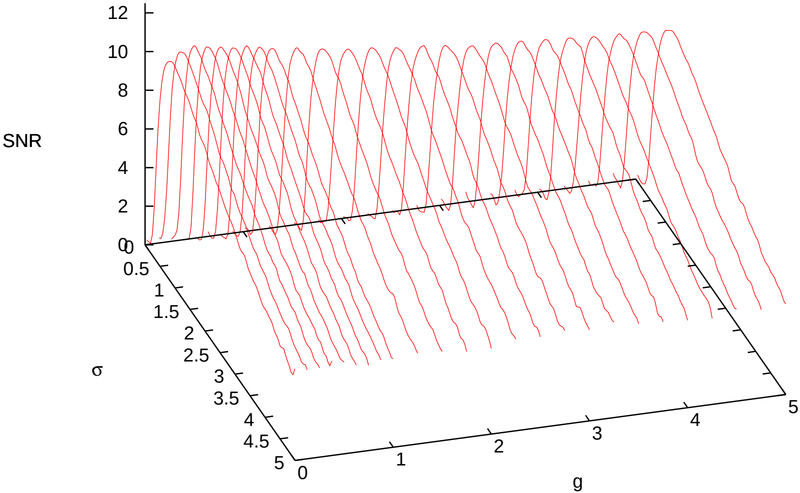
Rezonans stochastyczny

Dwie cząstki sprzężone harmonicznie w “standardowym” potencjale z okresowym zaburzeniem zewnętrznym. Szumy skorelowane wykładniczo, $\exp(-|x - y|/r)$.

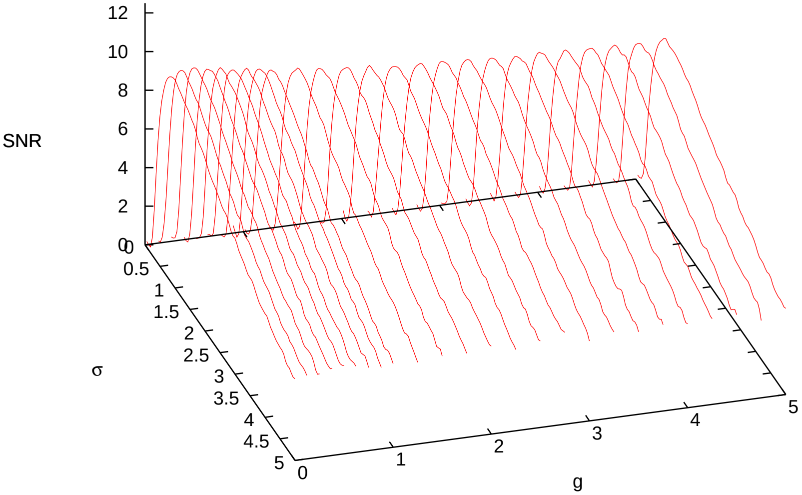


-1 0 1

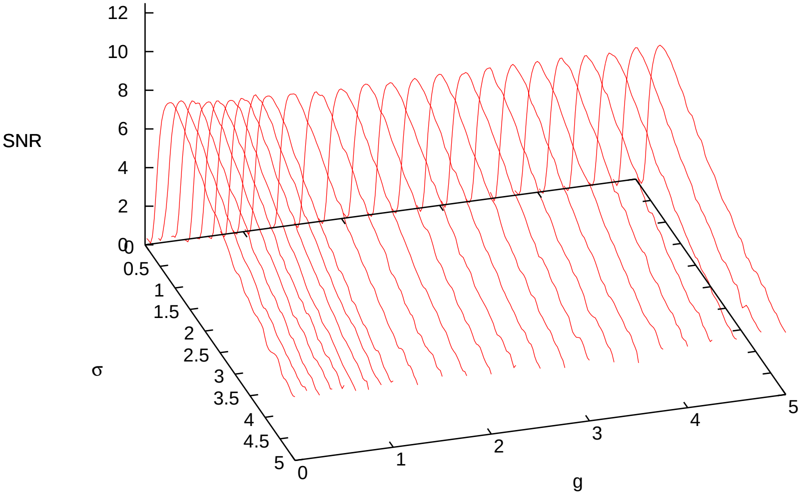
Widmo mocy uśrednione po 512 realizacjach, SNR dla różnych wartości stałej sprzężenia.



$r = 0.0$

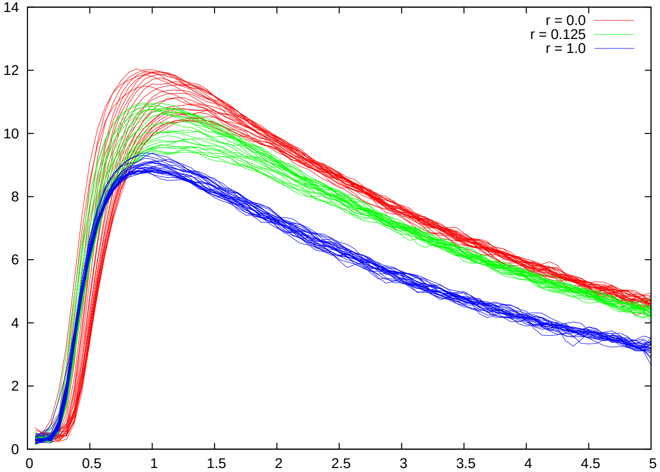


$$r = 0.125$$



$$r = 1.0$$

Zbiorczy obraz wszystkich krzywych



Bardzo wstępne wnioski

- Jakieś uzasadnienie dla modelu Denisova i Hosthemke?
- Korelacje próbują ściągnąć odległość do zera: cząstki sprzężone harmonicznie zachowują się jek jedna cząstka
  - ślad po osobliwości w modelu D-H?
- Im większy zasięg korelacji, tym mocniej związane cząstki
- Utrudniony rezonans stochastyczny
- Dla *małych* zasięgów korelacji, wzrost sprzężenia początkowo wzmacnia rezonans stochastyczny
- Możliwe wzmocnienie rezonansu stochastycznego dla ujemnych korelacji (np. typu tłumiony kosinus)
  - czy tego typu korelacje *przestrzenne* są realistyczne?!