

O synchronizacji

P. F. Góra

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ
Komisja Układów Złożonych PAU

16 września 2019



UNIwersytet
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Streszczenie

Synchronizacja jest jednym z najbardziej spektakularnych zjawisk w dynamice nieliniowych układów złożonych. W trakcie wykładu omówię klasyczne modele synchronizacji, a także przedstawię kilka najnowszych wyników dotyczących synchronizacji w jednowymiarowych układach cyklicznych.

Moi współpracownicy:

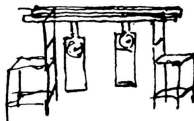
Zosia Bratasz

Joanna Grelska

dr Jeremi Ochab

Krzysztof Siekański

W 1665 Christiaan Huygens zaobserwował, że dwa zegary wiszące na wspólnej belce synchronizują ruch swoich wahadeł.



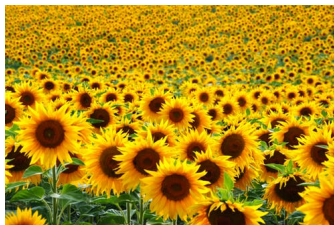
Henrique M. Oliveira, Luis V. Melo, Sci. Rep. 5, 11548 (2015)



Dwa lub więcej sprzężone układy dynamiczne dopasowują pewne swoje parametry, aby wytworzyć jakieś wspólne, grupowe zachowanie. Inne parametry mogą pozostawać różne.

Synchronizacja w przyrodzie:

- świetliki (*fireflies*)
- stada ptaków, ławice ryb
- sprzężenie krążeniowo-oddechowe
- komórki *pacemaker* w mięśniu sercowym
- zegary biologiczne (Nagroda Nobla z medycyny i fizjologii, 2017)
- rytmy okołodobowe (*circadian*)



Więcej synchronizacji:

- synchronizacja chaosu
- synchronizujące się oklaski
- wibracje Millenium Bridge (nie rezonans! — piesi dostosowują krok do drgań mostu)



Steven H. Strogatz, Daniel M. Abrams, Allan McRobie, Bruno Eckhardt, Edward Ott, *Nature* **438**, 43 (2005)

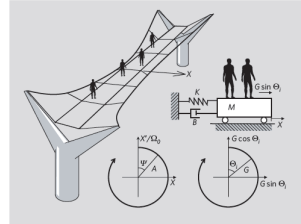


Figure 1 | Effect of pedestrian crowding on London's Millennium Bridge. The resonant lateral mode of vibration of the bridge (left) can be represented by a mass-spring-damper system (top, right). The angular phases (bottom) for the bridge displacement X (left) and the individual pedestrian forces, $G \sin \theta$, (right), are indicated (see text for definitions of variables).

- i wiele innych...

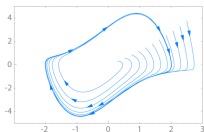


Arthur Winfree

Kluczowa obserwacja: Zsynchronizowane układy poruszają się po identycznych trajektoriach w przestrzeni fazowej. Każdy układ zachowuje się jak oscylator na cyklu granicznym.

Każdy oscylator odczuwa łączny sygnał od wszystkich pozostałych oscylatorów

Cykl graniczny:



Na rysunku cykl graniczny oscylatora van der Pola
Tylko układy nieliniowe!

Jest jakaś jedna zmienna, ϑ , opisująca położenie cząstki na cyklu granicznym

Założenia:



Yoshiki Kuramoto

- Cykle graniczne są reprezentowane przez okręgi
- Oddziaływanie każdy z każdym
- Naturalne częstości oscylatorów na cyklach granicznych, ω_i , pochodzą z unimodalnego rozkładu, posiadającego pierwszy i drugi moment (idealnie, z rozkładu Gaussa)

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\vartheta_i - \vartheta_j)$$

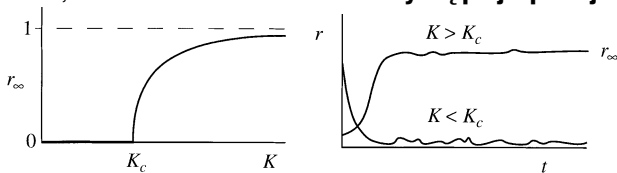
Y. Kuramoto, in: H. Arakai (Ed.), International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, Vol. 39, Springer, New York, 1975, p. 420.

Parametr porządku:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\vartheta_j} = r e^{i\theta}$$

Jeżeli $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = \dots = \vartheta_N$, czyli występuje pełna synchronizacja fazowa, $r = 1$.

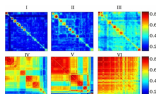
Można pokazać, że w modelu Kuramoto **występuje przejście fazowe**.



K_C zależy od szerokości rozkładu naturalnych częstotliwości.

Zastosowania modelu Kuramoto:

- oscylatory biologiczne i chemiczne
- synchronizacja pracy neuronów

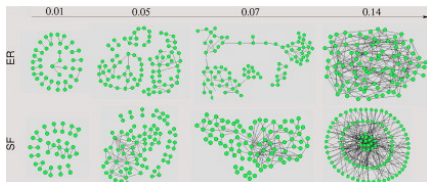


Einat Fuchs, Amir Ayali, Eshel Ben-Jacob and Stefano Boccaletti, Phys. Biol **6**, 1 (2009)

- oscylacyjna dynamika pożarów
- fale gęstości
- sieci neuronowe, sieci laserów i złącz Josephsona
- socjofizyka (synchronizacja zachowań ludzi w różnych sytuacjach społecznych)

Modyfikacje:

- inne topologie sieci: grafy losowe, regularne, sieci małego świata, sieci bezskalowe, . . .



Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jürgen Kurths, Yamir Moreno, Changsong Zhou, Phys. Rep. **469**, 93 (2008)

- zamrożony nieporządek w stałych sprzężenia
- zaburzenia losowe
- model Kuramoto z wymuszeniem zewnętrznym:

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_j \sin(\vartheta_i - \vartheta_j) - K' f(t)$$
- inercyjny model Kuramoto

Ale cykle graniczne wciąż modelowane przez okręgi.

Ruch po okręgu:

$$r_i = R = \text{const}$$

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i = \text{const}$$

Ruch po elipsie:

$$r_i = \frac{R}{1 + a \sin \vartheta_i}, \quad a \in (-1, 1)$$

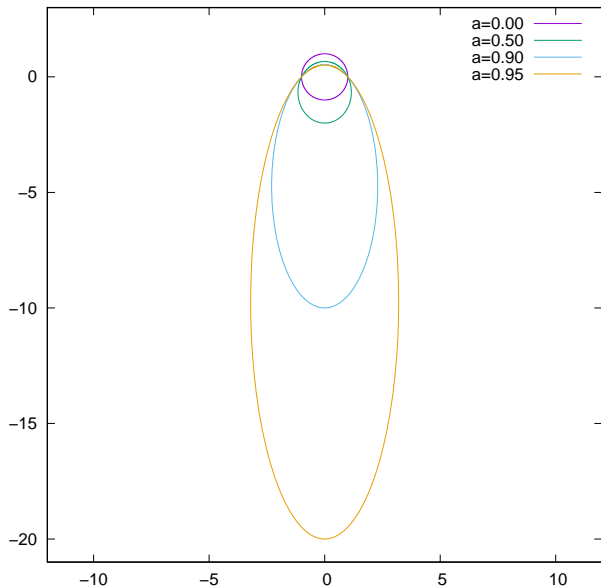
$$R = \text{const}$$

$$\dot{\vartheta}_i = f(r_i, \vartheta_i)$$

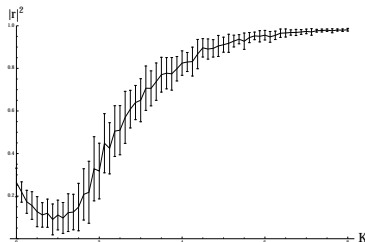
Jak znaleźć zależność pomiędzy r_i a ϑ_i ? Postulujemy “zasadę zachowania momentu pędu”:

$$r_i^2 \dot{\vartheta}_i = J_i = \text{const}$$

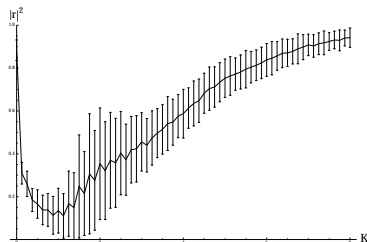
$$\dot{\vartheta}_i = \underbrace{\frac{J_i}{R^2}}_{\omega_i} (1 + a \sin \vartheta_i)^2$$



$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i(1 + a \sin \vartheta_i)^2 - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\vartheta_i - \vartheta_j)$$



$a = 0.5$



$a = 0.95$

Nie ma przejścia fazowego, gdyż pojawia się “pseudosynchronizacja” dla małych wartości stałej sprzężenia.

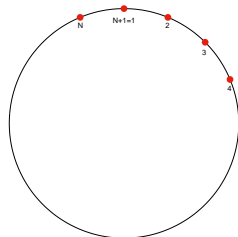
Oscylatory na pierścieniu — jednowymiarowy układ cykliczny z lokalnymi oddziaływaniami.

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i - \frac{K}{2} [\sin(\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) + \sin(\vartheta_i - \vartheta_{i+1})], \quad \vartheta_0 \equiv \vartheta_N, \quad \vartheta_1 \equiv \vartheta_{N+1}$$

Szukamy rozwiązania zsynchronizowanego w postaci

$$\vartheta_i = \Omega t + \phi_i, \quad \phi_i = \text{const}$$

Synchronizacja częstotliwościowa, nie fazowa! Synchronizacja polega na tym, że pomiędzy kolejnymi oscylatorami wytwarzają się stałe różnice fazowe.



Rozwiązania mają postać

$$\phi_i - \phi_{i-1} = \arcsin \left(\rho + \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{N-i} (\omega_j - \Omega) \right), \quad \rho \in [-1, 1]$$

$$\sum_{i=1}^N \arcsin \left(\rho + \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{N-i} (\omega_j - \Omega) \right) = 2m\pi$$

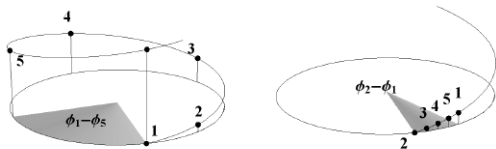
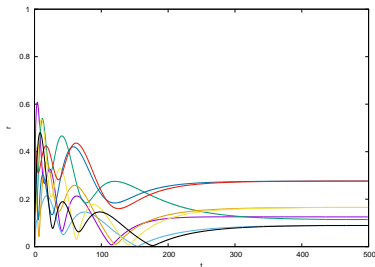


Fig. 2. The idea of the winding number: the circle represents phase differences $\phi_i - \phi_{i-1} \in [0, 2\pi)$ and the digits are indices of the oscillators. The left-hand solution has $m = 1$, all the phase differences are positive and sum up to 2π . The right-hand one has $m = 0$, one of the differences is negative and the sum is zero.



$$N = 128, K = 15.0$$

Wartości parametru porządku $r < 1$, ale ustabilizowane w czasie: synchronizacja częstotliwościowa. Różne wartości r odpowiadają różnym warunkom początkowym i różnym wartościom *winding number*, m .

Dla dużych N konieczne są duże wartości stałej sprzężenia, aby pojawiła się synchronizacja i długie czasy dojścia do synchronizacji. Sprzężenie z najbliższymi sąsiadami jest mniej efektywne, niż średnie pole, graf przypadkowy lub sieć małego świata.

Czy w modelu cyklicznym, a więc **zamkniętym**, możliwa jest synchronizacja z oddziaływaniami odpychającymi?

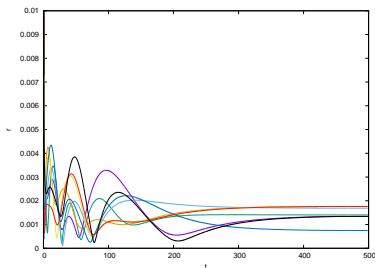
$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i - \frac{K}{2} [\cos(\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) + \cos(\vartheta_i - \vartheta_{i+1})]$$

Nie działa: synchronizacja tylko dla układu jednorodnego, stany zsynchronizowane są niestabilne. . .

. . . ale

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i + \frac{K}{2} [\sin(\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) + \sin(\vartheta_i - \vartheta_{i+1})]$$

działa! Matematyka jest taka sama, jak w przypadku oddziaływań przyciągających, tylko inne stany są stabilne: $\forall i: |\phi_i - \phi_{i-1}| > \pi/2$.



Wartości parametrów jak poprzednio

Proszę zwrócić uwagę na zmianę skali osi pionowej!

Parametr porządku osiąga wartości ustabilizowane, ale bardzo małe, gdyż różnice faz odpowiadające modom stabilnym są bardzo duże!



Byzantine Generals Problem

Wednesday, August 18, 2010

Problem bizantyńskich generałów: Kilka armii oblega miasto. Ich dowódcy muszą się zgodzić na wspólny atak lub wspólny, zorganizowany odwrót, gdyż to daje szansę na zwycięstwo. Sytuacja, w której część oddziałów atakuje, część się wycofuje, prowadzi do porażki.

Generałowie muszą osiągnąć konsensus odnośnie do strategii.

Wśród generałów są jednak zdrajcy, którzy przekazują niewiarygodne komunikaty, w dodatku różne dla różnych odbiorców. Na przykład dowódcom, którzy chcą atakować, zdrajca mówi, że chce się wycofać, a dowódcom, którzy chcą się wycofać, zdrajca mówi, że chce atakować.

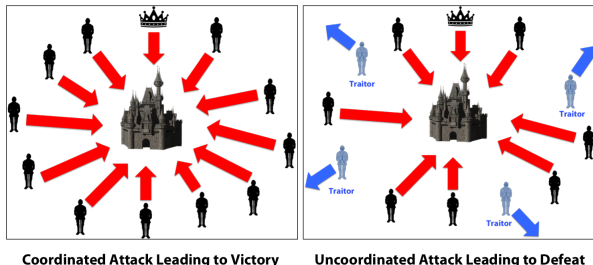
The Byzantine Generals Problem

LESLIE LAMPORT, ROBERT SHOSTAK, and MARSHALL PEASE
SRI International

ACM Transactions on Programming Languages and Systems, Vol. 4, No. 3, July 1982, Pages 382–401.

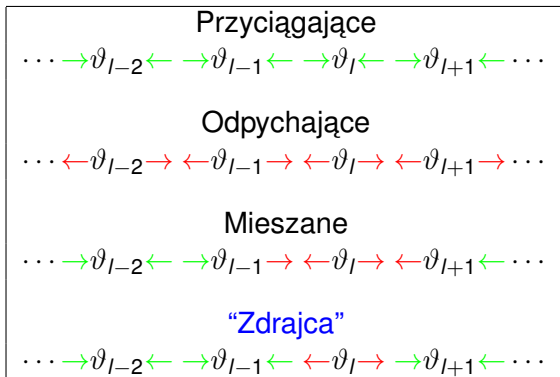
A reliable computer system must be able to cope with the failure of one or more of its components. A failed component may exhibit a type of behavior that is often overlooked—namely, sending conflicting information to different parts of the system. The problem of coping with this type of failure is expressed abstractly as the Byzantine Generals Problem. We devote the major part of the paper to a discussion of this abstract problem and conclude by indicating how our solutions can be used in implementing a reliable computer system.

This research was supported in part by the National Aeronautics and Space Administration under contract NAS1-15428 Mod. 3, the **Ballistic Missile Defense Systems Command** under contract DASG60-78-C-0046, and the Army Research Office under contract DAAG29-79-C-0102. Authors' address: Computer Science Laboratory, SRI International, 333 Ravenswood Avenue, Menlo Park, CA 94025.



Problem o **kluczowym** znaczeniu dla sieci komputerowych i telekomunikacyjnych oraz dla rozproszonych systemów obliczeniowych. Klasyczne rozwiązanie: Aby można było osiągnąć *konsensus* (częściowe porozumienie zapewniające działanie systemu jako całości), ponad $2/3$ węzłów musi działać prawidłowo.

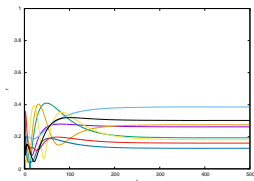
Układy fizyczne nie mogą kłamać. Mogą się jednak zachowywać inaczej, niż inne elementy układu złożonego oczekują.



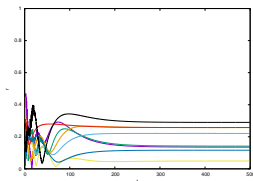
Na poziomie równań:

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \dot{\vartheta}_{l-1} &= \omega_{l-1} - \frac{K}{2} [\sin(\vartheta_{l-1} - \vartheta_{l-2}) + \sin(\vartheta_{l-1} - \vartheta_l)] \\ \dot{\vartheta}_l &= \omega_l + \frac{K}{2} [\sin(\vartheta_l - \vartheta_{l-1}) + \sin(\vartheta_l - \vartheta_{l+1})] \\ \dot{\vartheta}_{l+1} &= \omega_{l+1} - \frac{K}{2} [\sin(\vartheta_{l+1} - \vartheta_l) + \sin(\vartheta_{l+1} - \vartheta_{l+2})] \\ & \vdots \end{aligned}$$

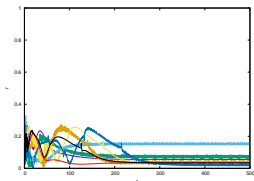
Problem: Jeśli mamy N oscylatorów i M “zdrajców”, jak duże może być M , aby wciąż zachodziła synchronizacja?



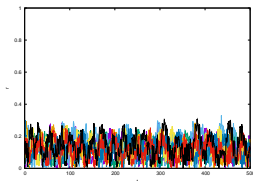
$$N = 128, M = 5$$



$$N = 128, M = 10$$



$$N = 128, M = 14$$



$$N = 128, M = 17$$

Jednowymiarowy, cykliczny system oscylatorów Kuramoto jest mniej odporny na “atak bizantyński”, niż sugerowałoby to rozwiązanie klasyczne.