Czy informacja jest fizyczna? Demonologia, zasada Landauera i obliczenia odwracalne

P. F. Góra
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ
http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

13 października 2016

Pojęcie entropii

Niech pewien układ fizyczny może znajdować się w jednym z N stanów $\{\omega_i\}_{i=1}^{N}$. Każdy z tych stanów może być przybrany z prawdopodobieństwem $p_i = P(\omega_i)$. $\sum_i p_i = 1$.

Kiedy mamy *pełną* informację o układzie? Kiedy wiemy, że układ z całą pewnością znajduje się w konkretnym, znanym nam stanie ω_{i_0}: $p_{i_0} = 1$, $p_{i\neq i_0} = 0$.

Kiedy mamy *najmniejszą* informację o układzie? Gdy każdy stan układu jest obsadzony z jednakowym prawdopodobieństwem: $p_1 = p_1 = \cdots = p_N \ (= 1/N)$.

Im *mniej* prawdopodobny jest stan, w którym znajduje się układ, tym *bardziej* uporządkowany nam się wydaje.

Entropia Gibbsa-Shannona

Claude Shannon, 1948: Entropia informacyjna jest średnią miarą informacji zawartej w danym rozkładzie.

$$S = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i$$

Ten wzór jest identyczny (z dokładnością do jednostek) z wyprowadzonym przez Josiaha Willarda Gibbsa na przełomie XIX i XX wieku:

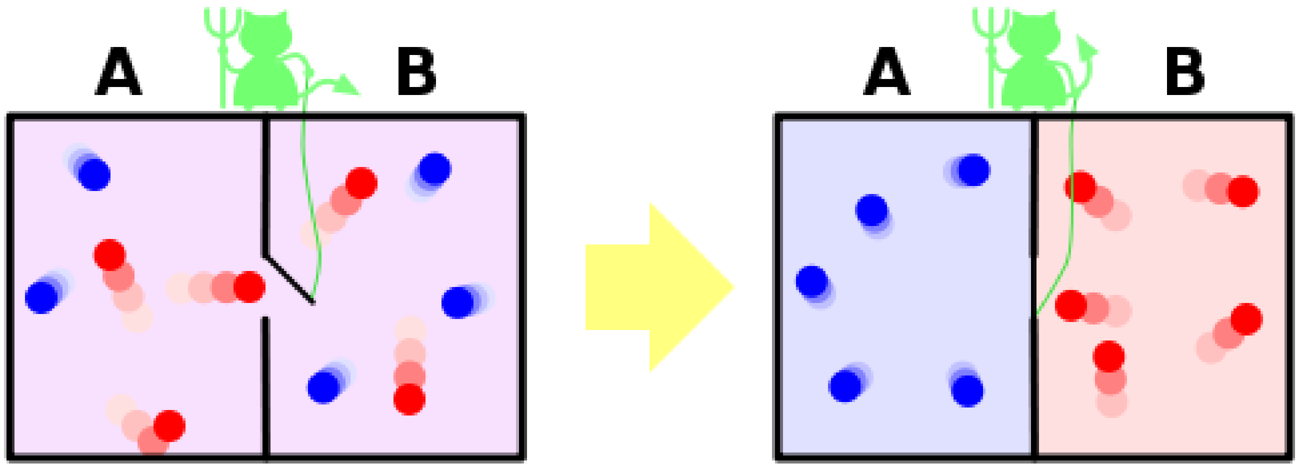
$$S = -k_B \sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i$$

Im *więcej* wiemy o systemie, tym jego entropia jest *mniejsza*.

II zasada termodynamiki:
W żadnych procesach zachodzących spontanicznie entropia nie może maleć.

Czy to się odnosi do obliczeń na komputerze?!
A raczej, czy przeprowadzanie obliczeń koniecznie wiąże się ze wzrostem entropii?

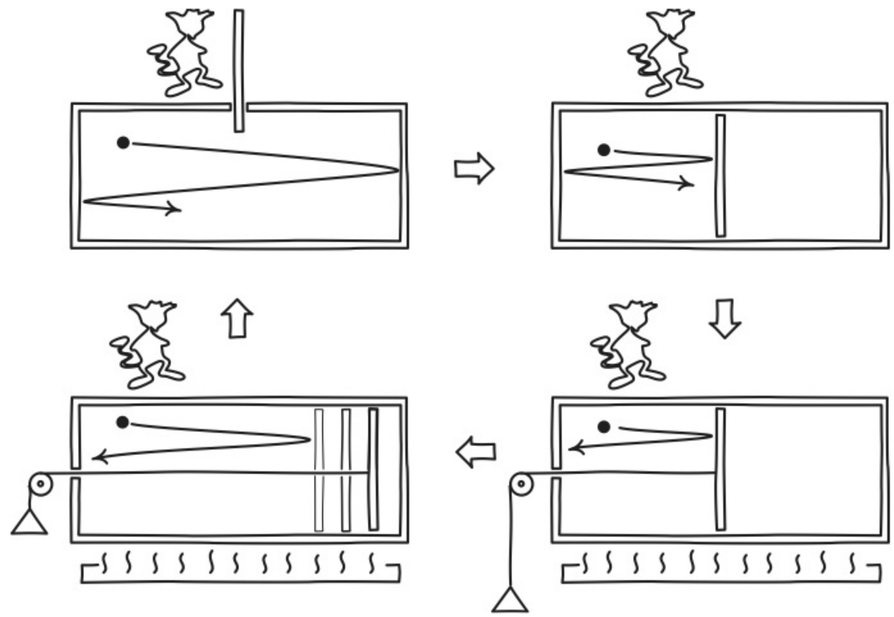
Demon Maxwella



Czy demon Maxwella, po wyeliminowaniu (zminimalizowaniu) tarcia itp, narusza II zasadę termodynamiki?

Silnik Szilarda — minimalistyczna wersja demona Maxwella

Jeden termostat utrzymuje układ w stałej temperaturze.



1. Wstaw przegrodę.
2. Ustal, w której połówce jest cząstka (pomiar!).
3. Przyczep cięgna.
4. Poczekaj, aż cząstka przesunie przegrodę do ściany — praca $k_B T \ln 2$.
5. Odczep cięgna.
6. `GOTO 1`.

Eksperymentalne (!) realizacje silnika Szilarda

- cząsteczka Brownowska w roztworze koloidalnym

  S. Toyabe, T. Sagawa, M. Ueda, E. Muneyuki, M. Sano, Nature Phys. **6**, 988 (2010)

  E. Roldan, I. A. Martinez, J. M. R. Parrondo, D. Petrov, Nature Phys. **10**, 457 (2014)

- pojedynczy elektron

  J. Koski, V. Maisi, T. Sagawa, J. Pekola, Phys. Rev. Lett. **113**, 030601 (2014)

- bistabilny system mikromechaniczny

  I. Neri, M. Lopez-Suarez, Sci. Rep. **6**, 34039 (2016)

Na którym etapie cyklu pracy silnika Szilarda wzrasta entropia?

Leo Szilard: Entropia wzrasta w wyniku dokonania pomiaru.

To nie jest prawidłowa odpowiedź.

Charles Bennett: Można dokonać odwracalnego pomiaru stanu układu dwustanowego.

Termodynamika informacji

Juan M. R. Parrondo, Jordan M. Horowitz and Takahiro Sagawa, Nature Phys. **11**, 135 (2015)

System X jest w pewnym stanie. Dokonujemy na nim pomiaru M. Zmiana entropii wynosi

$$\Delta S = S(X|M) - S(X) = -k_B\, I(X;M) < 0$$

$I(X;M)$ — *mutual information*. Jeśli pomiar nie zmienia energii (ani Hamiltonianu) układu i odbywa się izotermicznie, zmiana energii swobodnej

$$\Delta F = -T\Delta S = k_B T\, I(X;M) > 0$$

- Pomiar (uzyskanie informacji o systemie) **wyprowadza system ze stanu równowagi**.
- Pomiar zwiększa (nierównowagową) energię swobodną.
- Ta energia może być zużyta do wykonania pracy.

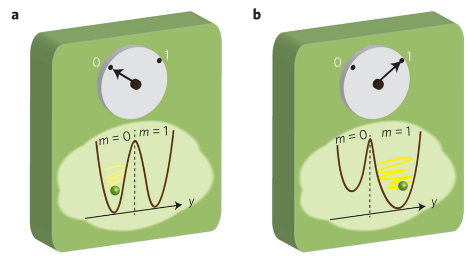
W tym języku II Zasada Termodynamiki ma postać

$$W - \Delta F \geqslant k_B T \, I(X;M)$$

W jest pracą wykonaną przez system. W procesie cyklicznym (pomiar-powrót do stanu początkowego) $\Delta F = 0$. Możemy zatem uzyskać ilość pracy proporcjonalną do informacji uzyskanej w pomiarze.

Informacja zapisana w pamięci może "napędzać" silnik.

Fizyka pamięci



Aby jakis układ mógł działać jako pamięć, musi posiadać wiele rozróżnialnych stanów metastabilnych: ergodyczność musi być złamana (lub efektywnie złamana na czas rzędu czasu życia pamięci). Przestrzeń fazowa całego układu dzieli się na szereg (rozłącznych) regionów ergodycznych $\{\Gamma_m\}$. Niech p_m będzie prawdopodobieństwm, że pamięć jest w stanie m, o energii E_m i entropii S_m. Wówczas energia swobodna pamięci wynosi

$$F(M) = \sum_m p_m (E_m - TS_m) - k_B T \left(- \sum_m p_m \ln p_m \right)$$

Jeżeli na skutek manipulowania pamięcią przeprowadzamy ją ze stanu M do innego stanu M', charakteryzowanego rozkładem prawdopodobieństwa p'_m, praca potrzebna do tego

$$W \geqslant F(M') - F(M)\,.$$

Reset do zera

Niech nowym stanem będzie stan, w którym $p_0 = 1$, $p_{m\neq 0} = 0$. Wówczas $S(M') = 0$, praca zaś spełnia

$$W \geqslant k_B T\, S(M).$$

Dla symetrycznej pamięci dwustanowej (jeden bit informacji) dostajemy granicę Landauera, $W \geqslant k_B T \ln 2$. Zostało to potwierdzone eksperymentalnie

Y. Jun, M. Gavrilov, J. Bechhoefer, Phys. Rev. Lett. **103**, 190601 (2014)

Pamięć jako "napęd" silnika

Rozpatrzymy układ złożony, "zewnętrze", X i pamięć, M. Niech obie części oddziałują jedynie w czasie pomiaru. Wówczas całkowita energia (nierównowagowa) swobodna

$$F(XM) = F(X) + F(M) + k_B T\, I(X;M)\,.$$

W trakcie "pomiaru" ewoluuje pamięć w sposób zależny od stanu X, ale sam stan X się nie zmienia. Całkowita energia swobodna się nie zmienia, ale pomiar wprowadza korelacje pomiędzy M a X. W następnym kroku zmieniamy X w sposób zależny od stanu pamięci, M. Oznacza to, że nad X wykonywana jest praca, a korelacje pomiędzy M a X są usuwane. W przypadku *idealnym*, praca wykonana nad X jest równa pracy potrzebnej do ustawienia pamięci. W przypadkach nieidealnych dostaniemy stratę: praca uzyskana będzie mniejsza od pracy potrzebnej do ustawienia pamięci.

A jeśli pamięć się wyczerpie?

Jeśli cały układ $X + M$ musi zapamiętywać kolejne porcje informacji, przy czym dostępna jest *skończona* liczba stanów Γ_m, pamięć albo się wyczerpie i działanie całego ułady ustanie, albo spożytkujemy część informacji zgromadzonej w pamięci do wykonania pracy, albo wreszcie, jeśli praca nie jest (bo na przykład nie może być) wykonywana, odpowiednia ilość energii *zostaje rozproszona w postaci ciepła* i **entropia X rośnie**. Granica Landauera określa minimalną ilość energii, jaka musi się rozproszyć w przypadku utraty jednego bitu: $k_B T \ln 2$. Jest to mianowicie równe minimalnej ilość pracy potrzebnej do *resetu do zera* jednego bitu, gdyż utrata jednego bitu jest procesem odwrotnym do resetu do zera. Granica Landauera wynika z mikroskopowej odwracalności, czyli z warunku równowagi szczegółowej!

Zasada Landauera:

Skasowanie jednego bitu informacji zwiększa entropię otoczenia* o co najmniej $k_B \ln 2$.

*Nie pamięci, ale otoczenia!

Czy entropia Landauera jest “fizyczną” entropią?

Bity przechowywane są jako obiekty fizyczne, na przykład spiny (momenty magnetyczne). Aby zmienić stan stan spinu ze znanego na nieznany, należy rozproszyć trochę energii. Zasadę Landauera można wobec tego interpretować następująco: Minimalna ilość ciepła, jakie należy rozproszyć, aby izotermicznie skasować jeden bit (utracić informację o bicie) wynosi $Q = k_B T \ln 2$. (Entropia rośnie, gdyż wydziela się ciepło, nie na odwrót!)

Istniejące komputery produkują *miliony* razy więcej entropii.

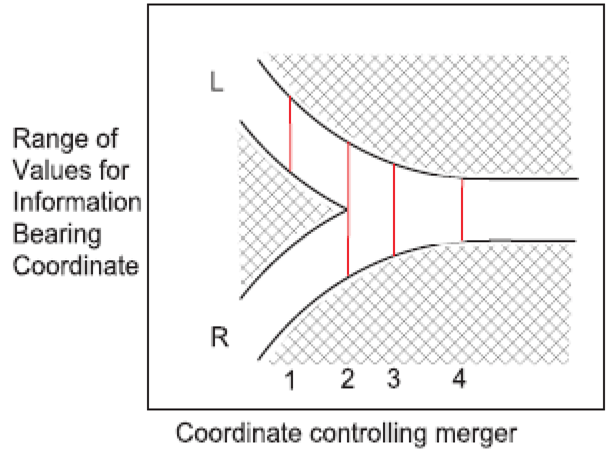
Dlaczego demon Maxwella nie łamie II Zasady?

Demon Maxwella, aby wiedzieć, czy ma otworzyć drzwiczki, czy nie, musi gromadzić informację o cząstach. Jeśli demon jest automatem *skończonym*, musi mieć *skończoną* pamięć. W którymś momencie ta pamięć się wyczerpie i demon, aby móc dalej pracować, musi zacząć czyścić pamięć. Entropia wzrasta, gdy demon usuwa bity ze swojej pamięci.

Dlaczego silnik Szilarda nie łamie II Zasady?

Gdy układ wykona całą pracę — przegroda dojdzie do fizycznej granicy pojemnika — *tracimy informację* o lokalizacji cząstki: Dwa, dotąd rozłączne, obszary Γ_0, Γ_1 zlewają się, znika oddzielająca je bariera. Oznacza to wzrost entropii.

Kiedy jeszcze tracimy informację?



Jeśli w toku jakichś obliczeń dwie scieżki zbiegają się (np. jeśli dwa zestawy danych wejściowych dają ten samy wynik), taka operacja jest *logicznie nieodwracalna*. Przejście od stanu 1 do stanu 2 można interpretować jako zniknięcie bariery oddzialejące dwa stany logiczne, czemu także towarzyszy wzrost entropii o $k_B \ln 2$.

Rozszerzona Zasada Landauera (Rolf Landauer, 1961)

Każda operacja logicznie nieodwracalna

– usunięcie jednego bitu informacji

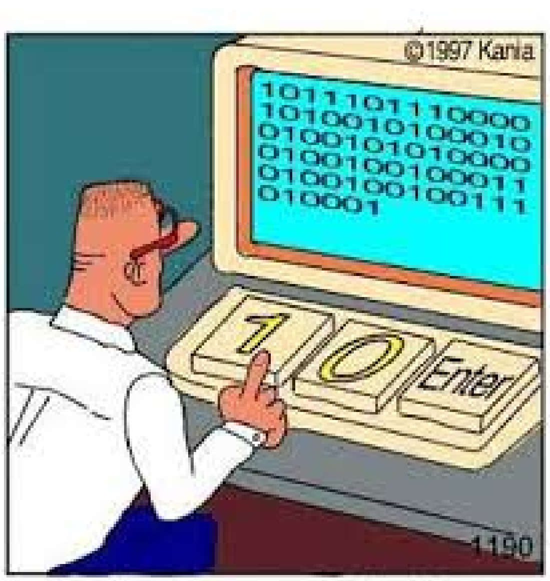
– połączenie dwu ścieżek obliczeń

powoduje wzrost entropii o $k_B \ln 2$.

Reversible computing

Załóżmy, że da się wyeliminować “fizyczne” przyczyny nieodwracalności.

Czy da się prowadzić obliczenia bez operacji logicznie nieodwracalnych?

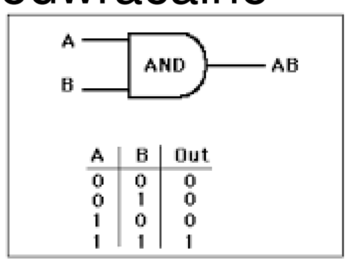


Real programmers code in binary.

– Trzeba przetłumaczyć cały kod programu na operacje na bitach, które można wykonać na bramkach logicznych (trudne, ale możliwe).

– Negacja i identyczność są odwracalne.

– Bramki AND, OR, NAND, XOR nie są odwracalne



A	B	Out
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Bramka Toffoli

Odwracalne bramki logiczne muszą mieć tyle samo wyjść, co wejść. Muszą też zapamiętywać swoje dane wejściowe. Tego typu bramką jest zaproponowana przez Tommaso Toffoli bramka $(x, y, z) \longrightarrow (x, y, z \text{ XOR } (x \text{ AND } y))$. Bramka ta odwraca trzeci bit, jeśli dwa pierwsze są ustawione.

INPUT			OUTPUT		
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0

Bramka Fredkina

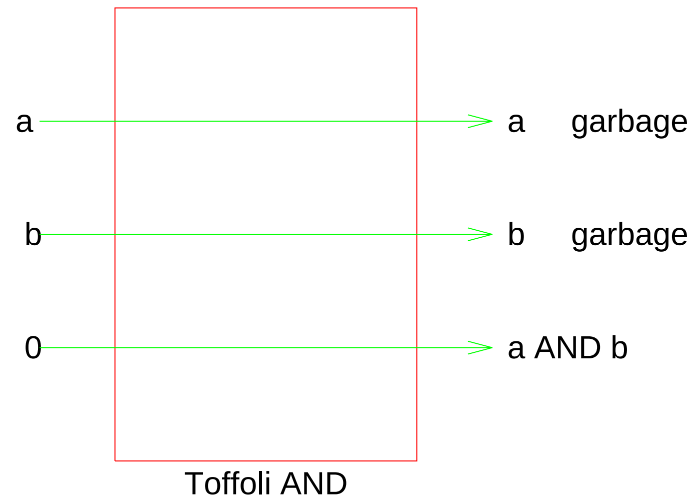
Zamienia miejscami drugi i trzeci bit, jeśli pierwszy bit jest ustawiony.

INPUT			OUTPUT		
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

AND za pomocą bramki Toffoli

$$\text{Toffoli}(a, b, 0) = (a, b, a \wedge b)$$

INPUT			OUTPUT		
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	0



Co zrobić z *garbage outputs*?!

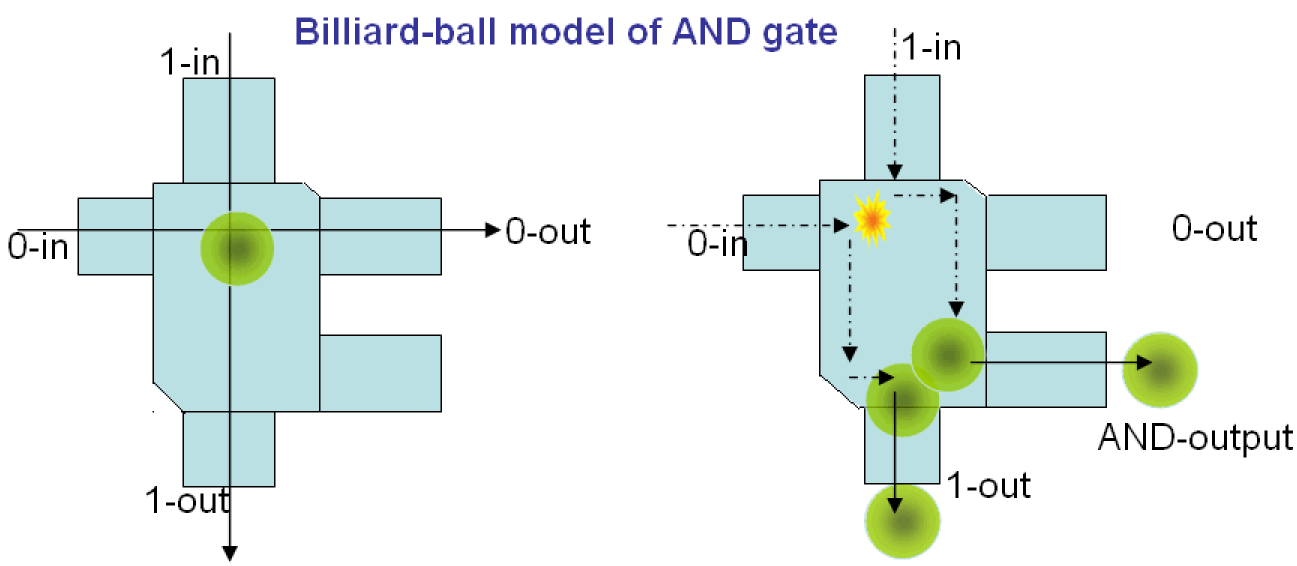
Programy “binarne”, napisane przy użyciu negacji i bramki Toffoli’ego lub Fredkina, są logicznie odwracalne (ale mają **bardzo** duże wymagania pamięciowe).

Czy da się bramkę Toffoli zrealizować praktycznie?

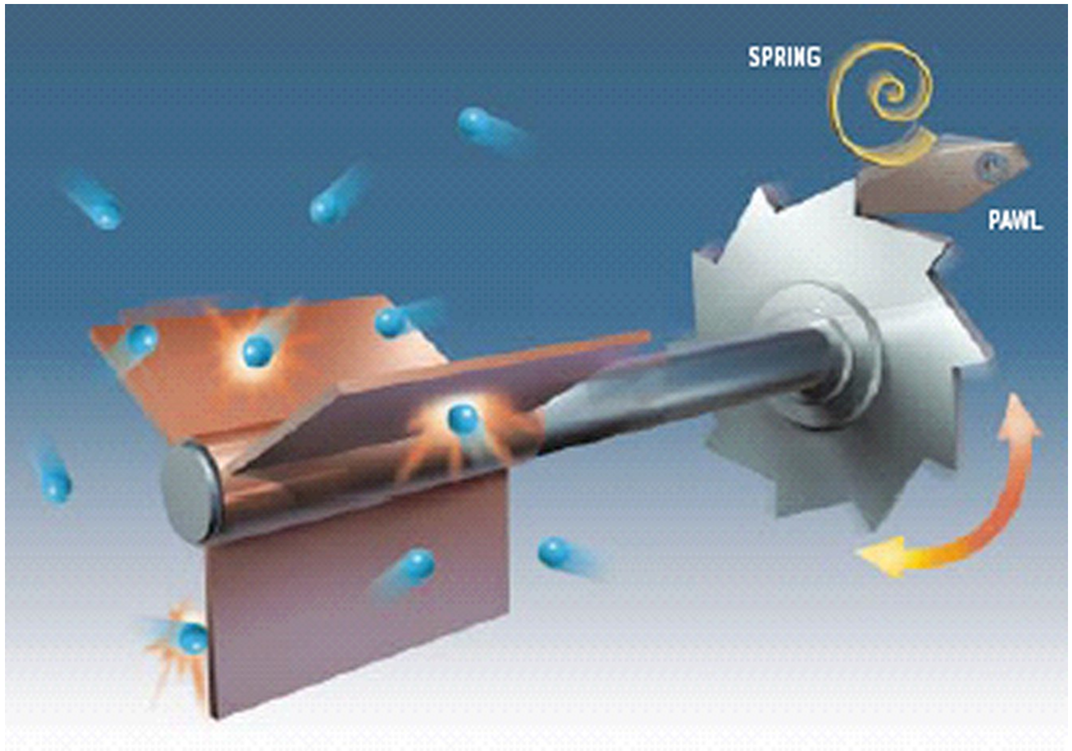
Przy użyciu układów elektronicznych — da się, ale układy elektroniczne w czasie pracy rozpraszają dużo ciepła, więc obliczenie nie będzie *fizycznie* odwracalne.

Billiard Ball Model

Toffoli & Fredkin, 1982: Bramki reprezentowane przez bilard (idealnie sprężyste zderzenia kul, pod kątem prostym). Hardware jest reprezentowany przez geometrię bilardu (układ sztywnych odbijaczy, kanały), dane przez warunki początkowe, software to zderzenia.



Zębatka brownowska: Inne przedstawienie demona Maxwella



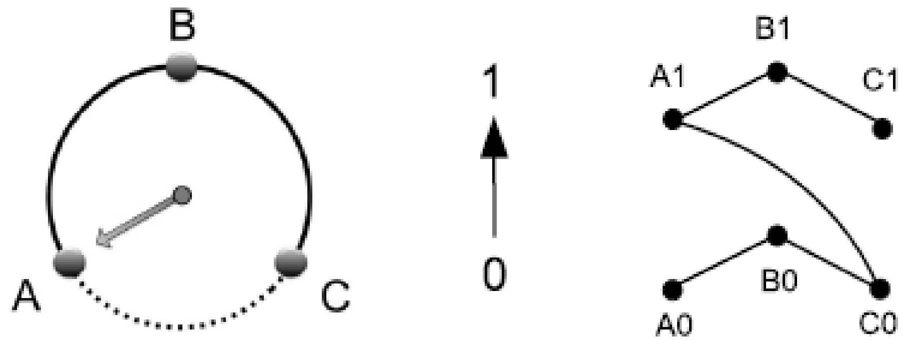
Smoluchowski, Feynman, Magnasco, Parrondo, Jarzynski. . .

Model Jarzynskiego

Co robi demon Maxwella? Otwiera lub zamyka drzwiczki w zależności od tego, czy nadlatuje cząstka “szybka” czy “wolna” — jest to decyzja *zero-jedynkowa*. W języku zębatek można powiedzieć, że zębatka przeskakuje o jedną pozycję w zależności od tego, w którą stronę został uderzony wiatraczek.

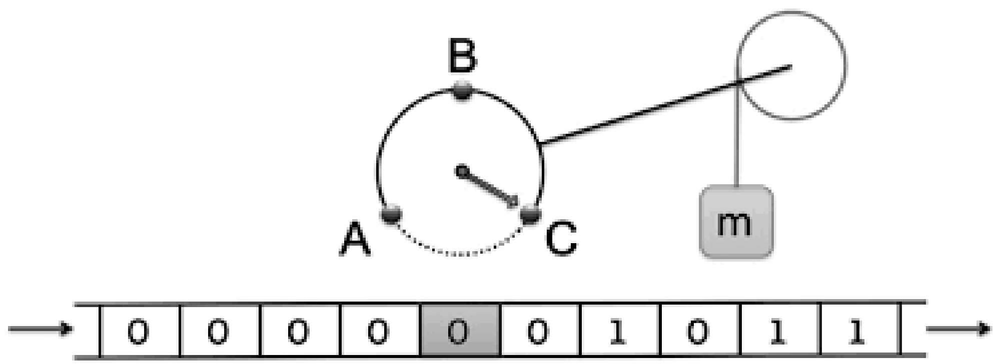
Minimalistyczny model demona Maxwella jako trójstanowego automatu:

Dybiendu Mandal, Christopher Jarzynski, Work and information processing in a solvable model of Maxwell’s demon, PNAS **109**, 11641–11645 (17 lipca 2012).

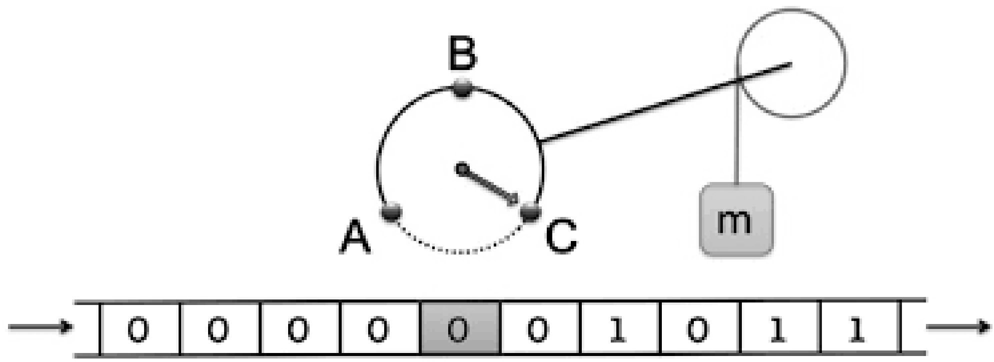


Układ składa się z automatu trójstanowego (trzy stany: minimalna liczba pozwalająca zaobserwować ruch kierunkowy) i jednego bitu informacji. W stanie swobodnym układ przechodzi pomiędzy swoimi stanami o niezmienionym bicie. Możliwe są też przejścia $A1 \leftrightarrow C0$ (z odwróceniem bitu). Wszystkie 6 złożone stany są równie prawdopodobne.

Demon czyta taśmę



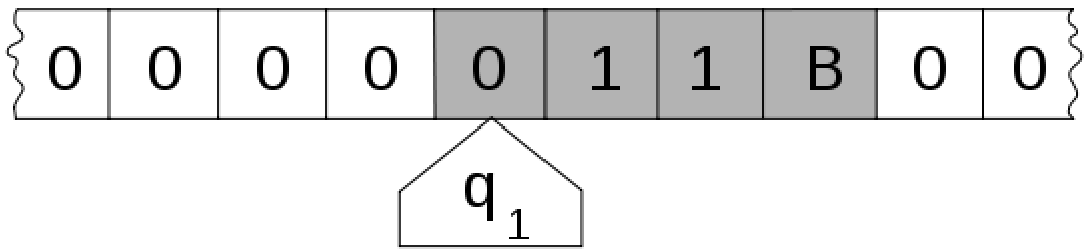
Demon napędzany jest taśmą zawierającą bity (interpretowane jako polecenie otwarcia/zamknięcia drzwiczek). Każdy bit oddziałuje z demonem przez pewien czas (istnieją zatem zewnętrzny mechanizm przesuwający taśmę i zegar, który decyduje, kiedy taśma ma być przesunięta). Jeśli czas ten jest zbyt krótki, demon może nie zareagować na bit, jeśli jest zbyt długi, demon osiąga lokalną równowagę. Interesujące są czasy pośrednie.



Jeśli na taśmie są same zera, demon wykonuje ruch zgodnie ze wskazówkami zegara, obracając niektóre bity. Jeżeli na taśmie są same jedynki, demon wykonuje ruch przeciwnie do wskazówek zegara, obracając niektóre bity. Jeżeli na taśmie jest uporządkowany układ zer i jedynek, także możliwy jest ruch w którymś kierunku. W tych przypadkach demon zwiększa entropię (wyjściowego) ciągu bitów. Jeżeli na wejściu bity są losowe, demon wykonuje ruchy losowe, bez przewagi żadnego kierunku.

Maszyna Turinga

Teoretyczny model komputera (dowolnej maszyny obliczającej):



1. Taśma (potencjalnie nieskończona), podzielona na komórki. W każdej komórce zapisany jest jeden symbol ze skończonego alfabetu, obejmującego symbol pusty.
2. Głowica czytająca i zapisująca symbole na taśmie.
3. Rejestr zapamiętujący aktualny (jeden ze skończenie wielu) stan maszyny.

4. Funkcja przejścia, która mówi, co maszyna ma zrobić w zależności od swojego stanu i symbolu na taśmie — wymazać lub zapisać symbol, przesunąć taśmę w lewo lub w prawo, przejść do nowego stanu lub pozostać w dotychczasowym.

Maszyna Turinga jest podstawowym narzędziem myślowym w informatyce teoretycznej (zasada Churcha).

Model Mandala-Jarzynskiego jest dużym krokiem na drodze konstrukcji "fizycznej" maszyny Turinga.

Daje to teoretyczne podstawy do narzucania *termodynamicznych* ograniczeń na możliwe obliczenia, a także konceptualnie łączy podstawy fizyki statystycznej i teorii obliczalności.

Byłby to etap długiego procesu, zapoczątkowanego przez Richarda Langa w 1973, a w pewnym sensie już przez Leo Szilarda w 1929.