

Analiza szeregów czasowych:

4. Filtry liniowe

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

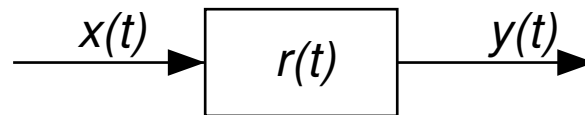
semestr letni 2007/08

Filtry liniowe

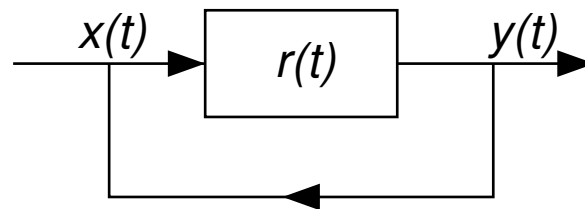
W dziedzinie fourierowskiej filtruje się bardzo prosto: oblicza się iloczyn transformat sygnału wejściowego i funkcji przejścia.

W dziedzinie sygnału może to być bardziej skomplikowane:

filtr FIR:



filtr IIR:



Funkcja przejścia

Nawet jeśli filtr jest realizowany w dziedzinie sygnału, wygodnie jest go analizować w dziedzinie fourierowskiej. Każdy filtr *liniowy* w dziedzinie fourierowskiej przedstawiamy jako

$$Y(f) = \mathcal{H}(f)X(f). \quad (1)$$

Funkcję $\mathcal{H}(f)$ nazywam *funkcją przejścia* lub *funkcją przenoszenia* (*transfer function*).

Terminologia

- $\mathcal{H}(f) = 0$ dla $|f| \geq f_0$ — filtr dolnoprzepustowy.
- $\mathcal{H}(f) = 0$ dla $|f| \leq f_0$ — filtr górnoprzepustowy.
- $\mathcal{H}(f) \neq 0$ dla $f_1 \leq |f| \leq f_2$ — filtr pasmowo przepuszczający (*bandpass*).
- $\mathcal{H}(f) = 0$ dla $f_1 \leq |f| \leq f_2$ — filtr pasmowo zatrzymujący (*bandstop*); jeżeli szerokość wycinanego pasma $f_2 - f_1$ jest mała, zwany także *notch filter*.

Ogólny filtr liniowy w dziedzinie sygnału ma postać

$$y_n = \sum_{k=-s}^q \alpha_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^p \beta_k y_{n-k} \quad (2)$$

x_n jest (dyskretnym) sygnałem wejściowym, y_n sygnałem wyjściowym.

Jeśli $s > 0$, *przyszłe* wartości sygnału wejściowego są potrzebne do określenia sygnału wyjściowego — taki filtr nazywamy *akauzalnym*. Nie może on być zrealizowany on-line.

Jeśli $p = 0$, filtr nazywa się *filtrem FIR* (ang. *Finite Impulse Response*) lub też *filtrem średniej ruchomej* (ang. *moving average*). Jeśli $p > 0$, filtr nazywa się *filtrem IIR* (ang. *Infinite Impulse Response*) lub też *filtrem autoregresywnym* (ang. *autoregressive*).

Kauzalne filtry FIR

Kauzalny filtr FIR ma postać

$$y_n = \sum_{k=0}^q \alpha_k x_{n-k} \cdot \quad (3)$$

Jeżeli sygnał wejściowy jest stacjonarny, sygnał wyjściowy także jest stacjonarny. Liczbę q nazywamy *rzędem filtru*.

Aby znaleźć *funkcję przejścia* filtru, liczymy transformatę Fouriera wyrażenia (3).
Otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 Y_m &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i m n / N} y_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i m n / N} \sum_{k=0}^q \alpha_k x_{n-k} \\
 &= \sum_{k=0}^q \alpha_k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i m n / N} x_{n-k} = \sum_{k=0}^q \alpha_k \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=-k}^{N-1-k} e^{2\pi i m (n'+k) / N} x_{n'}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Na mocy założenia o okresowości wejściowego sygnału, $x_{-l} \equiv x_{N-l}$. Z drugiej strony, $\exp(2\pi im(N-l)/N) = \exp(2\pi im) \exp(2\pi im(-l)/N) = \exp(2\pi im(-l)/N)$. A zatem

$$Y_m = \sum_{k=0}^q \alpha_k e^{2\pi imk/N} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n'=0}^{N-1} e^{2\pi imn'/N} x_{n'}}_{X_m} = \sum_{k=0}^q \alpha_k e^{2\pi imk/N} \underbrace{X_m}_{\mathcal{H}_m}. \quad (5)$$

$m/N = m/(N\Delta) \Delta = f_m \Delta$, gdzie f_m jest m -tą dyskretną częstotliwością fourierowska. Zatem

Funkcja przejścia kausalnego filtru FIR

ma postać

$$\mathcal{H}(f_m) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right)^k = \alpha \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right), \quad (6)$$

gdzie $\alpha(z)$ jest wielomianem stopnia q postaci

$$\alpha(z) = \sum_{k=0}^q \alpha_k z^k. \quad (7)$$

Często dla wygody przyjmuje się, że $\Delta = 1$, czyli że krok próbkowania jest jednostką czasu. Wówczas można pominąć Δ w (6); należy jednak pamiętać, iż w tej konwencji częstotliwości są wielkościami bezwymiarowymi, a przedziałem Nyquista jest $[-1/2, 1/2]$.

Funkcja przejścia filtru FIR

Powyższe wyrażenie można bardzo łatwo uogólnić, rachunek jest niemalże taki sam: Funkcja przejścia dowolnego filtru FIR ma postać

$$\mathcal{H}(f_m) = \sum_{k=-s}^q \alpha_k \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right)^k = \alpha \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right), \quad (8)$$

gdzie $\alpha(\cdot)$ oznacza teraz odpowiednią funkcję wymierną.

Proste filtry dolno- i górnoprzepustowe

Rozważmy filtr

$$y_n = \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{4}x_{n+1}. \quad (9)$$

Jego funkcją przejścia jest

$$\mathcal{H}_c(f) = \frac{1}{4}e^{2\pi if} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2\pi if} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi f = \cos^2 \pi f. \quad (10)$$

Analogicznie, funkcją przejścia filtru

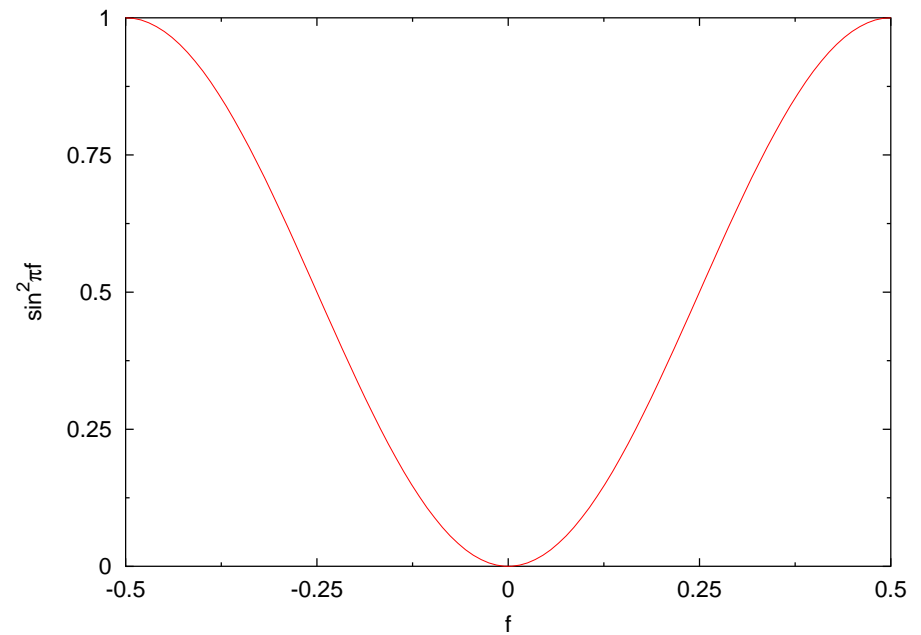
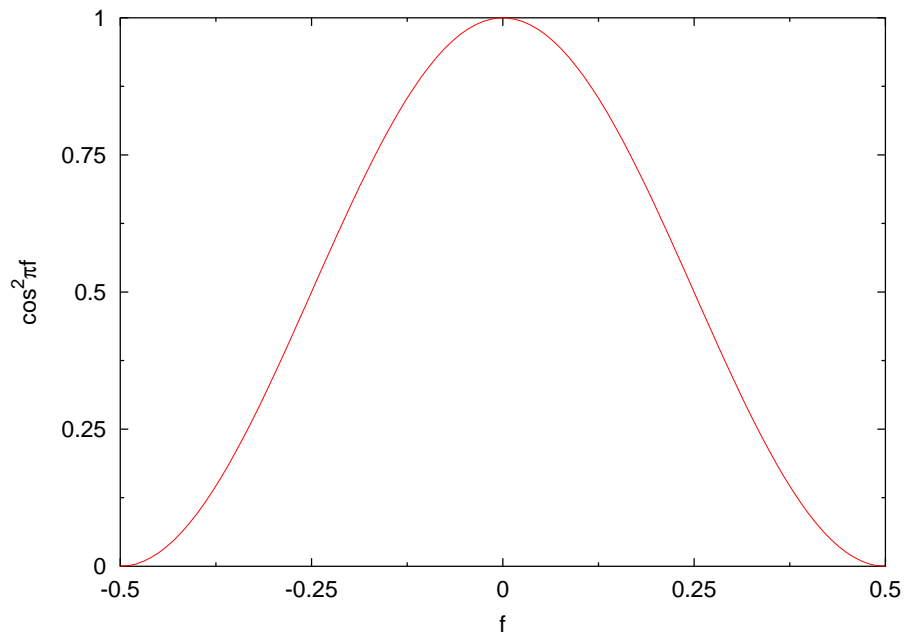
$$y_n = -\frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{4}x_{n+1}. \quad (11)$$

jest

$$\mathcal{H}_s(f) = -\frac{1}{4}e^{2\pi if} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{-2\pi if} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\pi f = \sin^2 \pi f. \quad (12)$$

Filtr (9) jest (kiepskim) filtrem dolnoprzepustowym.
Filtr (11) jest (kiepskim) filtrem górnoprzepustowym.

Funkcje przejścia:



“Zwykła” średnia ruchoma

Również nieważona średnia ruchoma

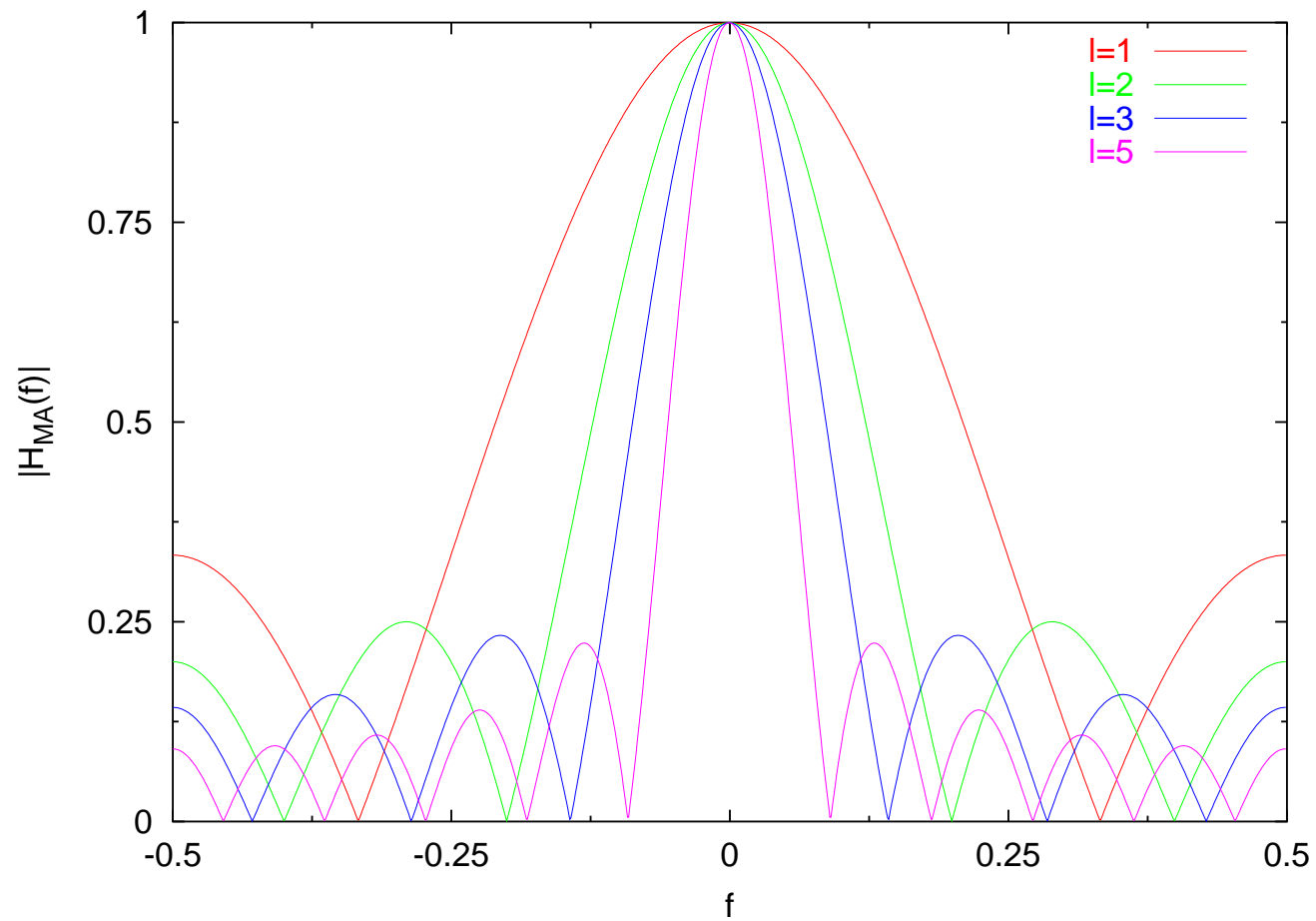
$$y_n = \frac{1}{2l + 1} (x_{n-l} + x_{n-l+1} + \dots + x_n + \dots + x_{n+l-1} + x_{n+l}), \quad (13)$$

o funkcji przejścia

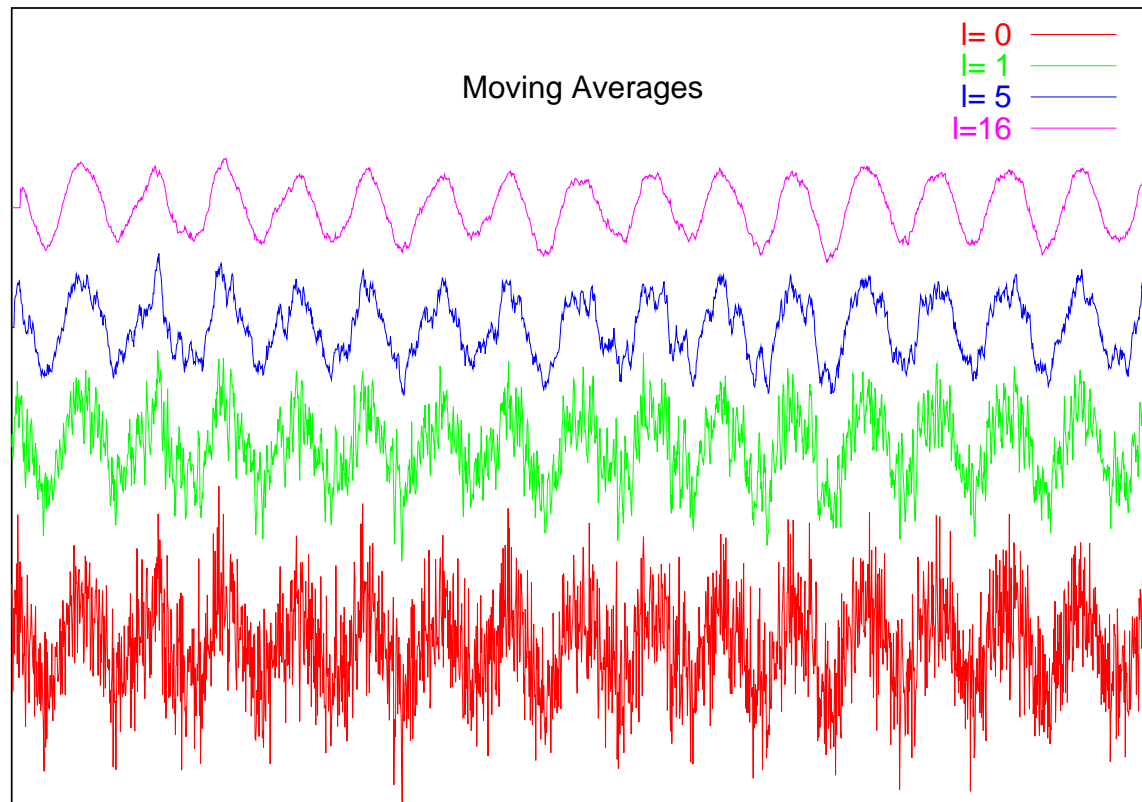
$$\mathcal{H}_{\text{MA}}(f) = \frac{1}{2l + 1} (1 + 2 \cos 2\pi f + 2 \cos 4\pi f + \dots + 2 \cos 2l\pi f) \quad (14)$$

jest kiepskim filtrem dolnoprzepustowym.

Funkcje przejścia dla filtrów nieważonej średniej ruchomej



Przykład zastosowania średniej ruchomej
(szum porównywalny z sygnałem)



Filtry “różniczkujące”

Pierwsza pochodna:

$$\left. \frac{dg}{dx} \right|_x \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{g(x) - g(x - \Delta)}{\Delta} + \frac{g(x + \Delta) - g(x)}{\Delta} \right) = \frac{1}{2\Delta} g(x + \Delta) - \frac{1}{2\Delta} g(x - \Delta) \quad (15a)$$

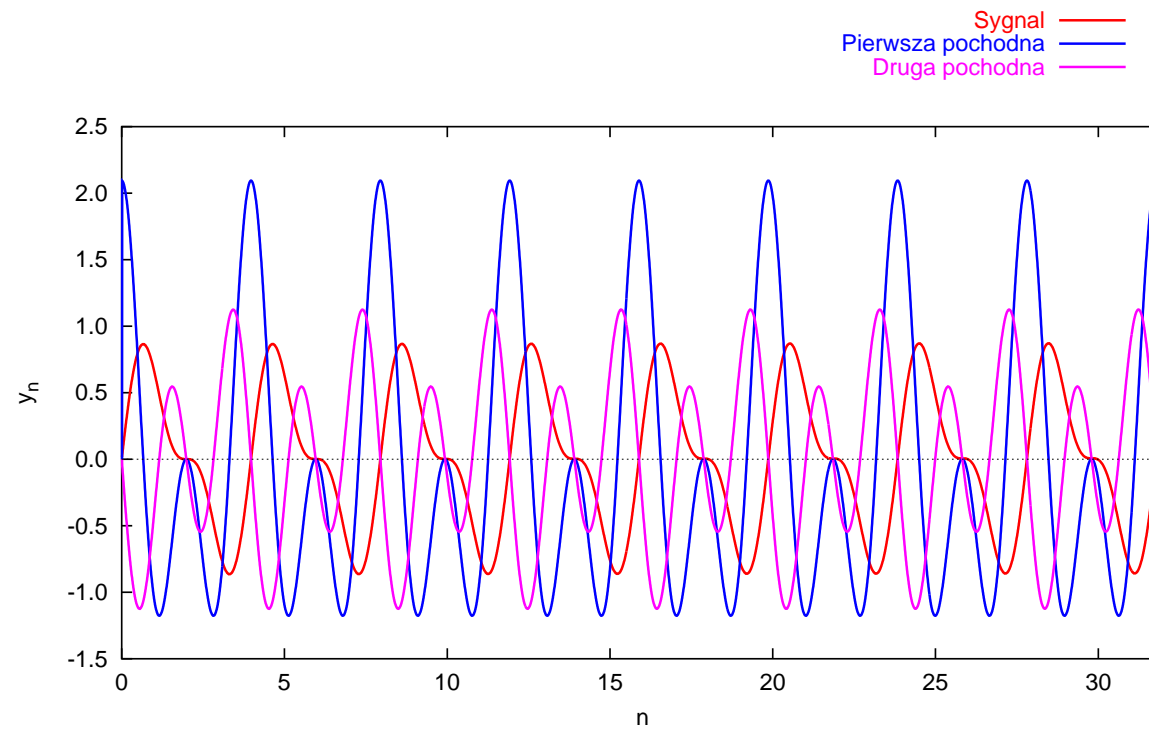
$$y_n = \frac{1}{2\Delta} x_{n+1} - \frac{1}{2\Delta} x_{n-1} \quad (15b)$$

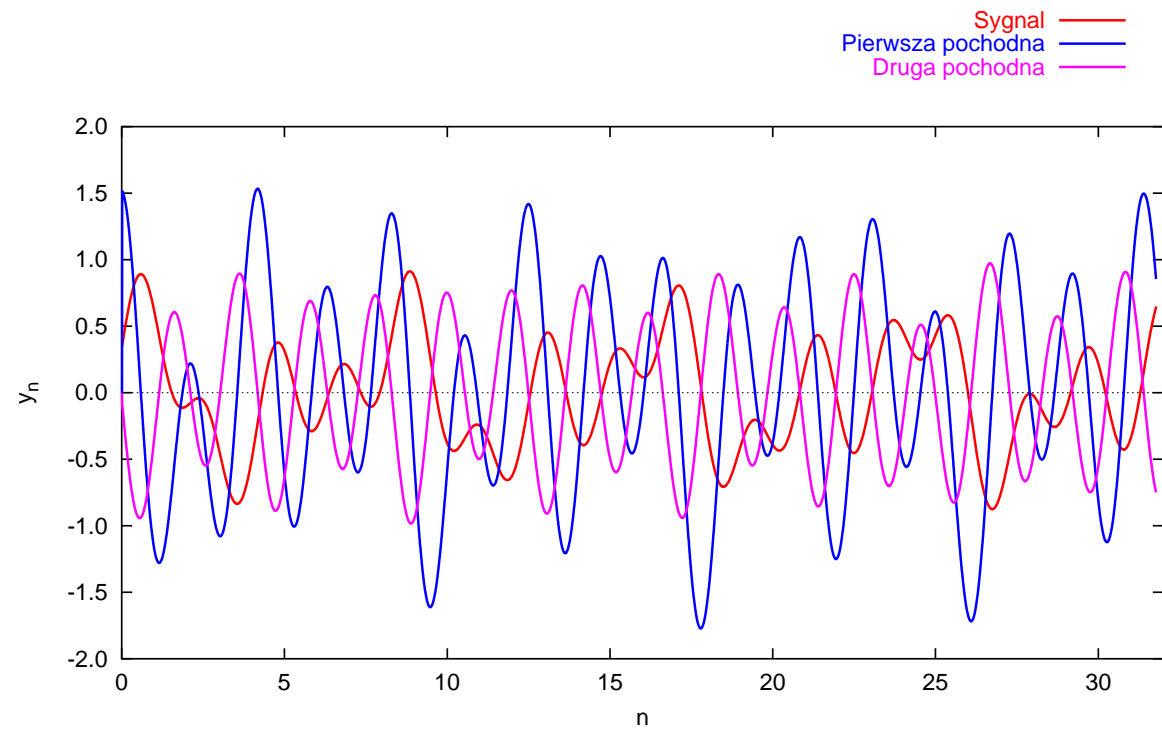
$$\mathcal{H}(f) = \frac{i}{\Delta} \sin(2\pi f \Delta) \quad (15c)$$

Druga pochodna:

$$y_n = \frac{1}{4\Delta^2} x_{n+1} - \frac{1}{2\Delta^2} x_n + \frac{1}{4\Delta^2} x_{n-1} \quad (16a)$$

$$\mathcal{H}(f) = -\frac{1}{\Delta^2} \sin(\pi f \Delta) \quad (16b)$$





Rola fazy funkcji przenoszenia

W dziedzinie fourierowskiej

$$Y(f) = \mathcal{H}(f)X(f). \quad (17)$$

$\mathcal{H}(f) = R(f)e^{i\phi(f)}$, $R(f) \geq 0$. Moduł funkcji przejścia osłabia/wzmacnia poszczególne częstotliwości. Za co odpowiada faza $\phi(f)$?

Zauważmy, że filtr (9) jest filtrem akauzalnym, bardzo łatwo jednak znaleźć jego kausalną wersję, wprowadzając *opóźnienie w czasie*:

$$y_n = \frac{1}{4}x_{n-2} + \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_n \quad (18)$$

o funkcji przejścia

$$\mathcal{H}(f) = e^{2\pi i f} \cos^2 \pi f. \quad (19)$$

Funkcja ta różni się od funkcji przejścia filtru (9) tylko czynnikiem fazowym, sam zaś filtr (18) różni się od filtru (9) jedynie przesunięciem w czasie. Stąd wniosek, iż czynnik fazowy w (19) odpowiada za to przesunięcie w czasie. Tak jest w istocie!

Założmy, że faza funkcji przejścia *zależy liniowo od częstotliwości*, $\phi(f) = af\Delta$. Obliczając transformatę odwrotną znajdziemy

$$\begin{aligned} y_k(t) &\sim \sum_n \mathcal{H}(f_n) X(f_n) e^{-2\pi i f_n k \Delta} = \sum_n R(f_n) e^{ia f_n \Delta} X(f_n) e^{-2\pi i f_n k \Delta} \\ &= \sum_n R(f_n) X(f_n) e^{-2\pi i f_n (k-a) \Delta}, \end{aligned} \quad (20)$$

co odpowiada przesunięciu w czasie o a kanałów. Zatem *filtry o liniowej fazie wprowadzają jednorodne przesunięcie w czasie*. Filtry, które nie mają liniowej fazy, wprowadzają *różnice fazowe* pomiędzy poszczególnymi składowymi fourierowskimi, co może być niepożądane.

Projektowanie filtrów FIR

Jeśli dany jest filtr FIR

$$y_n = \sum_{k=0}^q \alpha_k x_{n-k}, \quad (21)$$

to wiadomo, że jego funkcja przejścia ma postać

$$\mathcal{H}(f_m) = \sum_{k=0}^q \alpha_k \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right)^k. \quad (22)$$

Zauważmy, że (22) jest (z dokładnością do stałej) dyskretną transformacją Fouriera filtru w dziedzinie czasowej.

Problem odwrotny

Na ogół mamy jednak do czynienia z **problemem odwrotnym***: **Mając daną “idealną” funkcję przejścia $\mathcal{H}(f)$, dobrać współczynniki α_k i rząd q filtru (21) tak, aby jego funkcja przejścia była *możliwie najbliższa* zakładanej funkcji “idealnej”.**

*“Problem odwrotny” (ang. *an inverse problem*) to nazwa techniczna!

Podójście intuicyjne

- Weź idealną funkcję przejścia $\mathcal{H}(f)$.
- Oblicz odwrotną transformatę Fouriera[†]

$$h(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H}(f) e^{-2\pi i f t} df. \quad (23)$$

- Zdyskretyzuj $h(t)$ w tylu punktach, ile wynosi rząd filtru.

To podejście na ogół nie działa. Na ogół dyskretyzuje się idealną funkcję przejścia i odwraca dyskretną transformatę celem znalezienia współczynników filtru, ale za cenę zniekształcenia funkcji przejścia.

[†]Dla $\Delta = 1$ częstość Nyquista wynosi $1/2$.

Przykład: Filtr dolnoprzepustowy

Idealna funkcja przejścia wynosi

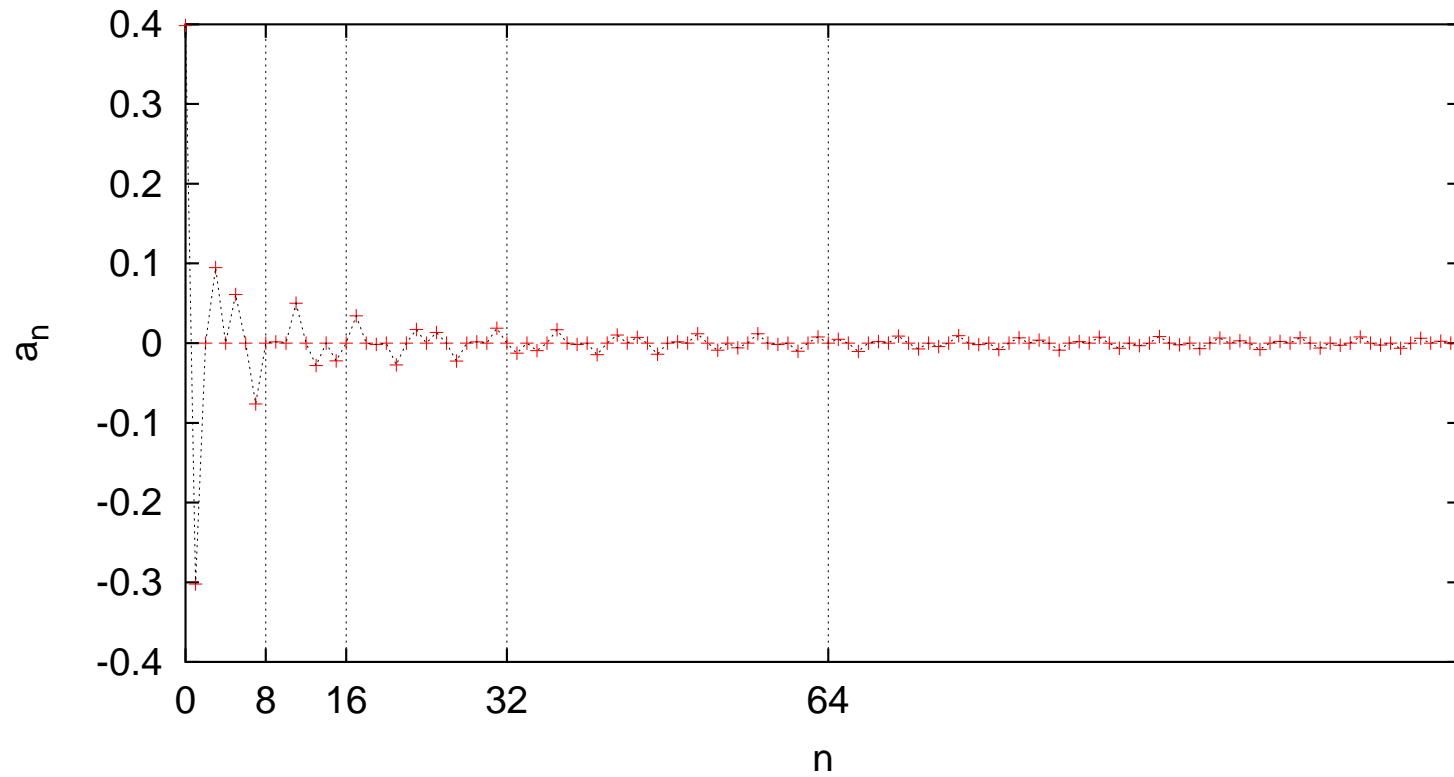
$$\mathcal{H}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_0 < 1/2, \\ 0 & |f| > f_0. \end{cases} \quad (24)$$

Funkcja przejścia w dziedzinie czasowej wynosi zatem

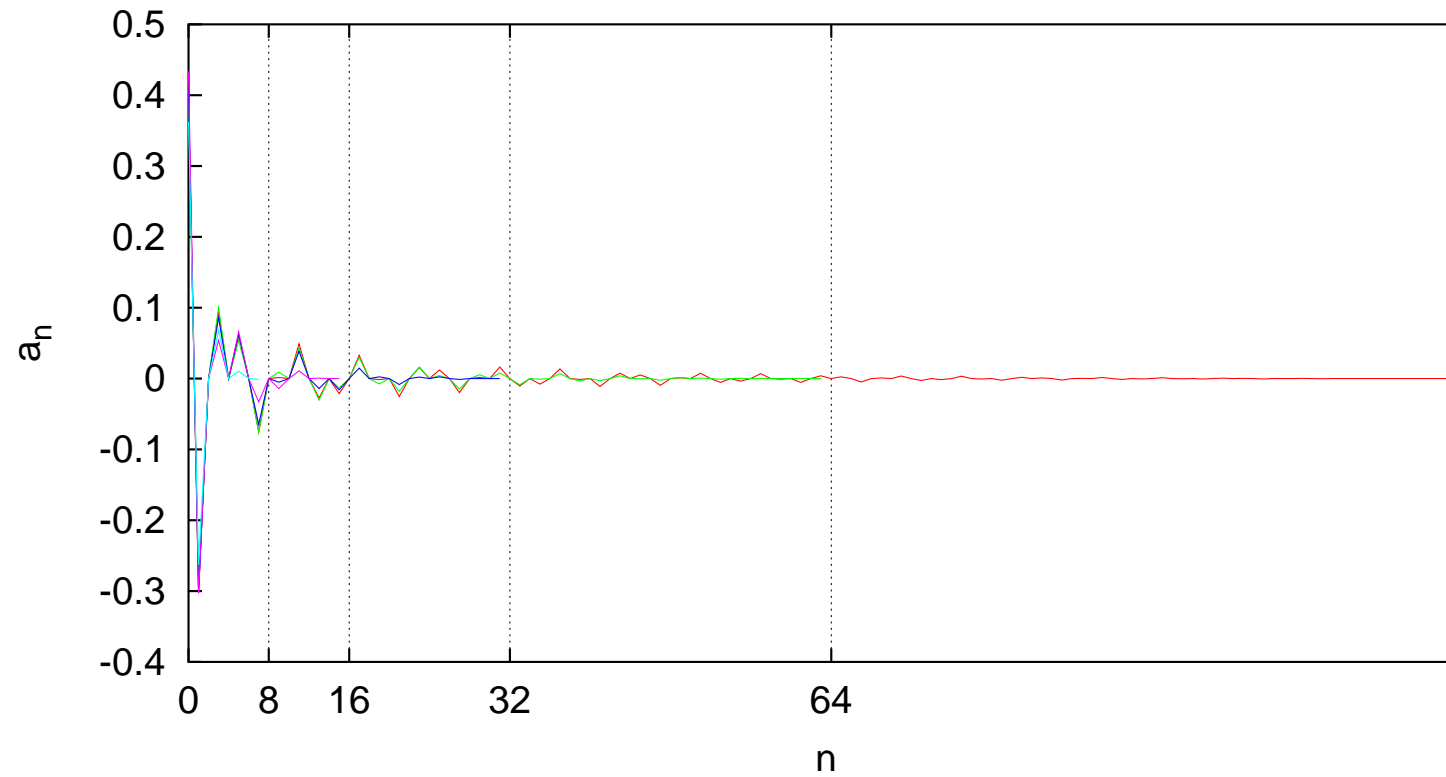
$$h(t) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{H}(f) e^{-2\pi i f t} df = \int_{-f_0}^{f_0} e^{-2\pi i f t} df = \frac{\sin 2\pi f_0 t}{\pi t}. \quad (25)$$

Amplituda $h(t)$ maleje bardzo powoli. **Ostra krawędź zawiera wszystkie składowe fourierowskie.** Trzeba albo wprowadzić arbitralne obcięcie, albo kombinować, na ogół domnażając idealną funkcję przejścia przez pewną funkcję okna.

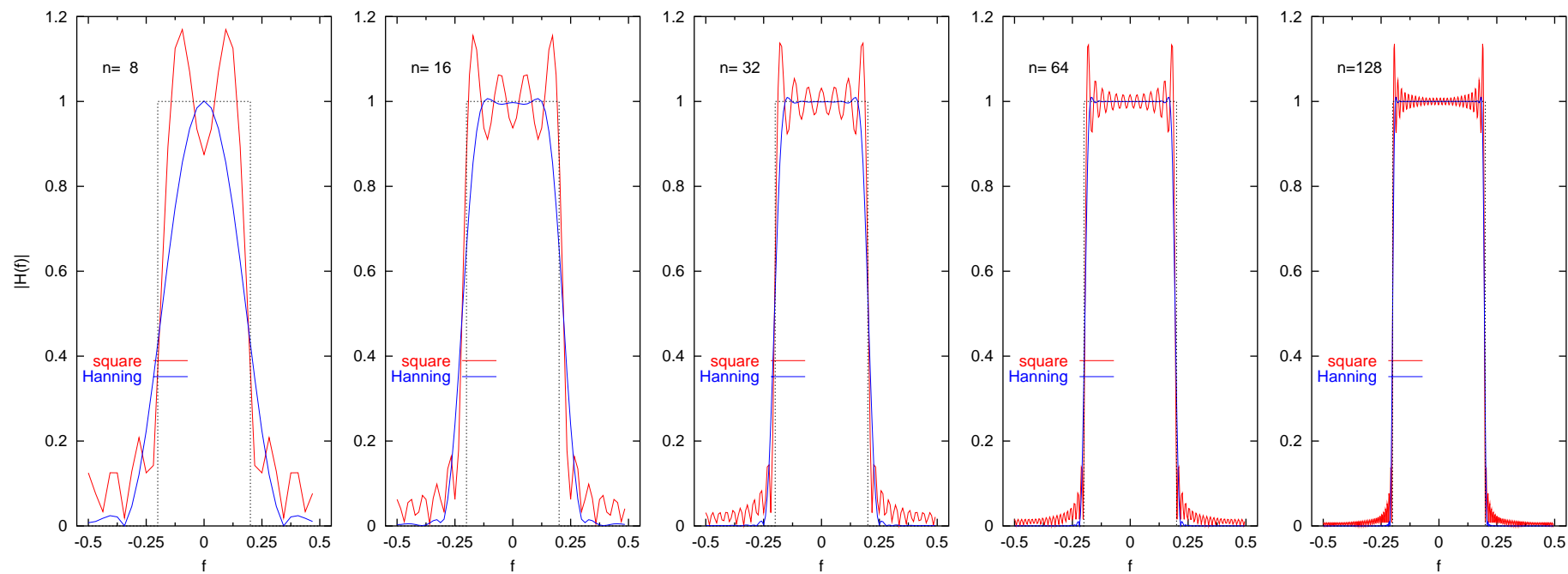
Współczynniki dolnoprzepustowego filtru FIR



Współczynniki dolnoprzepustowych filtrów FIR z oknem Hanninga



Dolnoprzepustowe filtry FIR dyskretyzowane w różnej ilości punktów



Uwagi

- Na ogół potrzeba wysokiego rzędu, aby filtr FIR był przyzwoity.
- Wprowadzenie funkcji okna **zmniejsza** gwałtowne oscylacje w pobliżu krawędzi (*ripple*), ale **zwiększa** obszar spadku/narastania funkcji przejścia (*roll-off*).
- Projektowanie filtrów jest tyleż nauką, co sztuką. Projektując filtr trzeba zwracać uwagę na
 - *ripple*,
 - *roll-off*,
 - (nie)liniowość fazy,
 - wymagania odnośnie pamięci i czasu przetwarzania.

Zazwyczaj nie da się zoptymalizować wszystkich wymagań jednocześnie ☹.

- Istnieje **bardzo bogata** literatura dotycząca projektowania filtrów.

Liniowy filtr IIR

ma postać

$$y_n = \sum_{k=-s}^q \alpha_k x_{n-k} + \sum_{k=1}^p \beta_k y_{n-k}, \quad (26)$$

gdzie $p \geq 1$, x_n jest (dyskretnym) sygnałem wejściowym, y_n sygnałem wyjściowym. Dla wygody zapisu przyjmujemy, że filtr jest kausalny ($s = 0$); dopuszczenie akausalności *niewiele* zmienia w naszych rozważaniach.

Problem

Filtr *IIR* ma sprzężenie zwrotne. Oznacza to, że, w zasadzie, może on dawać niezerowe wyjście nieskończenie długo po ustaniu sygnału wejściowego. Jak temu zapobiec?

Czy możemy być pewni, że jeśli sygnał *wejściowy* jest stacjonarny, to stacjonarny jest również sygnał *wyjściowy*?

Liniowe równania różnicowe

Jednorodne liniowe równanie różnicowe:

$$z_n = \beta_1 z_{n-1} + \beta_2 z_{n-2} + \cdots + \beta_p z_{n-p} \quad (27)$$

Niejednorodne liniowe równanie różnicowe:

$$z_n = \beta_1 z_{n-1} + \beta_2 z_{n-2} + \cdots + \beta_p z_{n-p} + \varphi \quad (28)$$

Twierdzenie: Rozwiązanie ogólne niejednorodnego liniowego równania różnicowego jest równe sumie rozwiązania szczegółowego równania niejednorodnego i rozwiązania ogólnego równania jednorodnego.

Dla badania stabilności filtrów *IIR* wystarczy zatem zająć się równaniami jednorodnymi.

Zanurzenie w przestrzeni wielowymiarowej

Zdefiniujmy $\mathbf{z}_n = [z_n, z_{n-1}, \dots, z_{n-p+1}]^T \in \mathbb{R}^p$. Wówczas równanie (27) możemy zapisać w postaci

$$\mathbf{z}_n = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}_{n-1}. \quad (29)$$

Widać, że rozwiązanie równania (29) będzie stabilne (nie będzie wybuchać), jeśli *wszystkie wartości własne będą na moduł mniejsze od 1*.

Wyznacznik charakterystyczny ma postać

$$W_p = \det \begin{bmatrix} \beta_1 - \lambda & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_{p-1} & \beta_p \\ 1 & -\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= -\lambda W_{p-1} + (-1)^{p+1} \beta_p = \lambda^2 W_{p-2} + (-1)^{p+1} \beta_{p-1} \lambda + (-1)^{p+1} \beta_p = \dots \\ &= (-1)^{p+1} \left(-\lambda^p + \beta_1 \lambda^{p-1} + \beta_2 \lambda^{p-2} + \cdots + \beta_p \right) \end{aligned} \quad (30)$$

Widzimy zatem, że...

Warunek stabilności filtra IIR

Filtr IIR (26) jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastki równania

$$\lambda^p - \beta_1 \lambda^{p-1} - \beta_2 \lambda^{p-2} - \dots - \beta_p = 0 \quad (31)$$

leżą wewnątrz okręgu jednostkowego.

Konfuzja terminologiczna

Czasami — z powodów, które już za chwilę staną się oczywiste — powyższy warunek formułuje się dla *odwrotności* λ , a zatem

Filtr *IIR* (26) jest stabilny wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastki równania

$$1 - \beta_1 u - \beta_2 u^2 - \dots - \beta_p u^p = 0 \quad (32)$$

leżą *na zewnątrz* okręgu jednostkowego.

Warunki (31), (32) są równoważne, ale trzeba uważać, żeby się nie pomylić.

Przykład

Rozważmy filtr

$$y_n = \beta_1 y_{n-1} + x_n. \quad (33)$$

Jego wielomianem charakterystycznym jest

$$\beta(z) = 1 - \beta_1 z. \quad (34)$$

Widać, że jeśli $|\beta_1| > 1$, y_n wybucha, musi zatem być $|\beta_1| < 1$, jednak w takiej sytuacji jedyny pierwiastek wielomianu charakterystycznego (34), równy $1/\beta_1$, leży na zewnątrz przedziału (a więc i okręgu) jednostkowego.

Funkcja przejścia filtru IIR

Przekształcam wyrażenie (26) do postaci

$$y_n - \beta_1 y_{n-1} - \dots - \beta_p y_{n-p} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n-1} + \dots + \alpha_q x_{n-q}, \quad (35)$$

a następnie, tak jak dla filtrów *FIR*, biorę transformatę Fouriera. Ostatecznie jako funkcję przejścia dostaję (Δ jest krokiem próbkowania)

$$\mathcal{H}(f_m) = \frac{\sum_{k=0}^q \alpha_k \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right)^k}{1 - \sum_{j=1}^p \beta_j \left(e^{2\pi i f_m \Delta} \right)^j}. \quad (36)$$

Często przyjmuje się $\Delta = 1$. Wówczas przedział Nyquista wynosi $[-1/2, 1/2]$.

Projektowanie filtrów IIR

Trudność w projektowaniu filtrów IIR polega na unikaniu biegunów prowadzących do niestabilności. Na ogół nie jest *łatwo* stwierdzić czy biegun leży na zewnątrz, czy też wewnątrz okręgu jednostkowego. Dlatego też używa się następującej *transformacji biliniowej*:

$$z = \frac{1 - iw}{1 + iw} \quad \text{czyli} \quad w = i \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (37)$$

Obliczmy

$$|z|^2 = \frac{1 - iw}{1 + iw} \cdot \frac{1 + i\bar{w}}{1 - i\bar{w}} = \frac{1 + i\bar{w} - iw + |w|^2}{1 - i\bar{w} + iw + |w|^2} = \frac{1 + |w|^2 + 2 \operatorname{Im} w}{1 + |w|^2 - 2 \operatorname{Im} w}. \quad (38)$$

Dla stabilności filtru, dopuszczamy bieguny $|z|^2 > 1$. Z (38) wynika, że musi być $\operatorname{Im} w > 0$. Po zastosowaniu transformacji (37), *dopuszczamy jedynie bieguny leżące na górnej półpłaszczyźnie*.

Procedura projektowania filtra IIR

- Dana jest „idealna” funkcja przejścia $\mathcal{H}(f)$.
- Znajdujemy funkcję **wymierną** dostatecznie dobrze przybliżającą $\mathcal{H}(f)$. Oznaczamy ją $H(f)$. Musi być ona rzeczywista, nieujemna i ograniczona. Traktujemy ją jako funkcję zmiennej „ w ”, $f \rightarrow w$.
- Znajdujemy bieguny $H(f)$. Połowa leżeć będzie na górnej, połowa na dolnej półpłaszczyźnie. Bierzemy tylko iloczyn czynników z biegunami górnej półpłaszczyzny, podstawiamy $f = i(z - 1)/(z + 1)$, upraszczamy, identyfikujemy współczynniki.

Przykład: Filt Butterwortha rzędu N

Jak poprzednio, projektujemy filtr dolnoprzepustowy. Schodkową funkcję przejścia przybliżamy za pomocą

$$H(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^{2N}}, \quad (39)$$

gdzie f_0 jest częstotliwością obcięcia. Filtr oparty na funkcji (39) nazywa się *filtrem Butterwortha rzędu N* . Bieguny funkcji (39) leżą na okręgu o promieniu f_0 , symetrycznie względem osi rzeczywistej.

Najprostszym przybliżeniem jest przypadek $N = 1$. Mamy

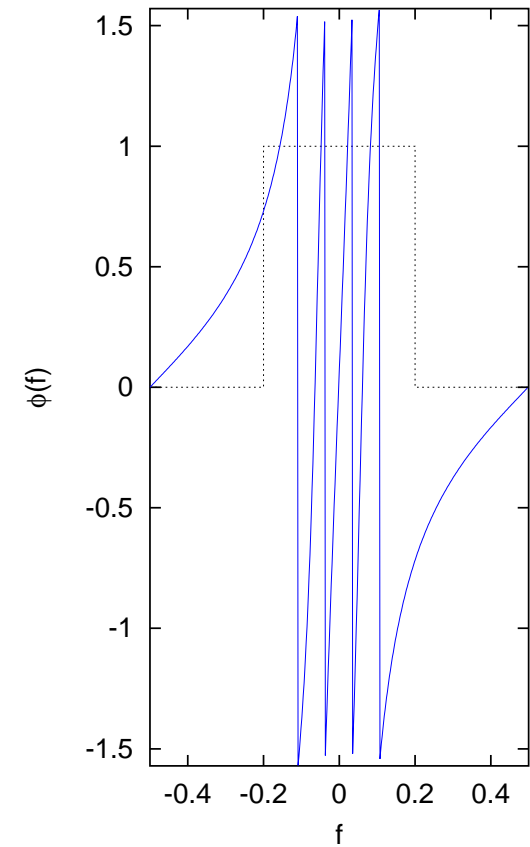
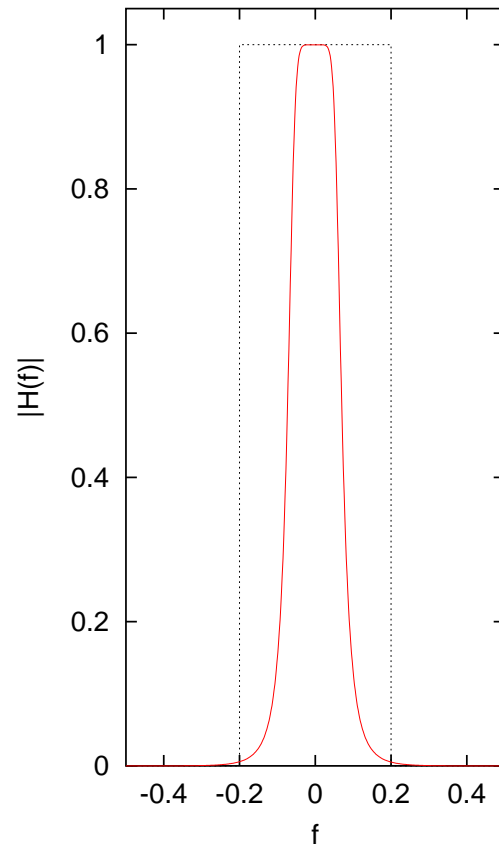
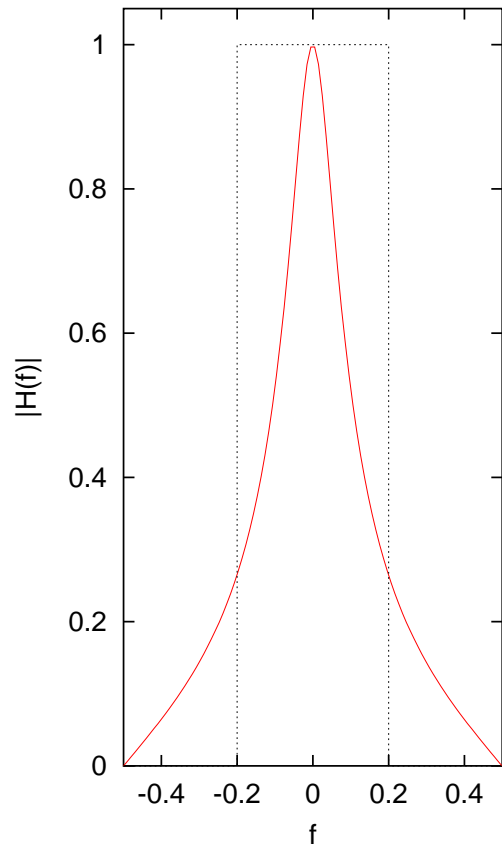
$$\frac{1}{1 + \left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = \frac{i}{\frac{f}{f_0} + i} \cdot \frac{-i}{\frac{f}{f_0} - i}. \quad (40)$$

Bierzemy zatem

$$\begin{aligned} \frac{-if_0}{f - if_0} &= \frac{-if_0}{i\frac{z-1}{z+1} - if_0} = \frac{-f_0 - f_0z}{z - 1 - f_0z - f_0} = \frac{-f_0 - f_0z}{-(1 + f_0) + (1 - f_0)z} \\ &= \frac{\frac{f_0}{1+f_0} + \frac{f_0}{1+f_0}z}{1 - \frac{1-f_0}{1+f_0}z} \end{aligned} \quad (41)$$

Współczynnikami filtru są $\alpha_0 = \alpha_1 = f_0/(1 + f_0)$, $\beta_1 = (1 - f_0)/(1 + f_0)$.

Po lewej: funkcja przejścia filtru Butterwortha rzędu pierwszego. W środku: funkcja przejścia filtru Butterwortha rzędu czwartego. Po prawej: faza filtru Butterwortha rzędu czwartego.



Najbardziej popularne typy filtrów

1. Filtr Butterwortha

- Zobacz wyżej (39).
- Pierwszych $2N - 1$ pochodnych $\mathcal{H}(f)$ znika w $f = 0$ — filtr Butterwortha jest *maksymalnie płaski*.
- Bieguny leżą na okręgu.
- Używany w zastosowaniach audio.

2. Filtry Czebyszewa.

- Ma znacznie bardziej stromy spadek (*rolloff*), ale pojawiają się *ripple*.
- Są dwa typy filtrów Czebyszewa, w zależności od tego, gdzie dopuszczamy *ripple*: *Ripple* w paśmie przenoszenia (*passband*):

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1 + [T_N(f/f_p)]^2}. \quad (42)$$

Ripple w paśmie zatrzymywanym (*stopband*):

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1 + \left[\frac{T_N(f_s/f_p)}{T_N(f_s/f)} \right]^2}. \quad (43)$$

W powyższych wyrażeniach T_N oznacza wielomian Czebyszewa stopnia N , f_p oznacza (górną) granicę pasma przenoszenia, $f_s > f_p$ oznacza (dolną) granicę pasma zatrzymywanego.

- Z uwagi na *ripple*, nie używa się go w zastosowaniach audio. Jest znakomity, jeśli pasmo przenoszenia obejmuje tylko jedną „interesującą” częstotliwość — na przykład gdy trzeba wyciąć wyższe harmoniczne.

3. Filtry eliptyczne

$$\mathcal{H}(f) = \frac{1}{1 + [R_N(f/f_p)]^2}, \quad (44)$$

gdzie R_N jest pewną funkcją wymierną, w której zera licznika leżą w przedziale $[-1/2, 1/2]$, zaś zera mianownika leżą *poza* tym przedziałem, przy czym $R_N(1/z) = 1/R_N(z)$. Bieguny takiego filtru leżą na elipsie.

4. Filtry Bessela, o stałym opóźnieniu w paśmie przenoszenia.

Wszystkie powyższe filtry daje się zrealizować analogowo.

Projektowanie analogowych i cyfrowych filtrów IIR jest bardzo ważnym zagadnieniem w elektronice, telekomunikacji itp.

Filtry IIR wymagają znacznie niższego rzędu niż filtry FIR o podobnej dokładności. Bierze się to stąd, że aproksymacja funkcjami wymiernymi jest lepsza od aproksymacji wielomianowej.