

Analiza szeregów czasowych:

3. Filtr Wienera

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

semestr letni 2006/07

Filtr Wienera (“filtr optymalny”)

Przypuśćmy, że pewien układ (fizyczny, biologiczny, socjoekonomiczny, ...) wysłał sygnał $u(t)$. Odbieramy go za pomocą urządzenia o znanej funkcji odpowiedzi $r(t)$. Dodatkowo, sygnał jest *zaszumiony*, przy czym szum modelujemy poprzez biały szum gaussowski (GWN, Gaussian white noise), co jest naturalne, jeśli źródłem szumu są duże układy fizyczne w stanie bliskim równowadze termodynamicznej (np. prądy termiczne w urządzeniu elektronicznym, zakłócenia fal radiowych spowodowane rozpraszaniem w atmosferze itp). Zakładamy też, że szum **nie jest skorelowany** z sygnałem. Na wyjściu odbiornika widzimy ostatecznie

$$c(t) = s(t) + \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(t - \tau)u(\tau) d\tau + \eta(t). \quad (1)$$

Mierzymy $c(t)$, znamy $r(t)$, czynimy pewne założenia odnośnie $\eta(t)$ — co możemy powiedzieć o $u(t)$? Chcemy skonstruować pewien estymator $\tilde{u}(t)$, optymalny w sensie najmniejszych kwadratów*:

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |u(t) - \tilde{u}(t)|^2 dt \right\rangle = \text{minimum}, \quad (2)$$

gdzie $\langle \dots \rangle$ oznacza średniowanie po realizacjach szumu. Z tożsamości Parsewala wynika, że także dla transformacji Fouriera zachodzić będzie

$$\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} |U(f) - \tilde{U}(f)|^2 df \right\rangle = \text{minimum}. \quad (3)$$

*Bo błędy są gaussowskie!

$S(f) = U(f)R(f)$. Postulujemy następującą postać szukanego estymatora w domenie Fourierowskiej:

$$\tilde{U}(f) = \frac{C(f)\Phi(f)}{R(f)}. \quad (4)$$

Ostatecznie musimy zminimalizować ze względu na Φ wyrażenie

$$\begin{aligned}
& \left\langle \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{[S(f) + N(f)]\Phi(f)}{R(f)} - \frac{S(f)}{R(f)} \right|^2 df \right\rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^{-2} \langle |(S(f) + N(f))\Phi(f) - S(f)|^2 \rangle df \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^{-2} \langle |S(f)|^2 |\Phi(f)|^2 + S(f)N^*(f) |\Phi(f)|^2 \\
&\quad + S(f)^* N(f) |\Phi(f)|^2 + |N(f)|^2 |\Phi(f)|^2 - |S(f)|^2 \Phi(f) \\
&\quad - N(f)S^*(f) \Phi(f) - |S(f)|^2 \Phi^*(f) - N^*(f)S(f) \Phi^*(f) + |S(f)|^2 \rangle df \tag{5}
\end{aligned}$$

Zaznaczone wyrażenia to wartości oczekiwane iloczynu sygnału i szumu — znikają na mocy założenia o niezależności szumu od sygnału. Pozostaje

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^{-2} \left(|S(f)|^2 \left(|\Phi(f)|^2 - \Phi(f) - \Phi^*(f) + 1 \right) \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. + \langle |N(f)|^2 \rangle |\Phi(f)|^2 \right) df \\
 & \int_{-\infty}^{\infty} |R(f)|^{-2} \left(|S(f)|^2 |1 - \Phi(f)|^2 + \langle |N(f)|^2 \rangle |\Phi(f)|^2 \right) df = \text{minimum} .
 \end{aligned} \tag{6}$$

Zakładając, że Φ jest rzeczywiste, (6) osiąga minimum dla

$$\Phi(f) = \frac{|S(f)|^2}{|S(f)|^2 + \langle |N(f)|^2 \rangle}. \quad (7)$$

Jest to tak zwany *filtr Wienera*, zwany także *filtrem optymalnym*.

W wyrażeniu (7) średni poziom szumu znajdujemy badając widmo mocy. Filtr staje się bliski zero tam, gdzie prawie nie ma sygnału i bliski jedynce tam, gdzie prawie nie ma szumu. W ogólności jest to filtracja stratna.

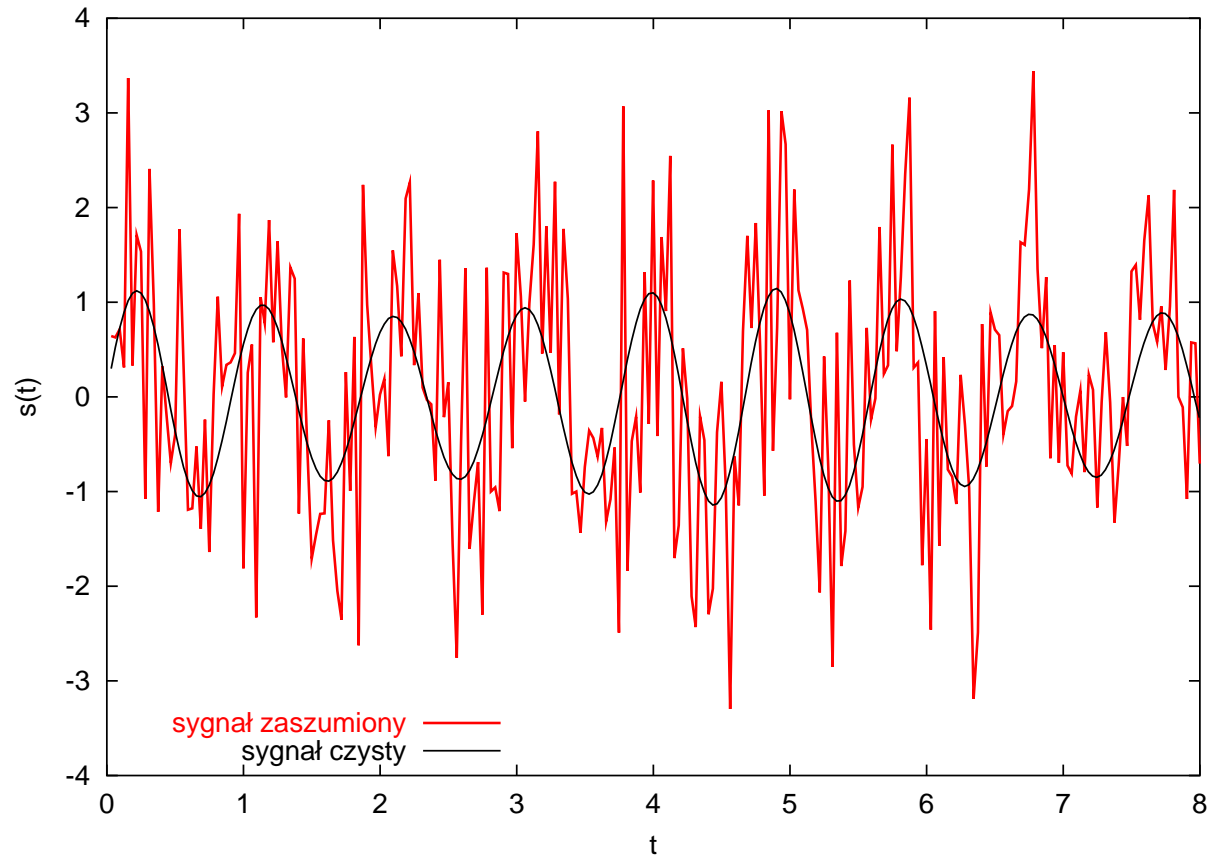
Uwaga!

W praktyce tak $|S(f)|^2$, jak i $|N(f)|^2$ próbujemy *odgadnąć* na podstawie widma mocy sygnału. Wówczas zamiast (7) stosujemy

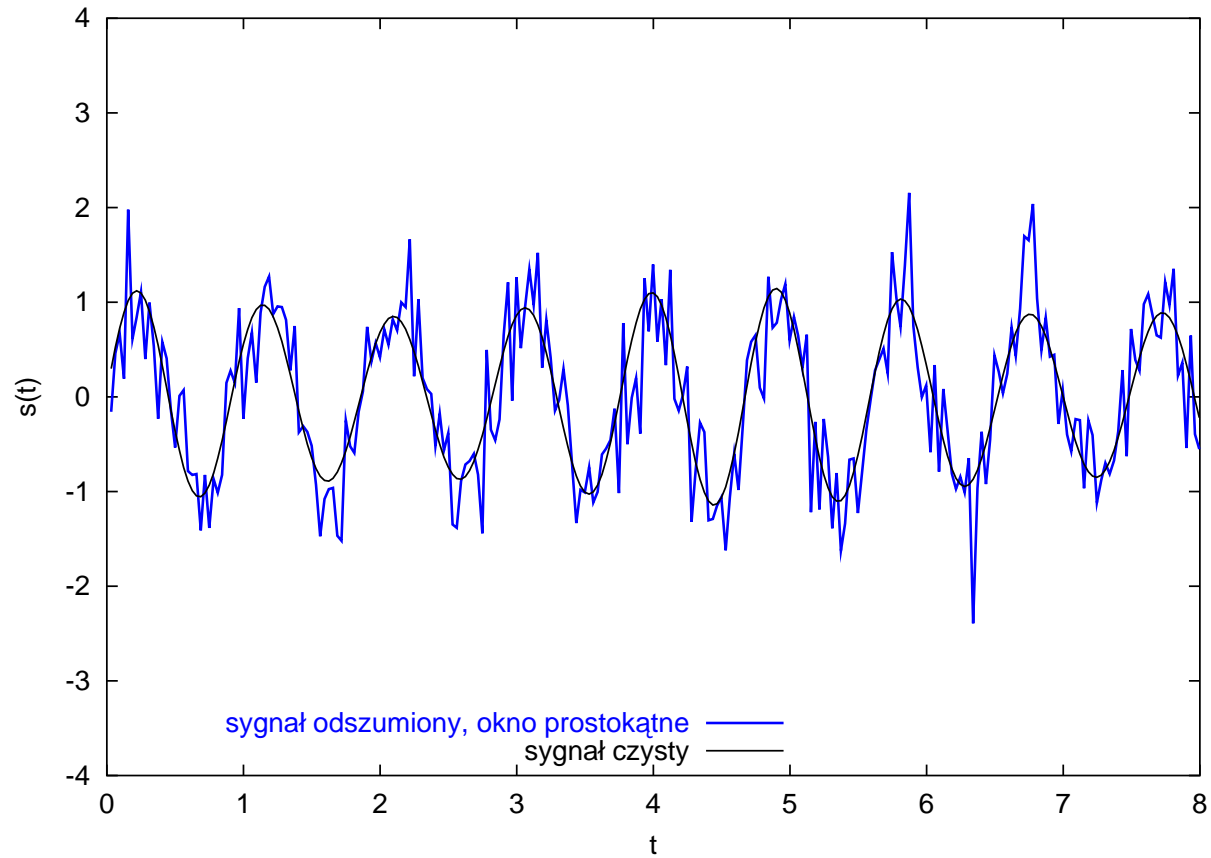
$$\Phi(f) = \begin{cases} \frac{P(f) - \hat{N}(f)}{P(f)} & \text{gdy } P(f) > N(f), \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku.} \end{cases} \quad (8)$$

$P(f)$ oznacza widmo mocy *pełnego* sygnału $c(t)$, zaś $\hat{N}(f)$ to przybliżone widmo mocy szumu, na ogół dopasowane do składowych wysokoczęstotliwościowych. Ważne, że $\Phi(f) \geq 0$. $P(f)$ może być obliczane z wykorzystaniem jakiejś funkcji okna.

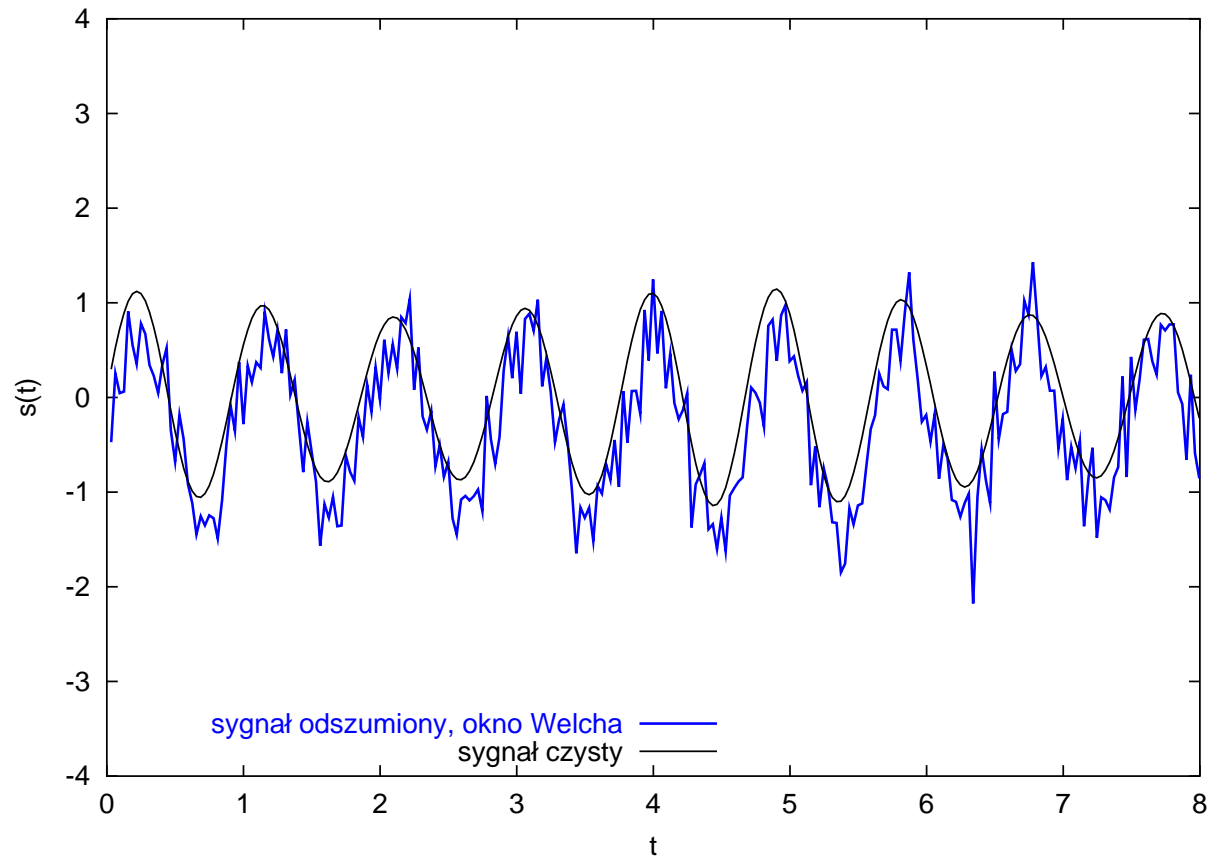
Zaszumiony sygnał i sygnał czysty, na którym go oparto



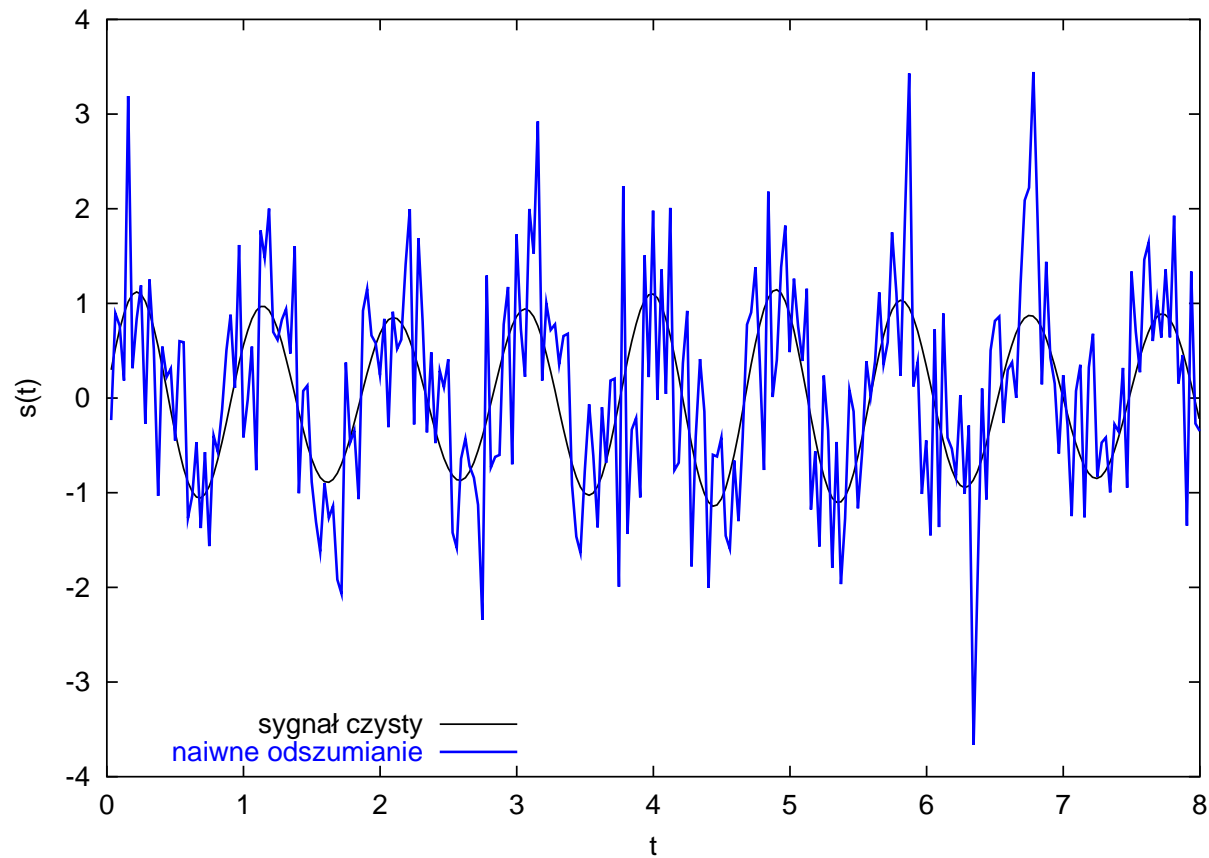
Filtr Wienera oparty na widmie z oknem prostokątnym



Filtr Wienera oparty na widmie z oknem Welch



Zauważmy, iż naiwne odszumianie $P(f) < \text{próg} \implies C(f) = 0$,
daje złe rezultaty:

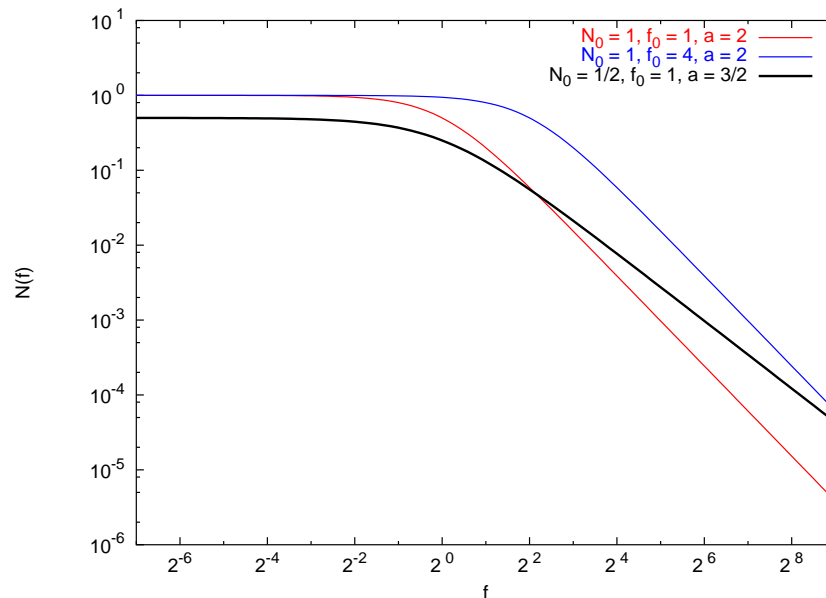


Częsta postać szumu

Widmo szumu często ma postać

$$N(f) = \frac{N_0}{1 + \left| \frac{f}{f_0} \right|^a}. \quad (9)$$

N_0 , f_0 , a uzyskujemy z dopasowania funkcji postaci (9) do danych “doświadczalnych”.

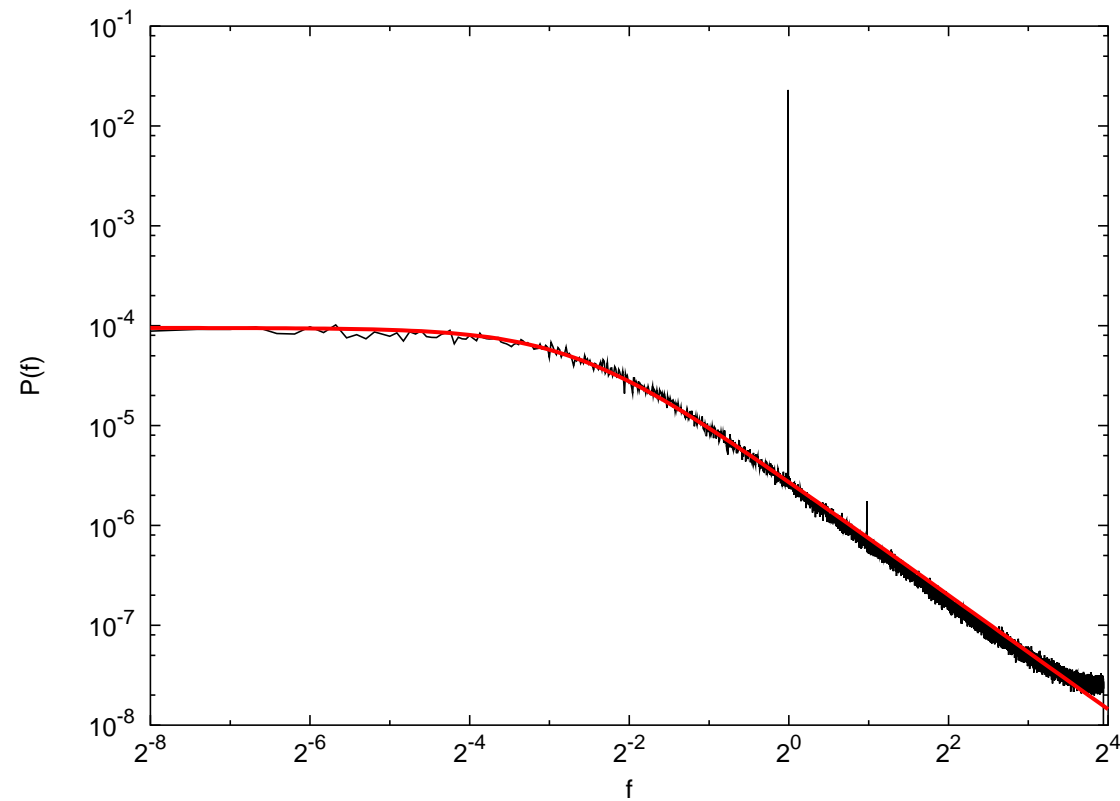


Dla $|f| \gg 1$, $N(f) \sim |f|^{-a}$. W skali podwójnie logarymicznej “ogon” jest prostą o nachyleniu $-a$.

Musi zachodzić $a > 1$.

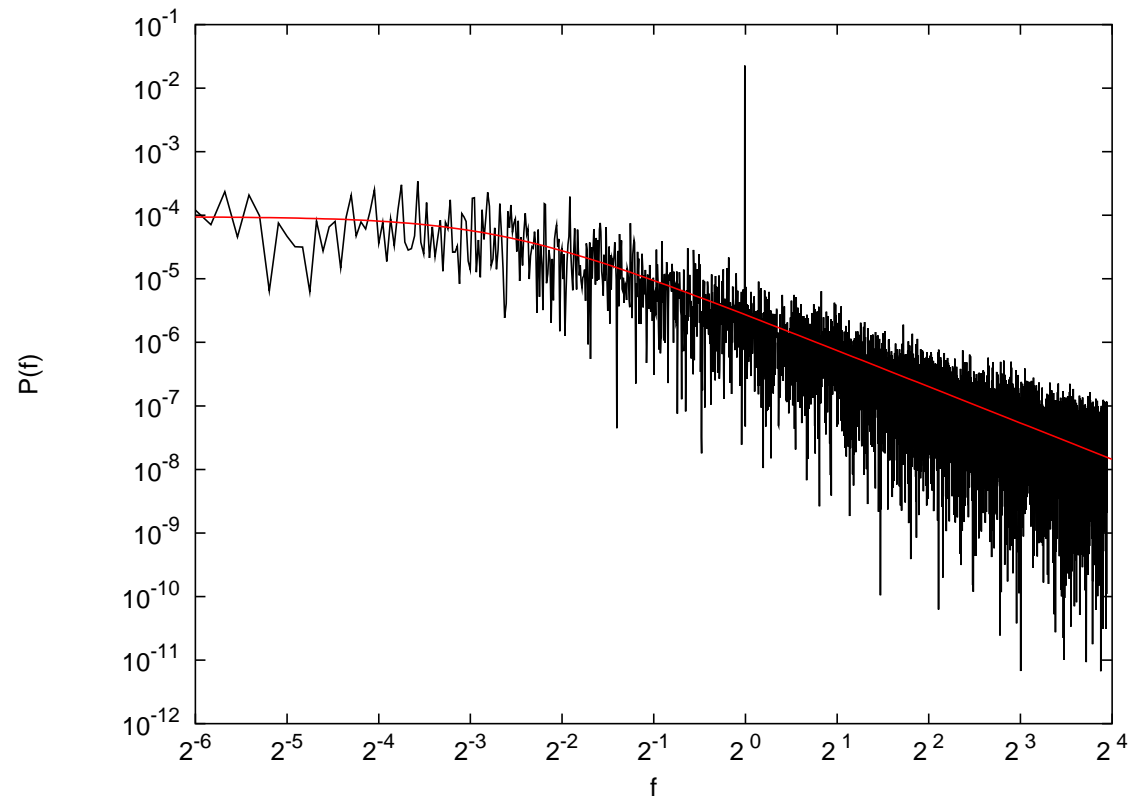
Jeżeli $1 < a < 2$, niekiedy mówi się o **szumie fraktalnym**.

Przykład



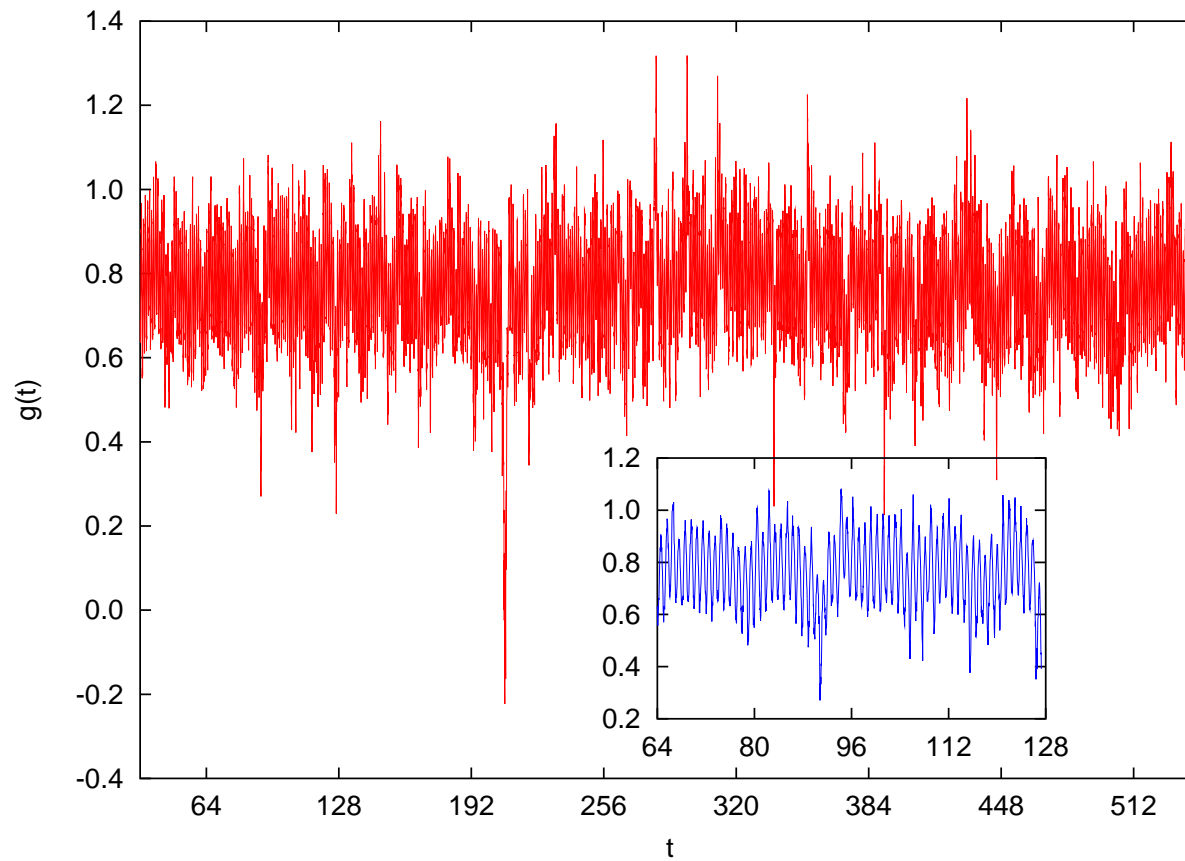
Dopasowana krzywa (9) z parametrami $N_0 = 9.5 \cdot 10^{-4}$, $f_0 = 5/32$, $a = 1.9$.

W praktyce widma są gorszej jakości...

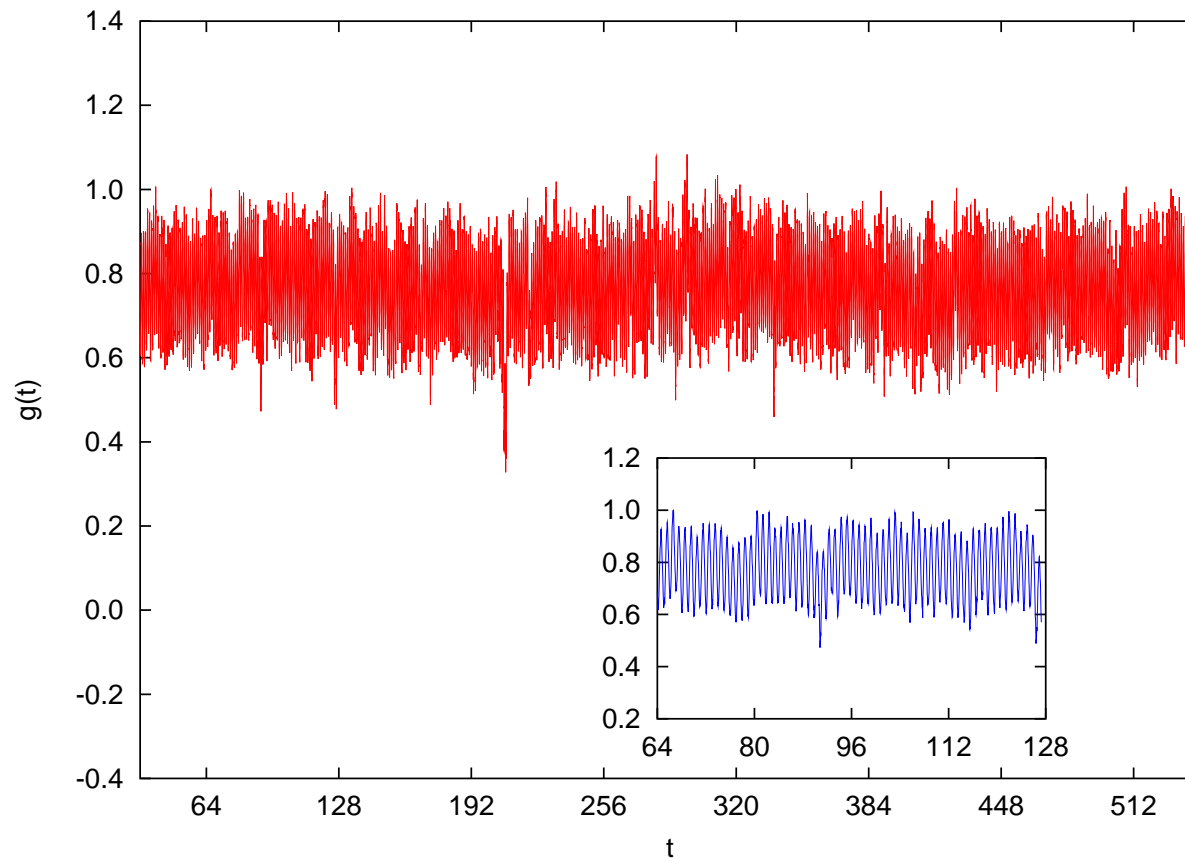


Dopasowana krzywa (9) z parametrami $N_0 = 9.5 \cdot 10^{-4}$, $f_0 = 5/32$, $a = 1.9$.

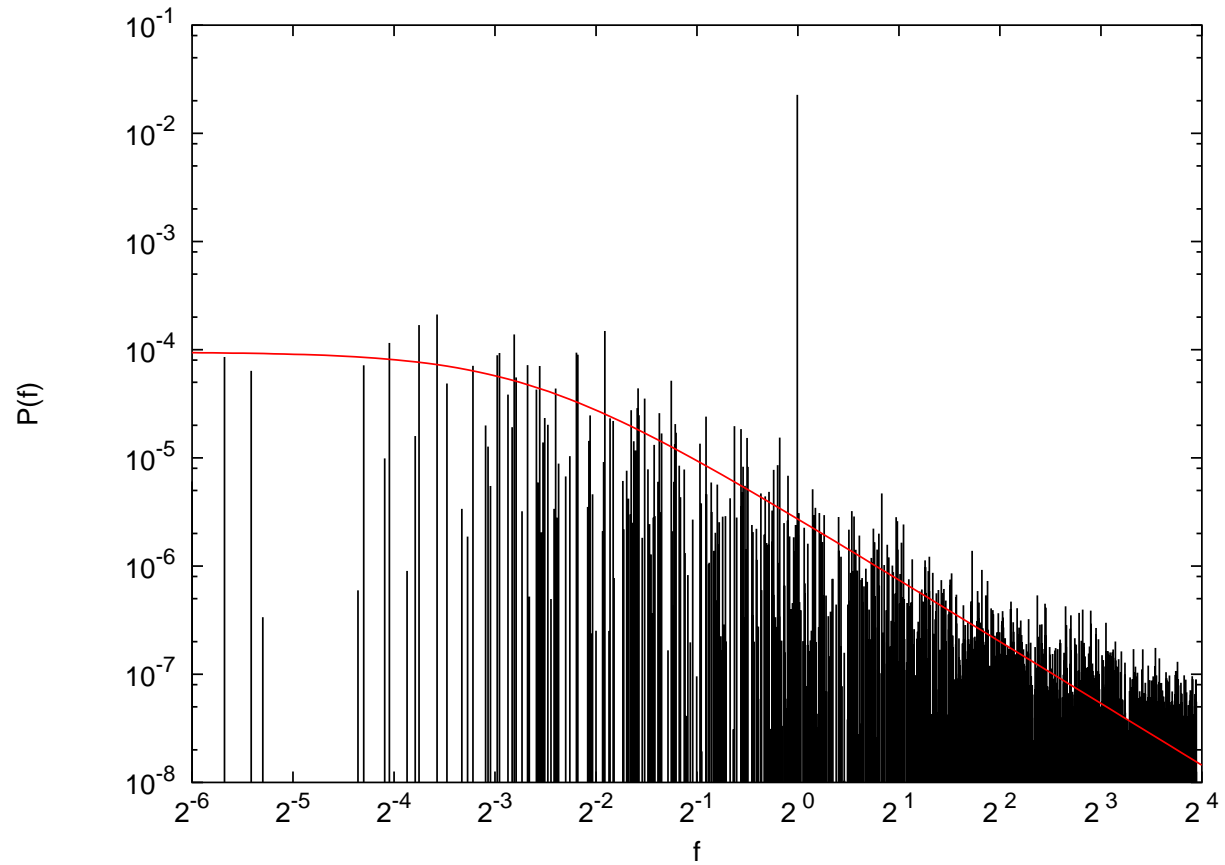
Sygnal przed filtracją



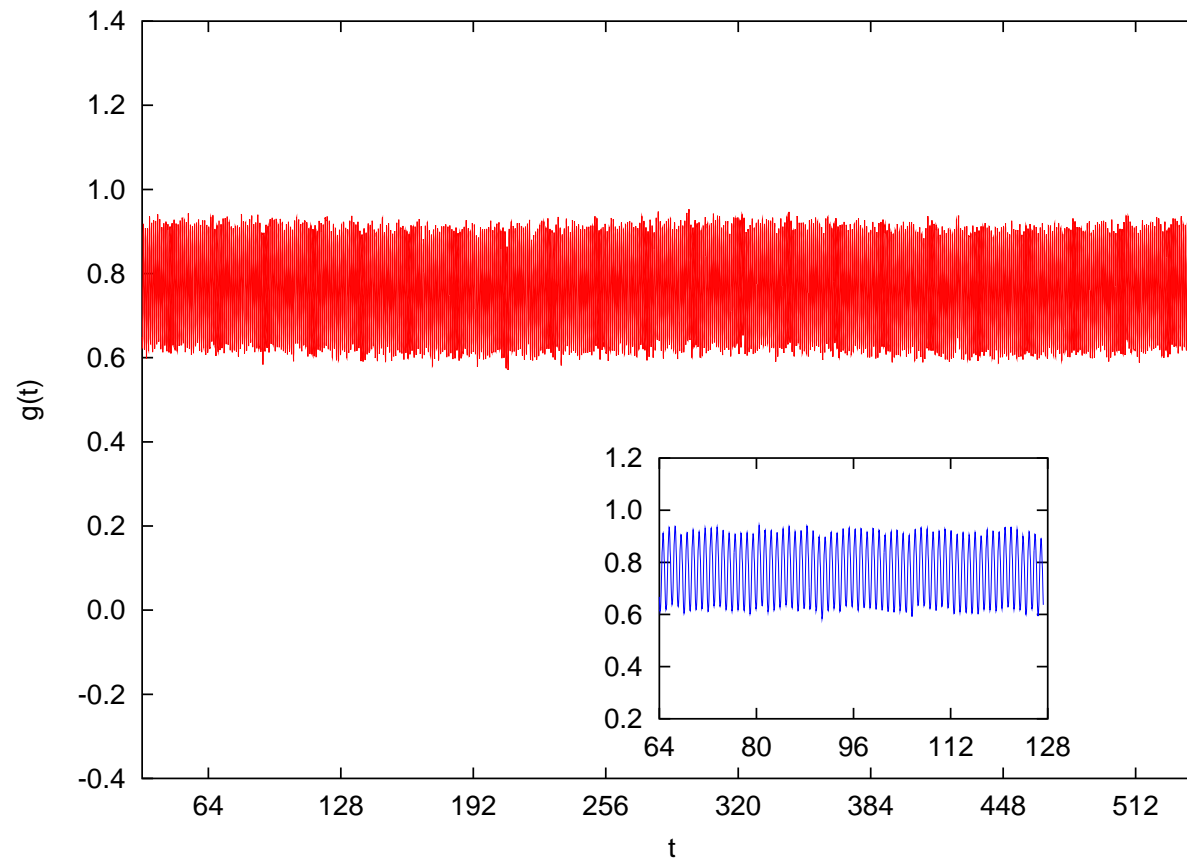
Ten sam sygnał po filtracji



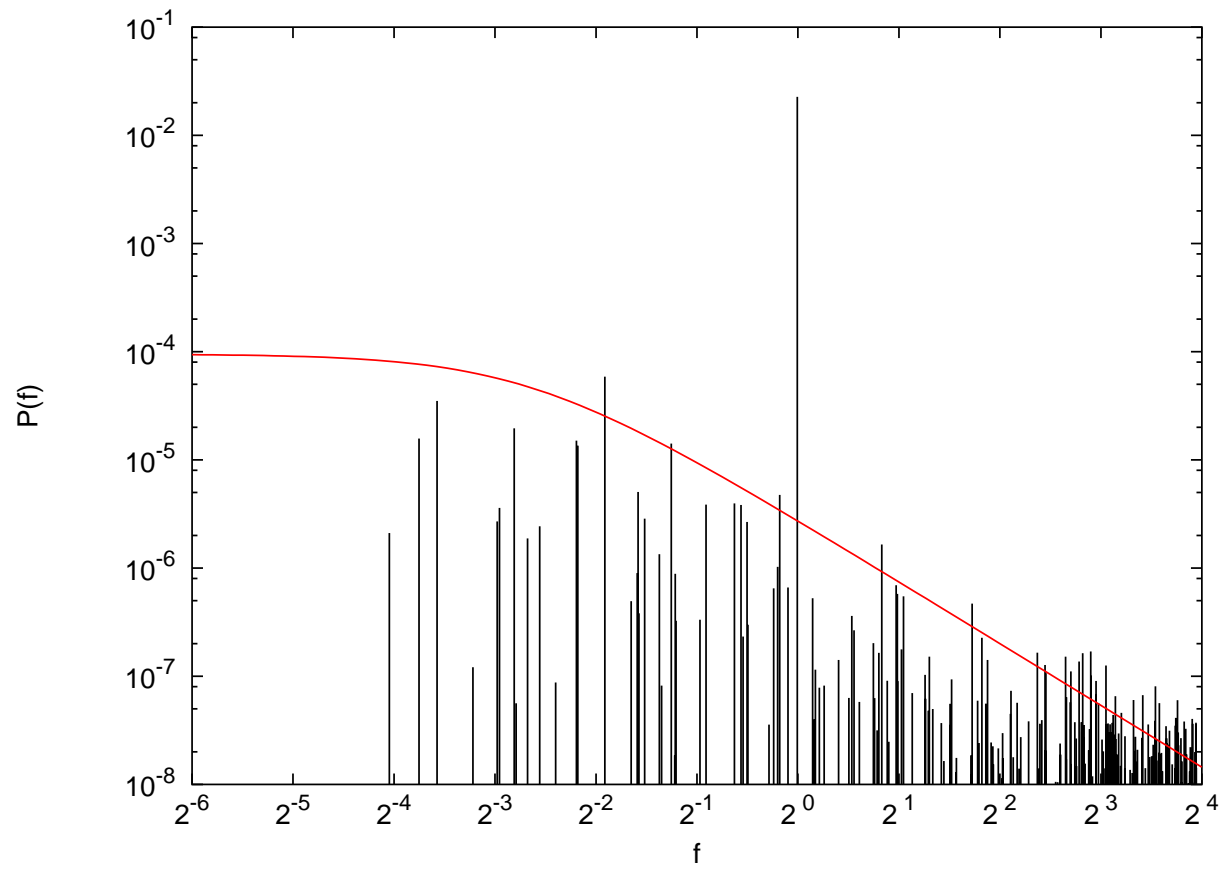
Widmo sygnału przefiltrowanego



Filtrowanie przefiltrowanego: Kaskadowy filtr Wienera



Widmo sygnału po filtrze kaskadowym



Filtr Wienera i szumy niegaussowskie

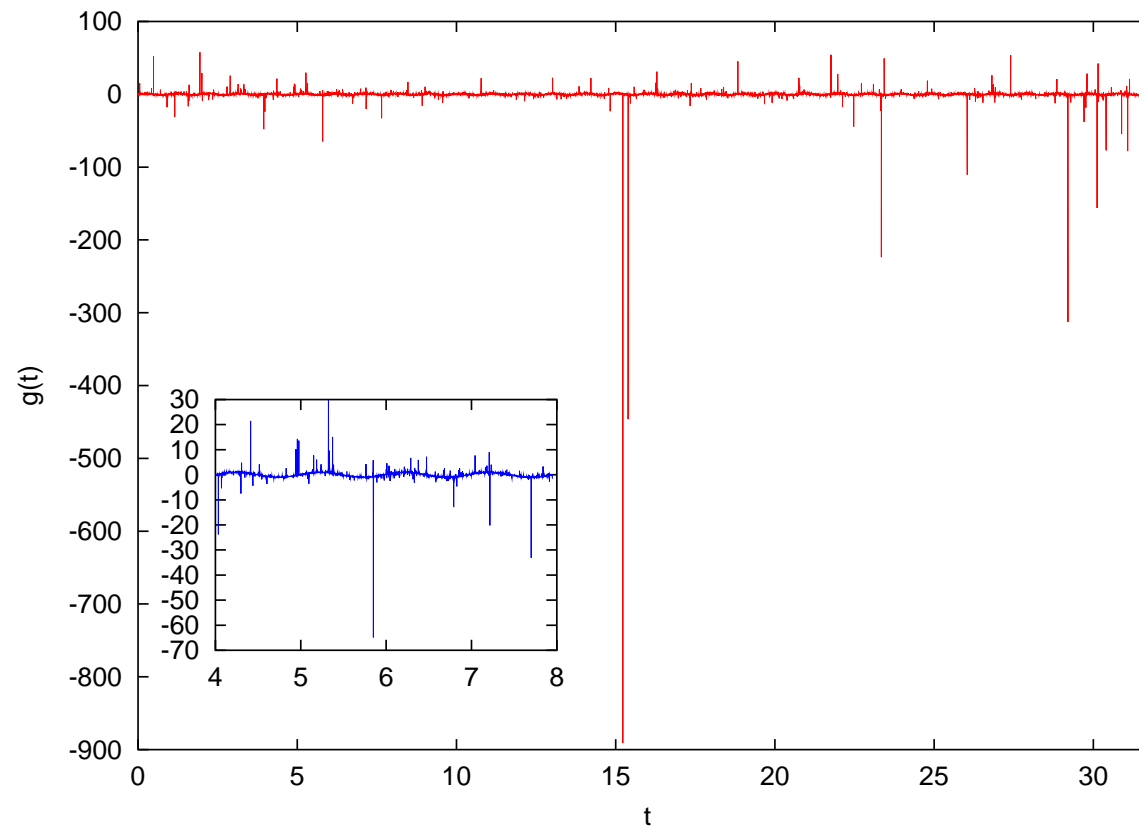
Filtr Wienera wyprowadzony był przy założeniu, że szum jest gaussowski — *tylko wówczas metoda najmniejszych kwadratów odpowiada metodzie największej wiarygodności!* Jak zachowuje się filtr Wienera, gdy szum jest niegaussowski, a w szczególności, gdy drugi (albo i pierwszy) moment szumu nie istnieje, to znaczy gdy szum ma “ciężkie ogony”?

Na następnych rysunkach analizujemy proces generowany przez

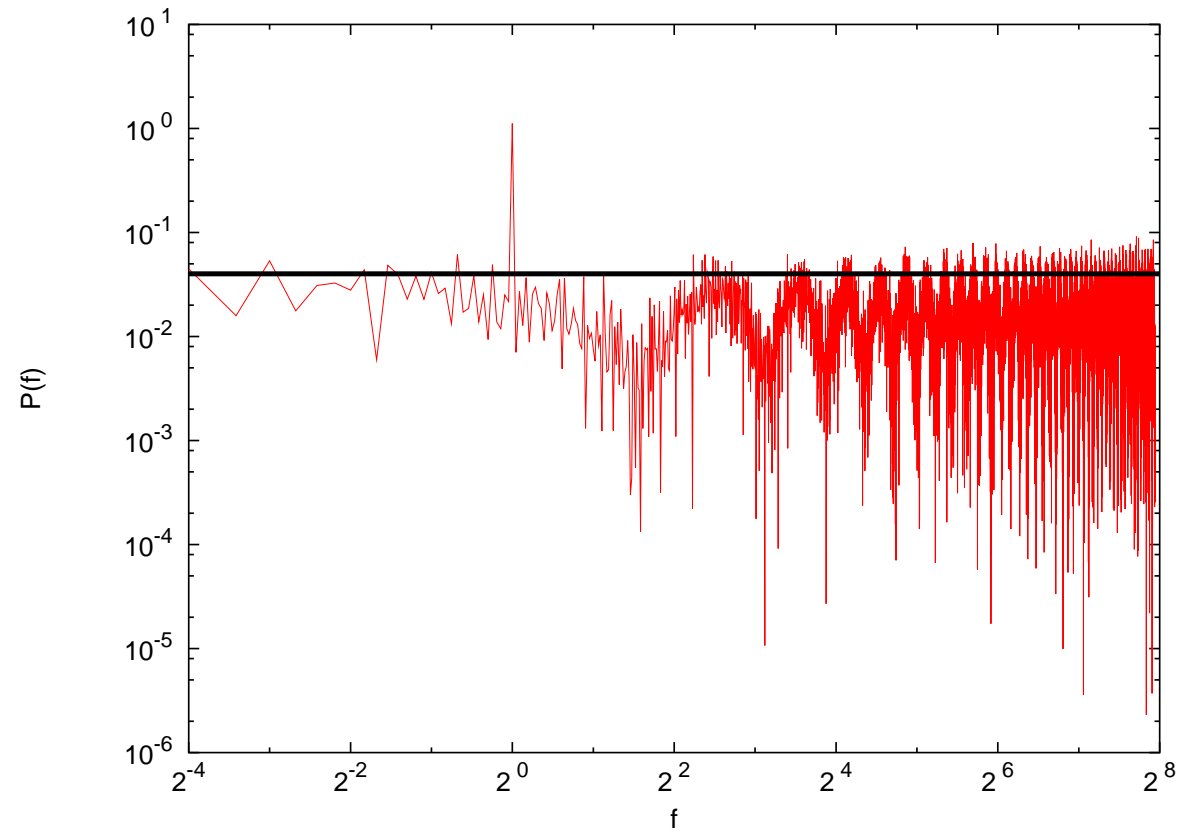
$$g(t) = \sin 2\pi t + \frac{1}{16}\zeta(t), \quad (10)$$

gdzie $\zeta(t)$ są losowane z rozkładu Cauchy’ego oraz $\langle \zeta(t_1)\zeta(t_2) \rangle = 0$ dla $t_1 \neq t_2$.

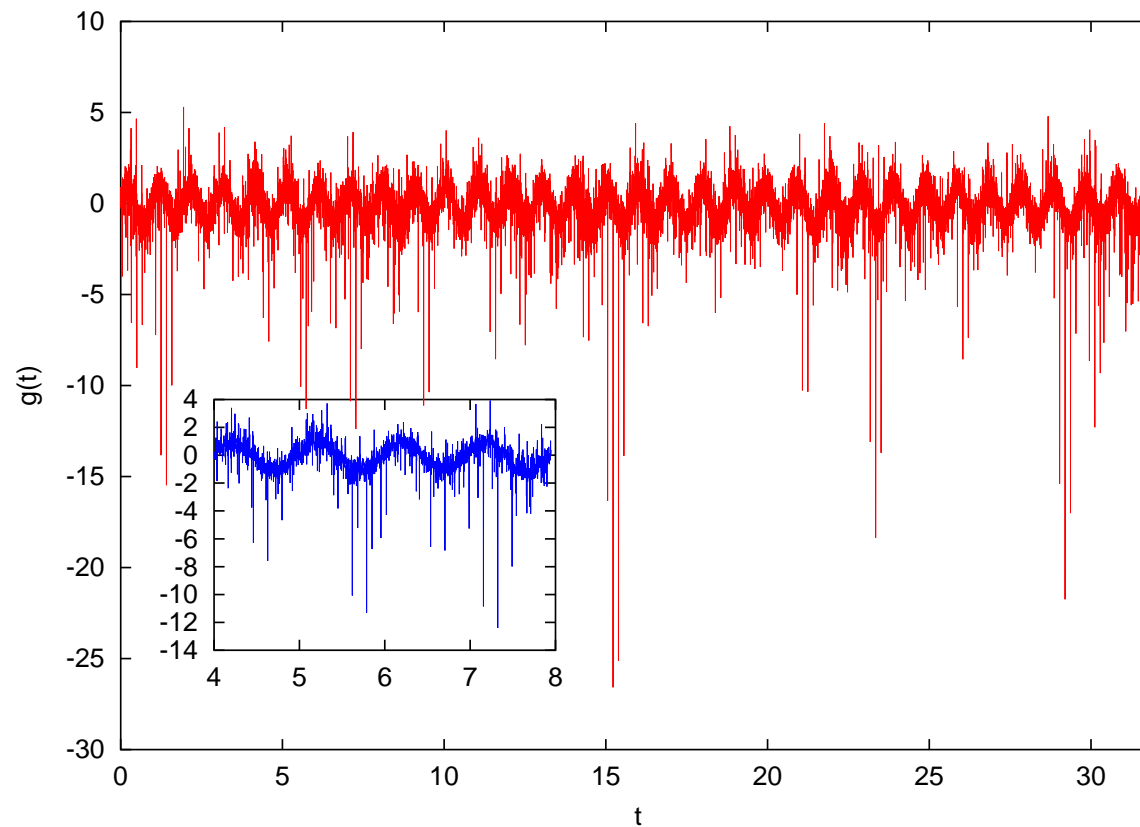
I realizacja: Sygnał przed filtracją



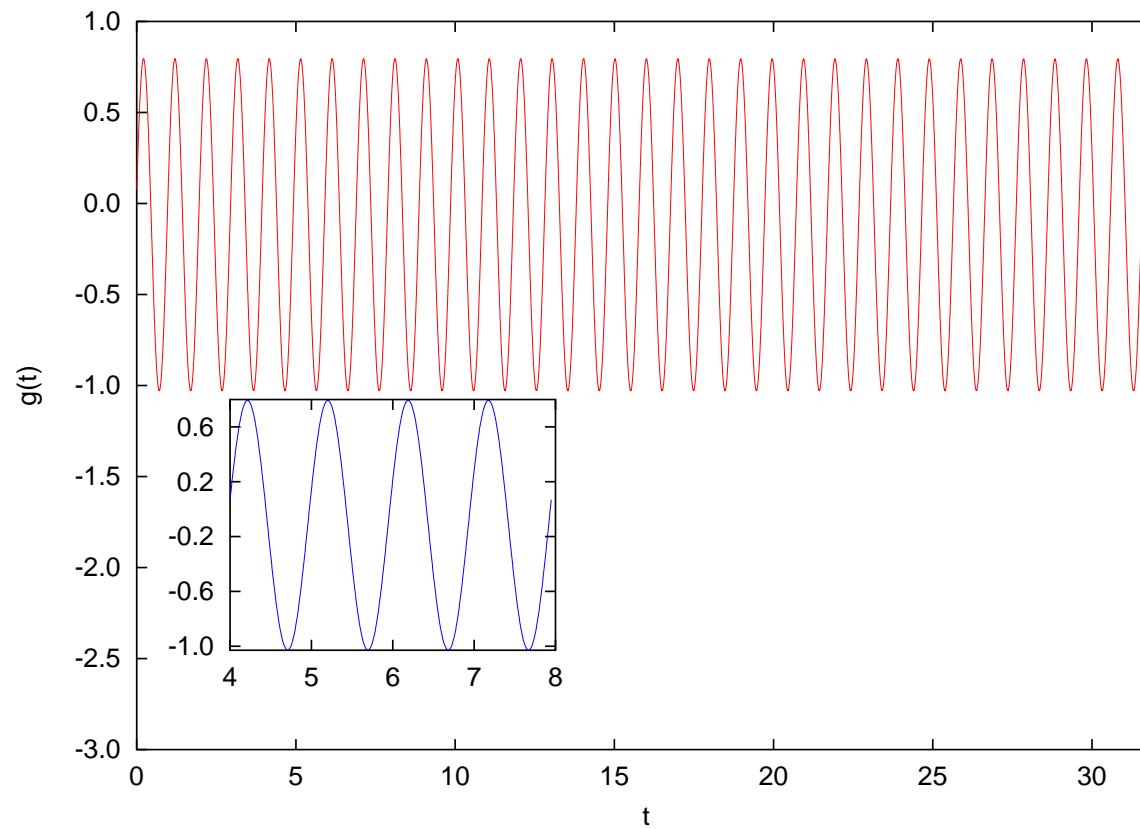
I realizacja: Widmo mocy sygnału nieprzefiltrowanego



I realizacja: Sygnał po filtracji



I realizacja: Sygnał po dwukrotnej filtracji

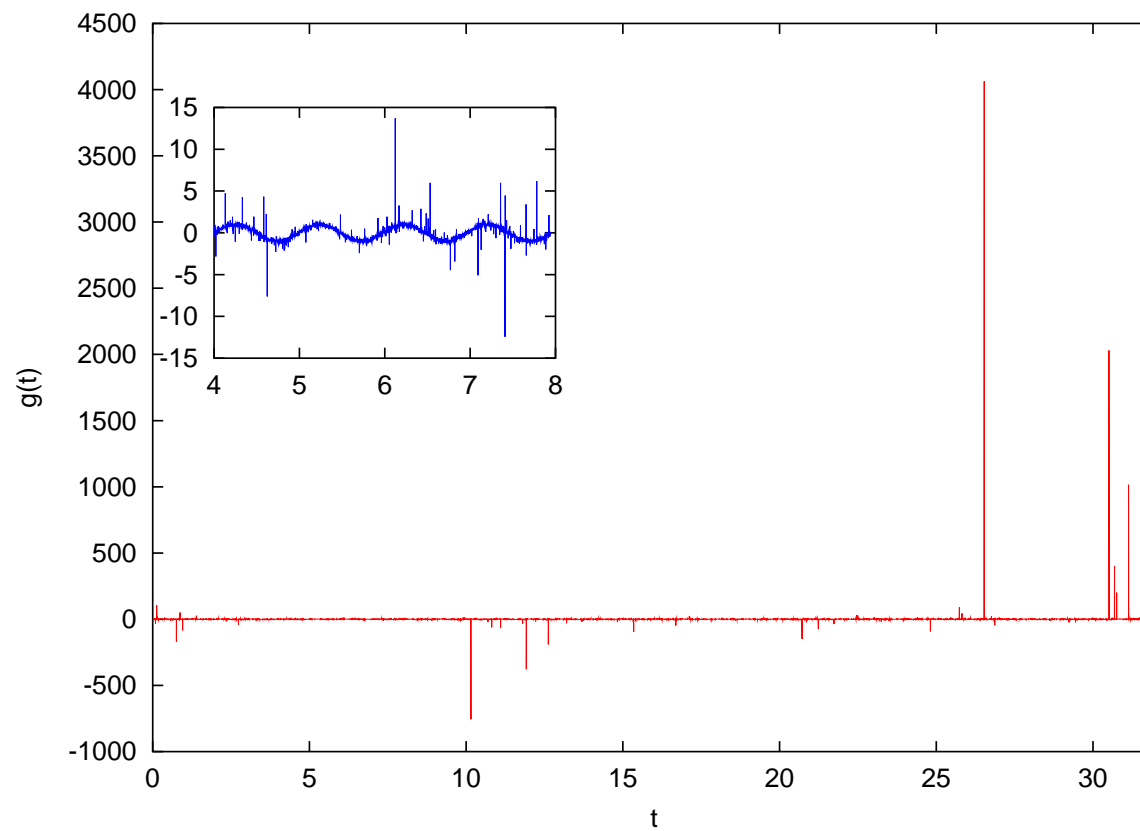


Wygląda to całkiem nieźle.

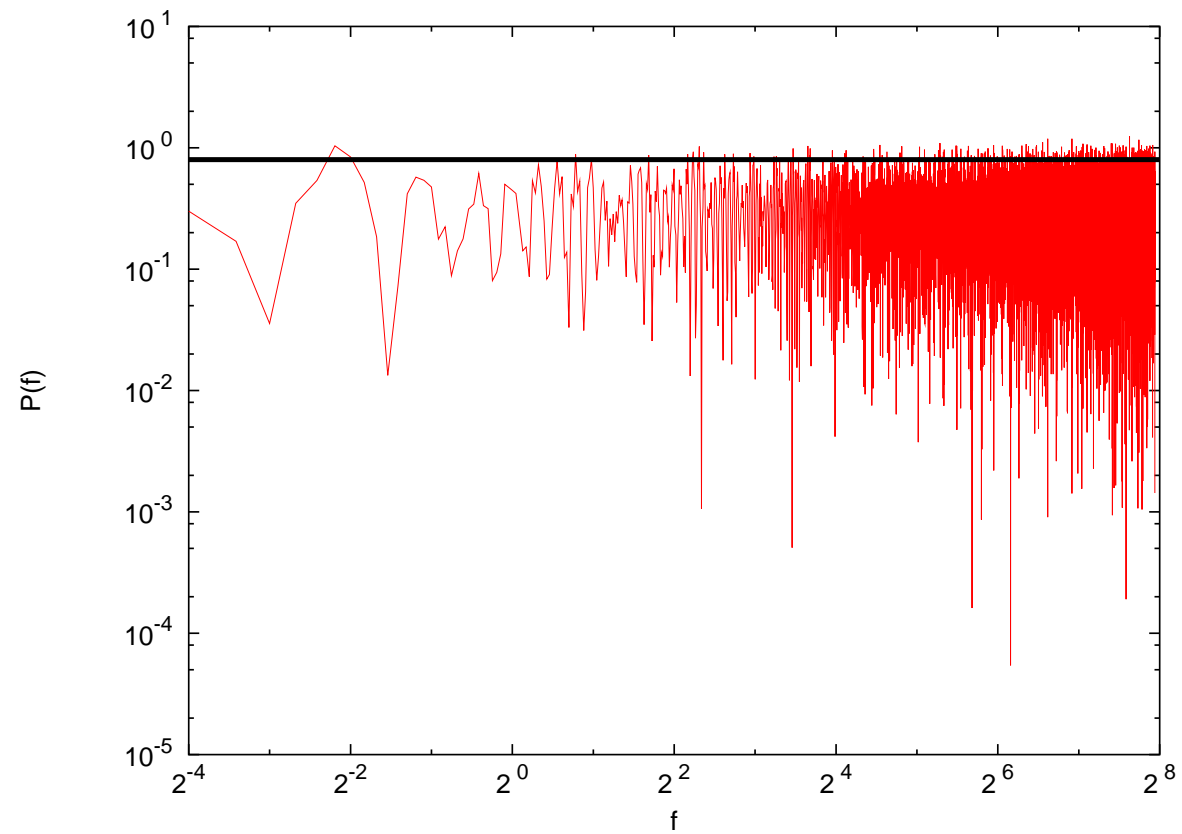
Co prawda sygnał ma tylko jedną, i to *znaną* częstotliwość, wiadomo więc czego szukać. Mimo to proszę zauważyć, że (i) amplituda sygnału spadła (filtr jest stratny), oraz (ii) średnia oczyszczonego sygnału jest różna od zera.

Ale uwaga: Przyjrzyjmy się jednak *innej realizacji tego samego procesu* (10):

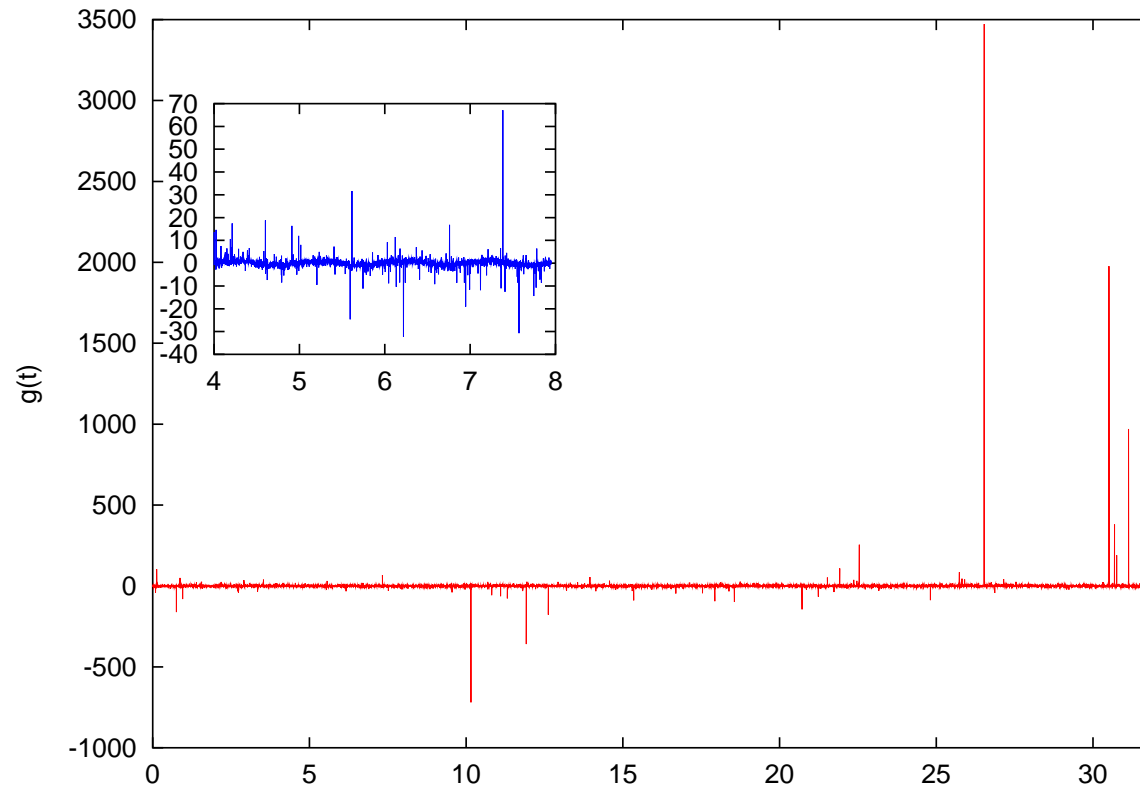
II realizacja: Sygnał przed filtracją



II realizacja: Widmo mocy sygnału nieprzefiltrowanego



II realizacja: Sygnał po filtracji



Filtracja spowodowała *pogorszenie* jakości sygnału!

Wnioski?

- Jeśli drugi moment szumu zaburzającego sygnał nie istnieje (w szczególności, jeśli szum jest procesem Levy'ego), *może się zdarzyć*, że filtr Wienera wspaniale oczyści sygnał.
- Może się jednak zdarzyć i tak, że filtr Wienera *nie oczyści* sygnału, a nawet go pogorszy!
- Obie te sytuacje mogą wystąpić dla różnych realizacji *tego samego* procesu!
- Nie ma żadnych przesłanek aby a priori oceniać, która z tych sytuacji zajdzie.
- Jeśli szum jest gaussowski, wiadomo, że filtr prawie na pewno (z prawdopodobieństwem 1 w granicy nieskończonego szeregu) oczyści sygnał.

Filtracja w domenie fourierowskiej

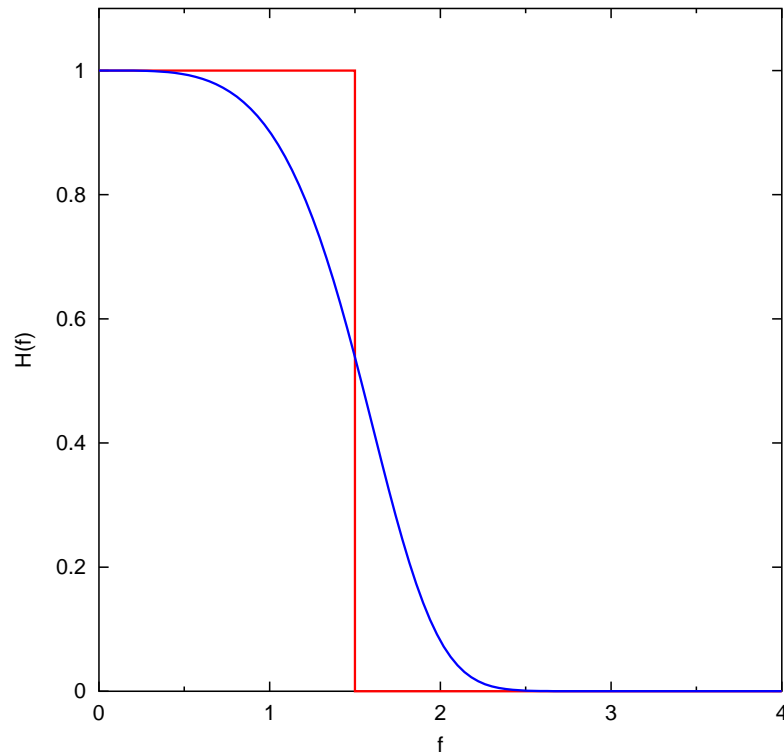
Filtracja: Domnażanie transformaty przez *funkcję przejścia*

$$g_n \xrightarrow{\text{transformata}} G_n \xrightarrow{\mathcal{H}(f_n)} G_n \xrightarrow{\text{transformata odwrotna}} \tilde{g}_n$$

gdzie $\mathcal{H}(f_n)$ jest funkcją przejścia zadaną w zdyskretyzowanych częstotliwościach f_n .

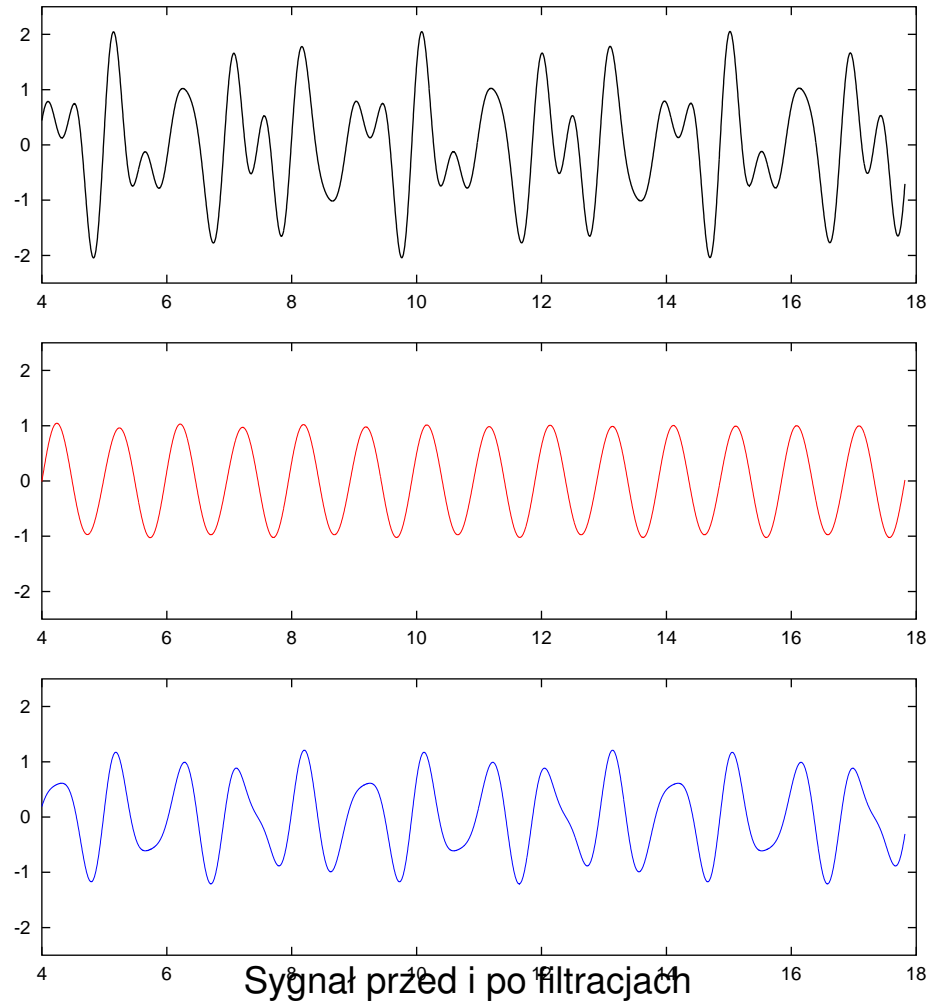
Zasadnicza wada tego podejścia: Trzeba znać cały szereg, a więc zgromadzić wszystkie dane, *przed* zastosowaniem filtru.

Przykład

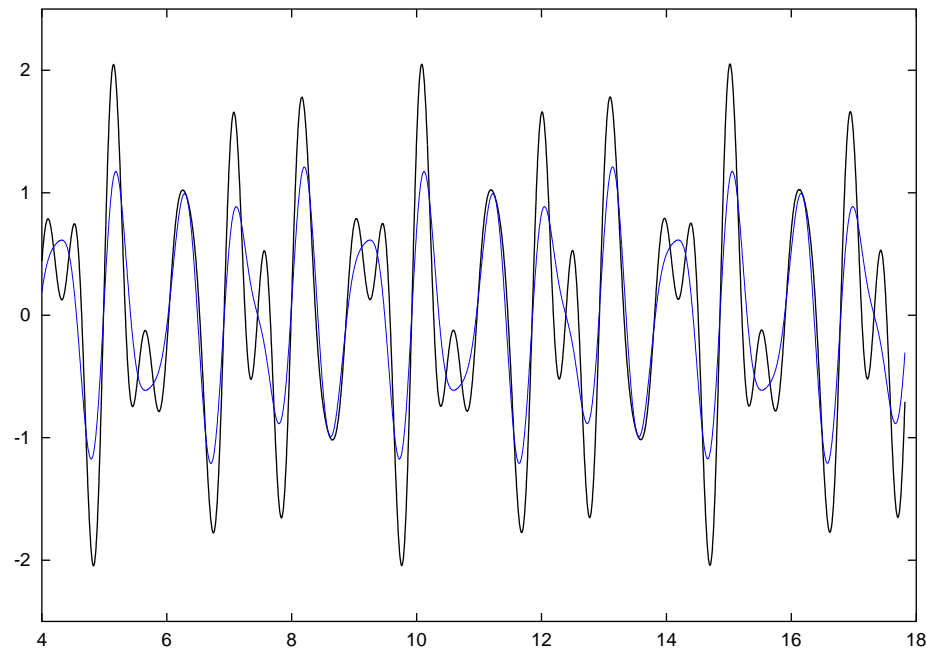


$$\mathcal{H}(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_c \\ 0 & |f| > f_c \end{cases}$$

$$\mathcal{H}(f) = \frac{2 \exp\left(-\left(f/f_c\right)^4\right)}{1 + \exp\left(-\left(f/f_c\right)^4\right)}$$



Skąd taki dziwny wynik “niebieskiej” filtracji?



Tym niemniej, przy filtracji w dziedzinie fourierowskiej, nie warto wygładzać
filtrów