Analiza szeregów czasowych:

2. Splot. Widmo mocy.

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

semestr letni 2007/08

Splot

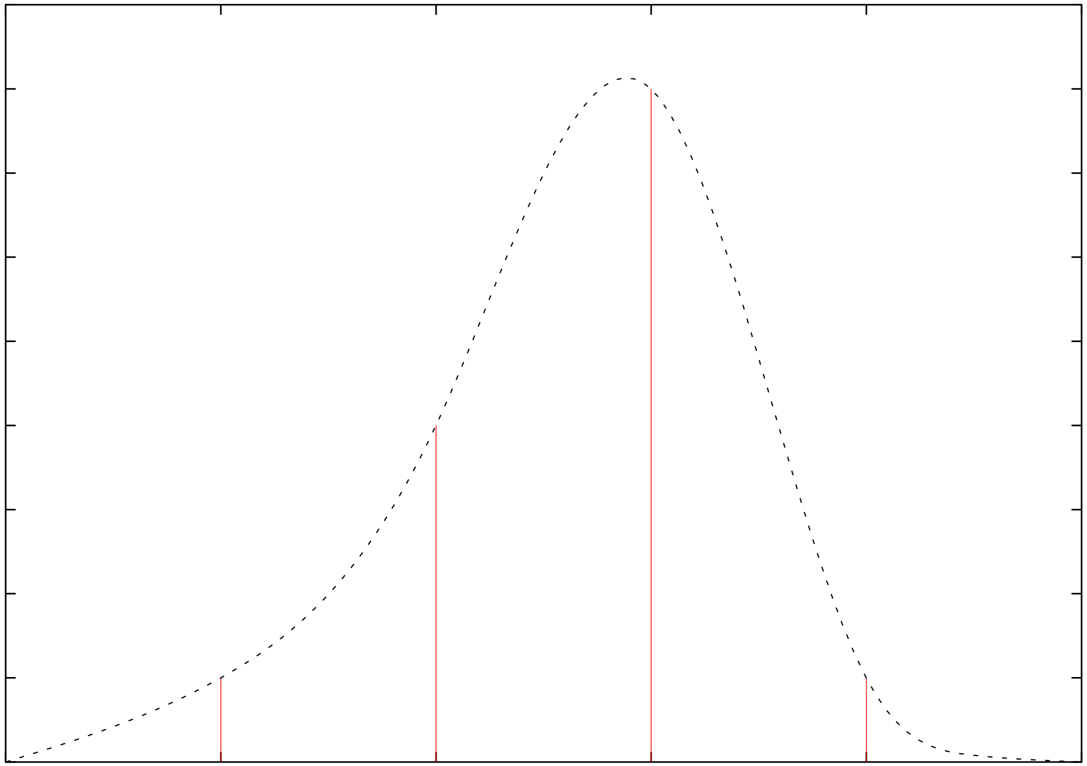
Jedną z najważniejszych własności transformaty Fouriera jest to, że transformata splotu jest iloczynem transformat. Chcielibyśmy zachować tę własność także po dyskretyzacji (próbkowaniu) sygnału.

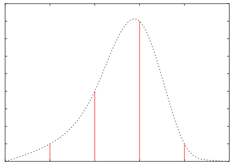
Najpierw jednak trzeba zdefiniować dyskretny splot sygnałów o skończonym czasie trwania:

$$(r \star s)_j = \sum_{k=-M/2+1}^{M/2} s_{j-k} r_k \,. \tag{1}$$

Jeśli splatam dwa sygnały o czasach trwania M_1, M_2, w powyższym równaniu $M = \max(M_1, M2)$ — krótszy sygnał uzupełnia się zerami do długości M, przy czym należy pamiętać o założeniu, że sygnały są okresowe! W praktyce jeden z „sygnałów” będzie *funkcją odpowiedzi* (zwaną też funkcją przejścia) pewnego układu liniowego i jego „czas trwania” będzie znacznie mniejszy od czasu trwania sygnału ”wejściowego”. Wówczas na wyjściu dostaniemy splot sygnału wejściowego i funkcji odpowiedzi.

Funkcja przejścia pewnego filtru

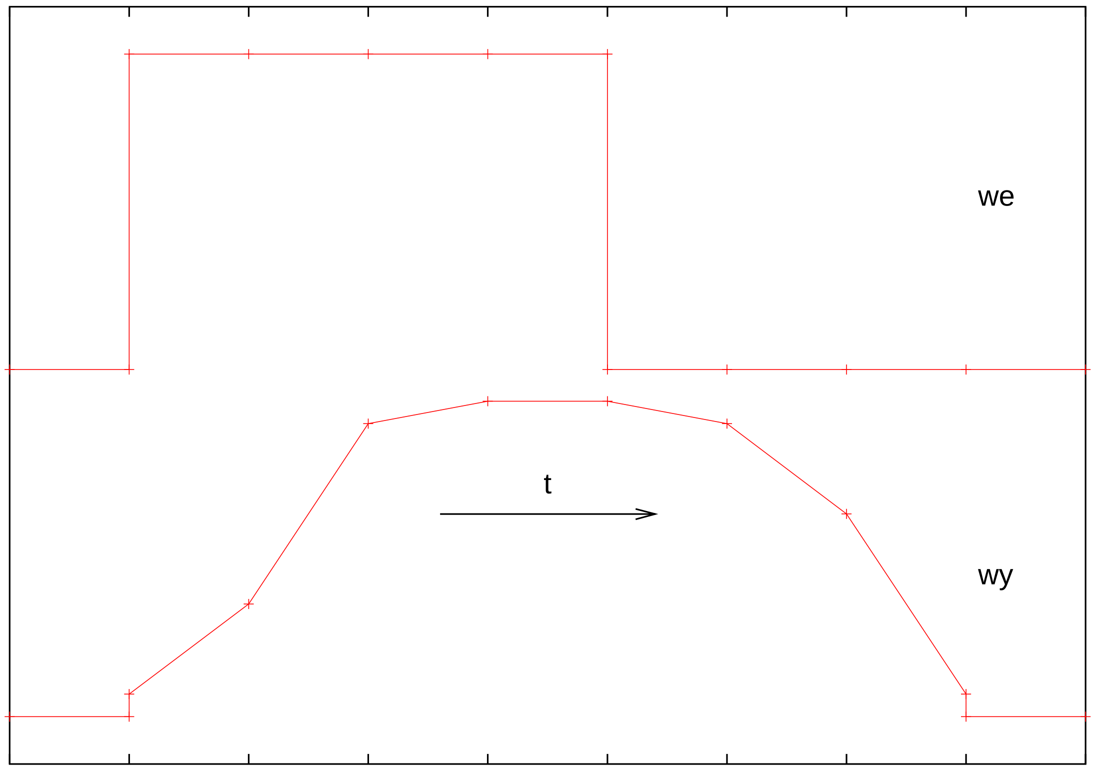




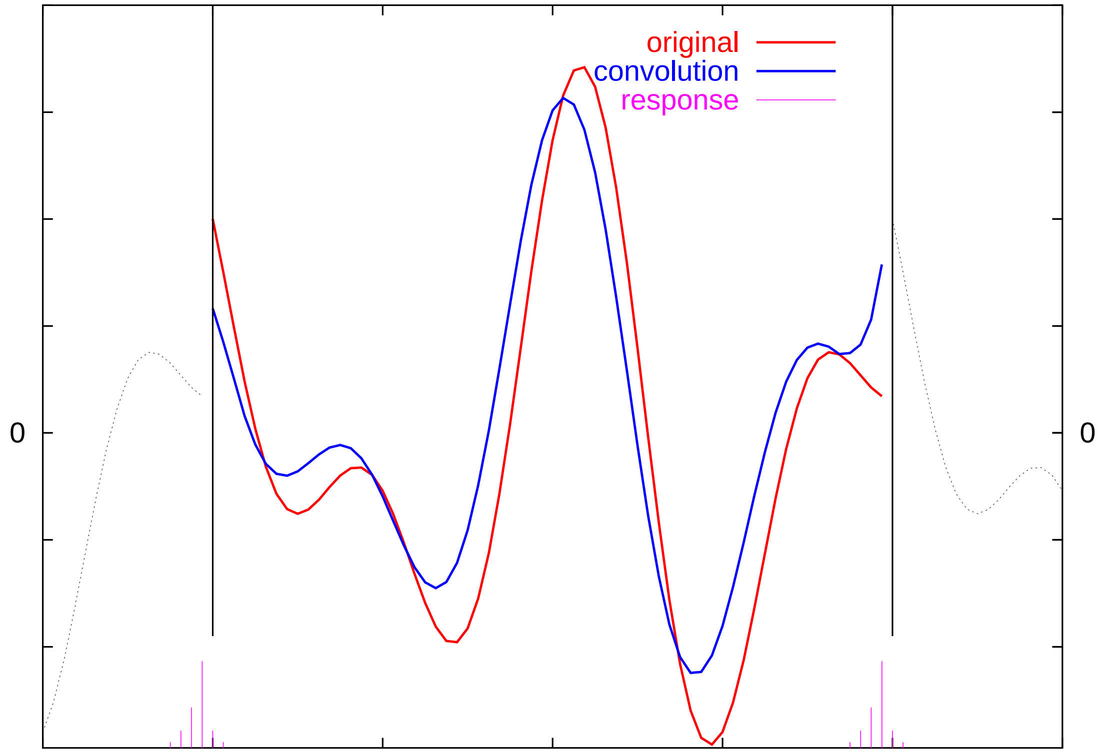
Wejście			Wyjście
011111	0000	00000	0
001111	1000	00000	0.125
000111	1100	00000	0.625
000011	1110	00000	1.625
000001	1111	00000	1.75
000000	1111	10000	1.75
000000	0111	11000	1.625
000000	0011	11100	1.125
000000	0001	11110	0.125
000000	0000	11111	0

$$0.125A + 0.5B + C + 0.125D$$

Impuls prostokątny spleciony z funkcją przejścia

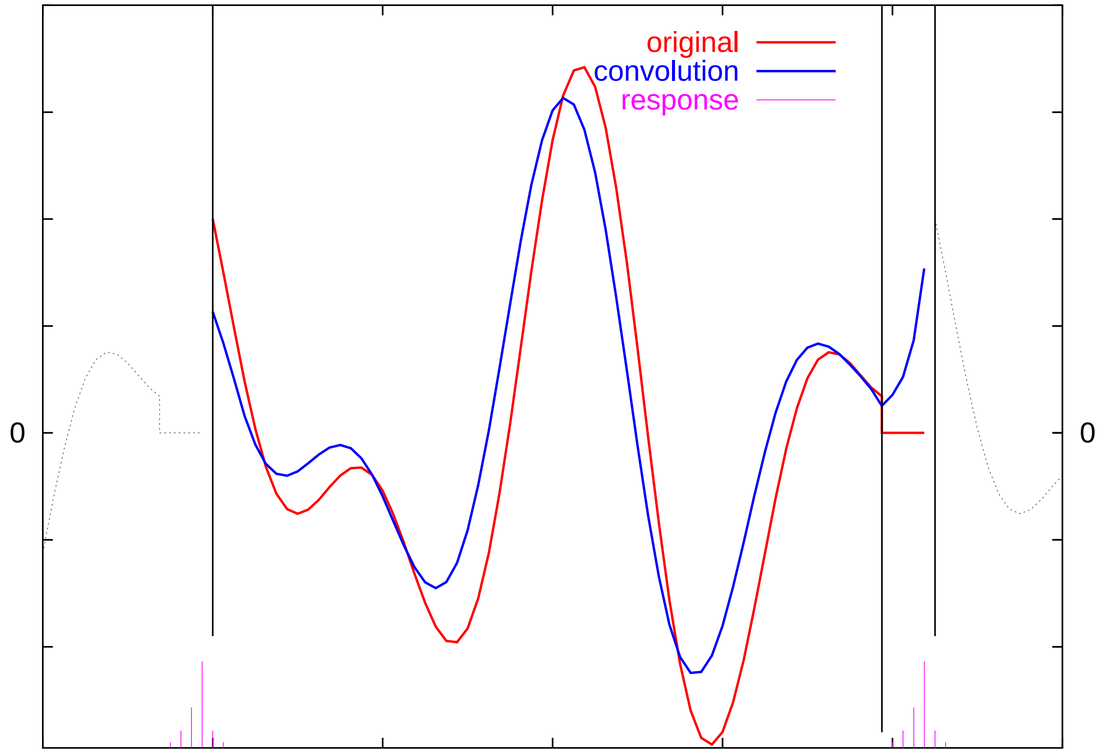


Splot sygnału i funkcji przejścia



Końce są popsute!

Splot sygnału i funkcji przejścia



Końce naprawione dzięki uzupełnianiu zerami

Sposób postępowania

1. Uzupełniam “sygnał wejściowy” tyloma zerami, ile potrzeba do wypełnienia dłuższego ogona funkcji przejścia (niekiedy, dla zapewnienia szybkości obliczeń, najpierw muszę sygnał obciąć).
2. Liczę FFT dwu sygnałów (sygnału wejściowego i funkcji odpowiedzi) jednocześnie.
3. Mnożę transformaty.
4. Dokonuję odwrotnej FFT.

Całkowity koszt operacji $\sim O(2N \log N)$

Nienumeryczne (?) wykorzystanie splotu

Dane są dwa wielomiany $A(z)$, $B(z)$ stopnia co najwyżej n:

$$
\begin{aligned}
A(z) &= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, && \text{(2a)}\\
B(z) &= b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \cdots + b_1 z + b_0\,. && \text{(2b)}
\end{aligned}
$$

Ile wynoszą *współczynniki* ich iloczynu, $C(z) = A(z)\,B(z)$? Mamy

$$
\begin{aligned}
c_{2n} &= a_n b_n && \text{(3a)}\\
c_{2n-1} &= a_n b_{n-1} + a_{n-1} b_n && \text{(3b)}\\
c_{2n-2} &= a_n b_{n-2} + a_{n-1} b_{n-1} + a_{n-2} b_n && \text{(3c)}\\
\dots & & &\\
c_0 &= a_0 b_0 && \text{(3d)}
\end{aligned}
$$

*S*uma indeksów w każdym iloczynie po prawej równa jest indeksowi po lewej.

Ogólnie

$$c_l = \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k \tilde{b}_{l-k}\,, \quad l = 0, 1, \dots, 2n\,, \tag{4a}$$

gdzie

$$\tilde{a}_s, \tilde{b}_s = \begin{cases} a_s, b_s & s = 0, 1, \dots, n \\ 0 & s = n+1, n+2, \dots, 2n \end{cases} \tag{4b}$$

oraz używam okresowości (*sic!*) "sygnałów" do wyliczania współczynników z ujemnymi indeksami: $\tilde{b}_{-j} = \tilde{b}_{2n-j+1} = 0$ dla $j = 1, 2, \dots, n$. Współczynniki iloczynu są splotem współczynników obu wielomianów. Można je zatem znaleźć w czasie $O(2n \log 2n)$, *nie* $O(n^2)$, jak by się wydawało. (Rozszerzenie $\{a_s, b_s\} \to \{\tilde{a}_s, \tilde{b}_s\}$ od razu załatwia problem wypełniania zerami.)

Zastosowanie — mnożenie dużych liczb w reprezentacji binarnej

$$x = \sum_{j=0}^{n} a_j 2^j \,, \tag{5a}$$

$$y = \sum_{j=0}^{n} b_j 2^j \,, \tag{5b}$$

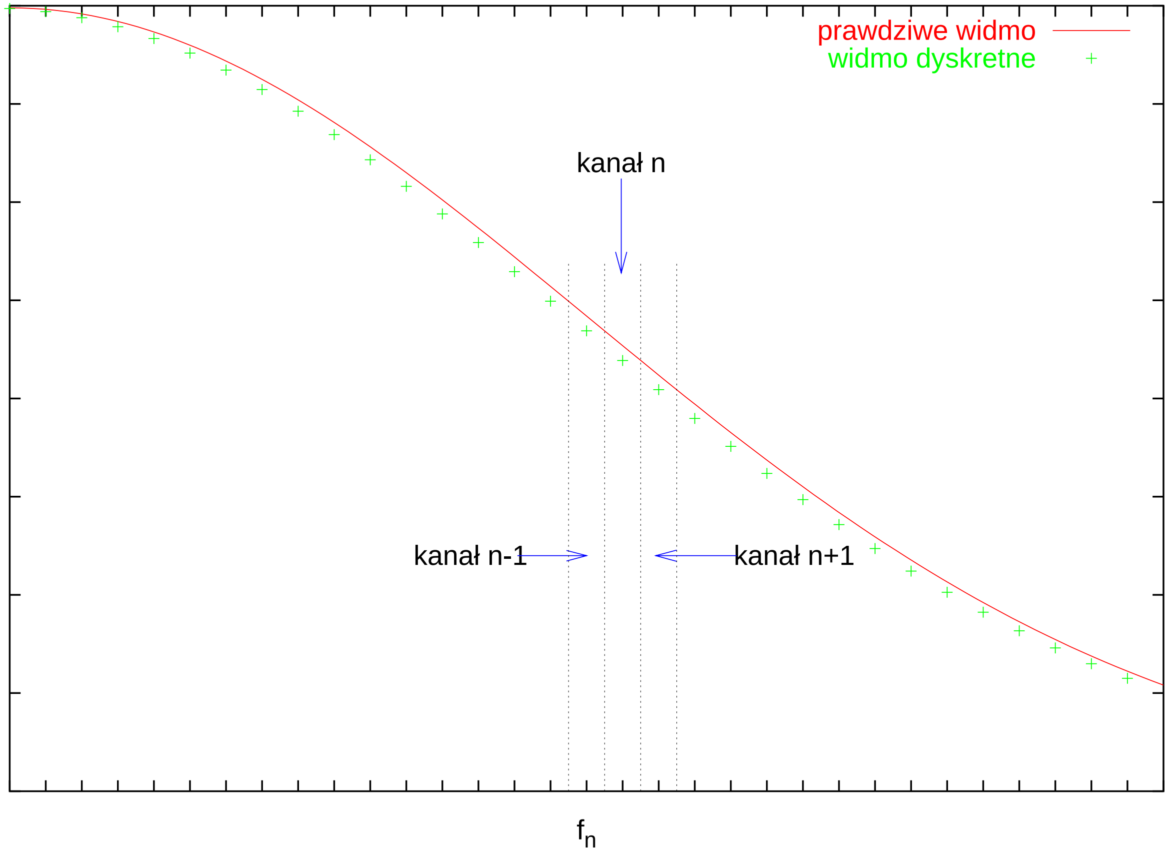
gdzie $a_j, b_j = \{0, 1\}$. Prawe strony są wielomianami postaci (2) obliczanymi w $z = 2$. Iloczyn xy jest także wielomianem, którego współczynniki są dane odpowiednim splotem. Dla odpowiednio dużego n czas obliczenia iloczynu przez FFT będzie mniejszy od czasu liczenia wprost!

Widmo mocy

Ciągłe widmo mocy: $P(f)$ — gęstość mocy zawartej w przedziale częstotliwości $(f, f + df)$.

Dyskretne widmo mocy: $P(f_n)$ — *estymator* gęstości mocy zawartej w przedziale częstotliwości $(f_n - 1/(2N\Delta), f_n + 1/(2N\Delta))$.

Widmo dyskretne jest *przybliżeniem* widma prawdziwego



Periodogram

Zgodnie z twierdzeniem Wienera-Chinczyna, widmo mocy sygnału stacjonarnego jest transformatą Fouriera funkcji autokorelacji, a zatem jest równe kwadratowi modułu transformaty Fouriera. Teraz trzymanie ujemnych częstotliwości jest niewskazane — $\sin 2\pi ft$ i $\cos 2\pi ft$ mają „tę samą częstość”, a mówiąc nieco bardziej ściśle, widmo mocy nie niesie żadnej informacji o fazie.

Estymatorem dyskretnego widma mocy jest zatem periodogram:

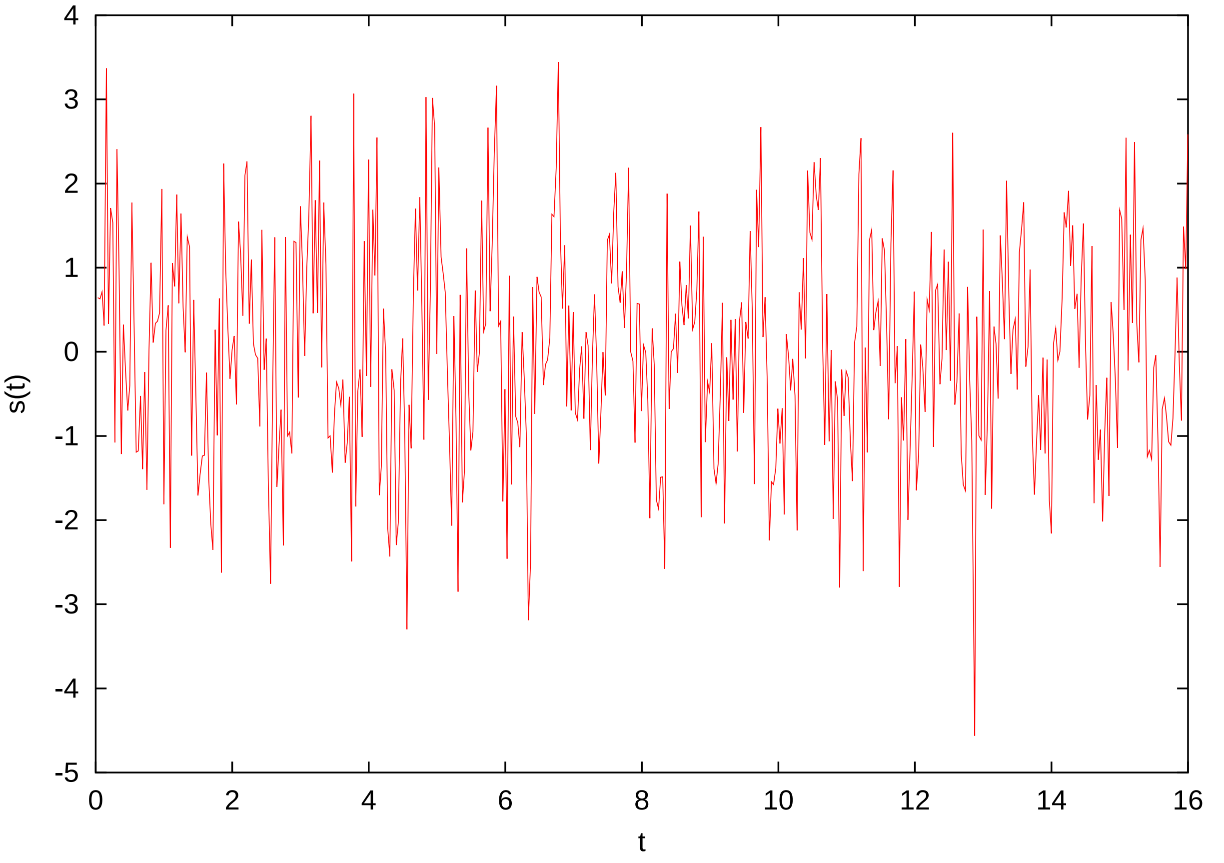
$$P(0) = |G(0)|^2\,, \tag{6a}$$

$$P(f_n) = \left[|G(f_n)|^2 + |G(f_{-n})|^2\right]\,, \; n = 1, 2, \frac{N}{2} - 1 \tag{6b}$$

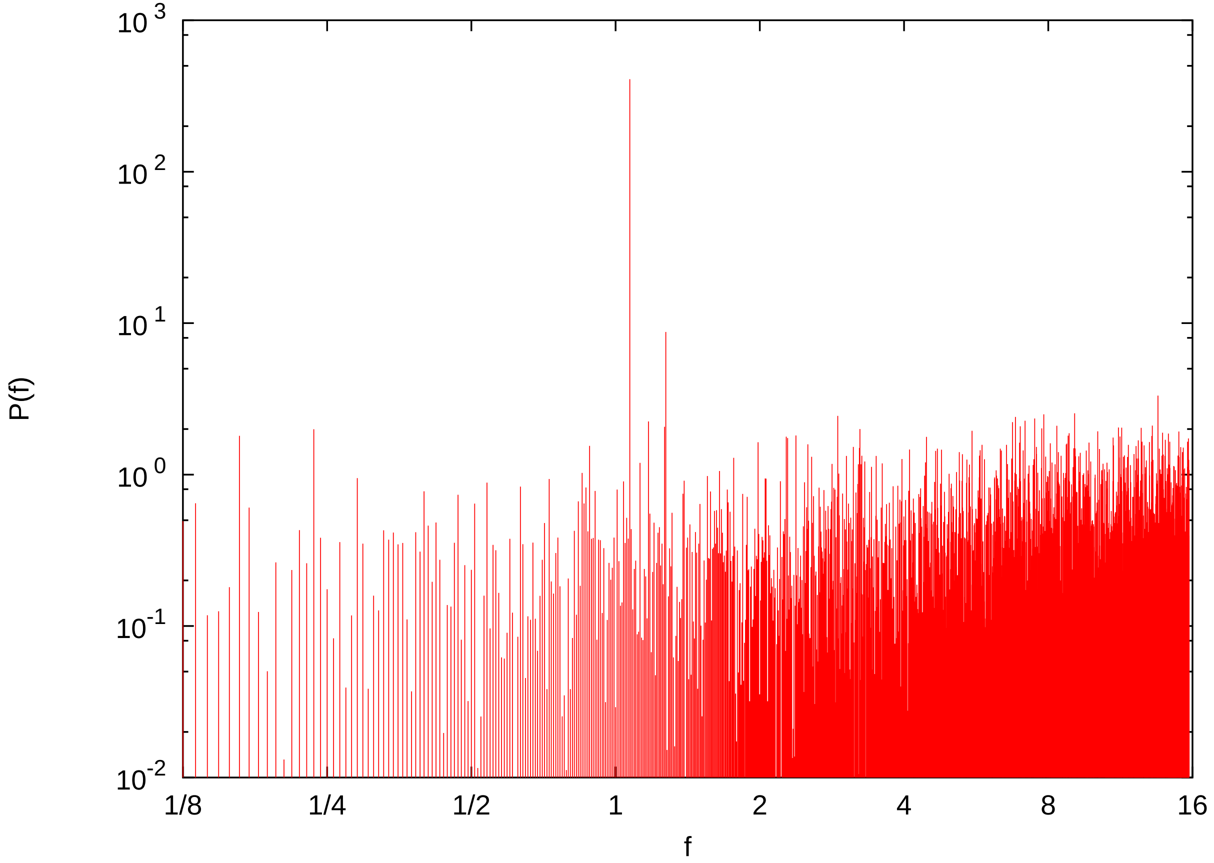
$$P(f_{N/2}) = |G(f_{N/2})|^2\,. \tag{6c}$$

Przy obliczaniu dyskretnego widma mocy, trzeba **szczególnie** uważać na stosowaną konwencję odnośnie normalizacji i kolejności zapisu składowych fourierowskich!

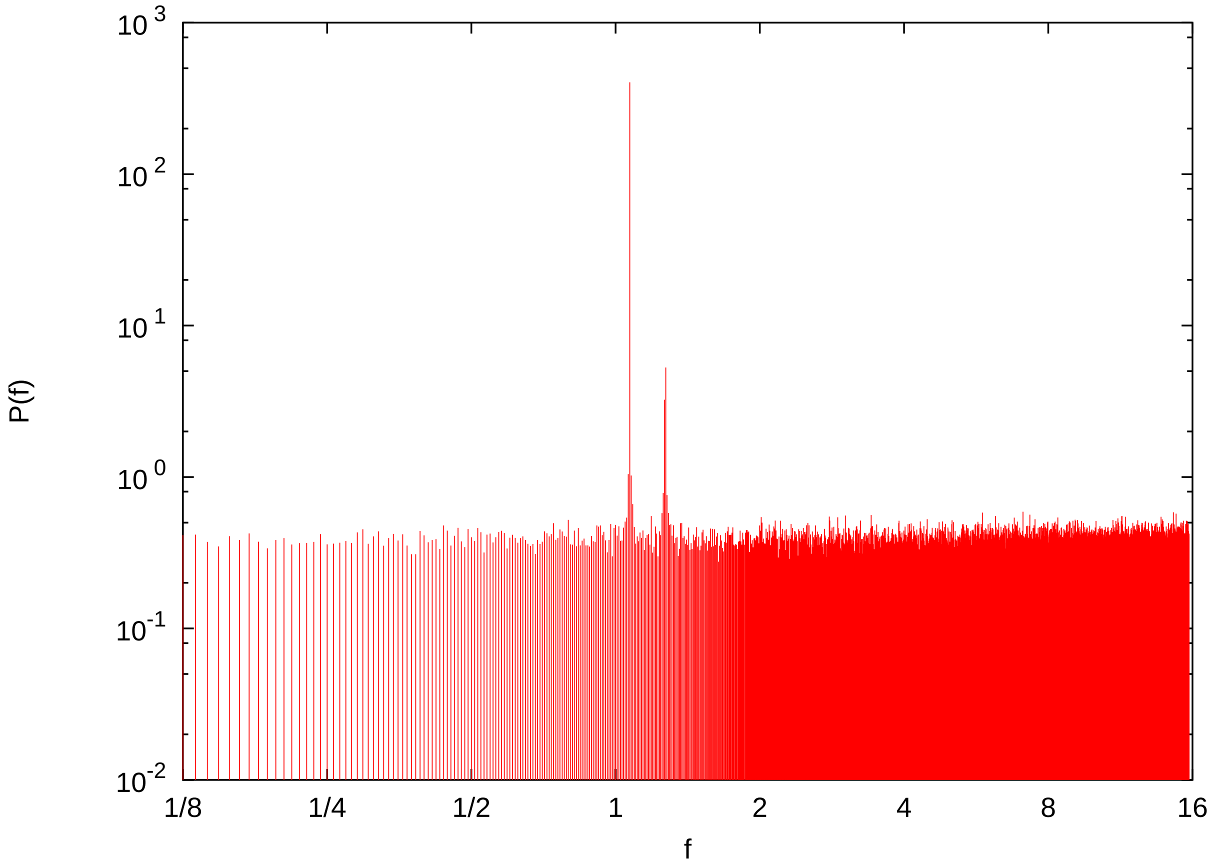
Zaszumiony sygnał



Widmo mocy prezentowanego sygnału



Widmo mocy uśrednione po 64 realizacjach szumu

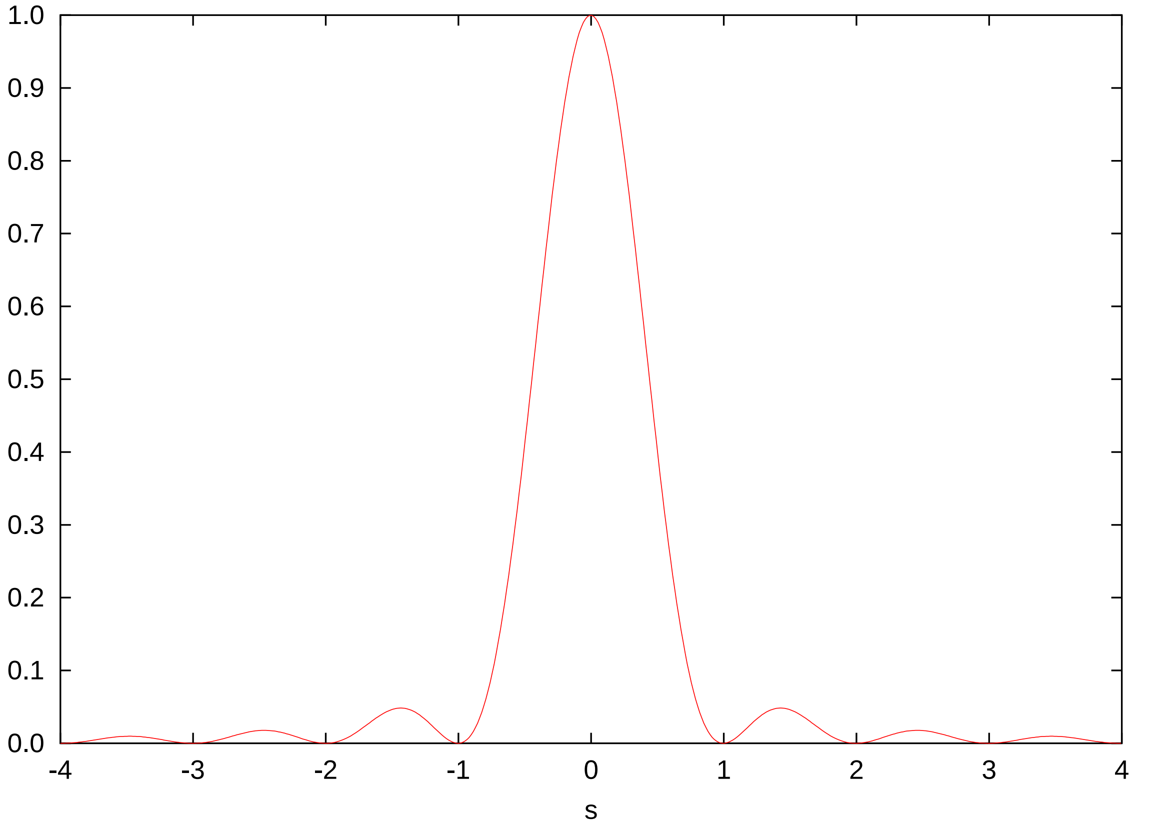


“Wyciekanie” widma (*leakage*)

Ponieważ periodogram częstotliwości f_k przypisuje nie tylko moc zawartą *dokładnie* w modzie o częstotliwości f_k, ale także w pewnym przedziale wokół tej częstotliwości, widmo mocy zawarte w pewnym kanale *przecieka* do innych kanałów odległych o s zgodnie ze wzorem

$$P(k \to s) = \frac{1}{N^2} \left[\frac{\sin(\pi s)}{\sin(\pi s/N)} \right]^2 . \tag{7}$$

Nie ma “przeciekania” mocy pomiędzy częstotliwościami należącymi do bazy Fourierowskiej (odpowiada to całkowitemu s), ale jest “przeciekanie” z częstotliwości leżących *w pobliżu*.



Przeciekanie widma — wzór (7)

Funkcje okna

Często aby wygładzić widmo oraz aby zmniejszyć ”wyciekanie” mocy do sąsiednich kanałów, stosuje się funkcje okna: Szereg domnażamy przez funkcję, która zanika na początku i końcu szeregu i jest bliska jedności w środku, a następnie obliczamy transformatę tak zmodyfikowanego szeregu:

$$D_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} g_k w_k e^{2\pi i n k/N} \,. \tag{8}$$

Periodogram ma postać:

$$\begin{aligned}
P(0) &= \frac{1}{W}|D_0|^2\,, &\text{(9a)}\\
P(f_n) &= \frac{1}{W}\left[|D_n|^2+|D_{-n}|^2\right], &\text{(9b)}\\
P\left(f_{\mathrm{Nyq}}\right) &= \frac{1}{W}|D_{N/2}|^2\,, &\text{(9c)}\\
W &= \sum_{k=0}^{N-1} w_k^2\,. &\text{(9d)}
\end{aligned}$$

Najczęściej stosowanymi funkcjami okna są:

Okno Barletta:

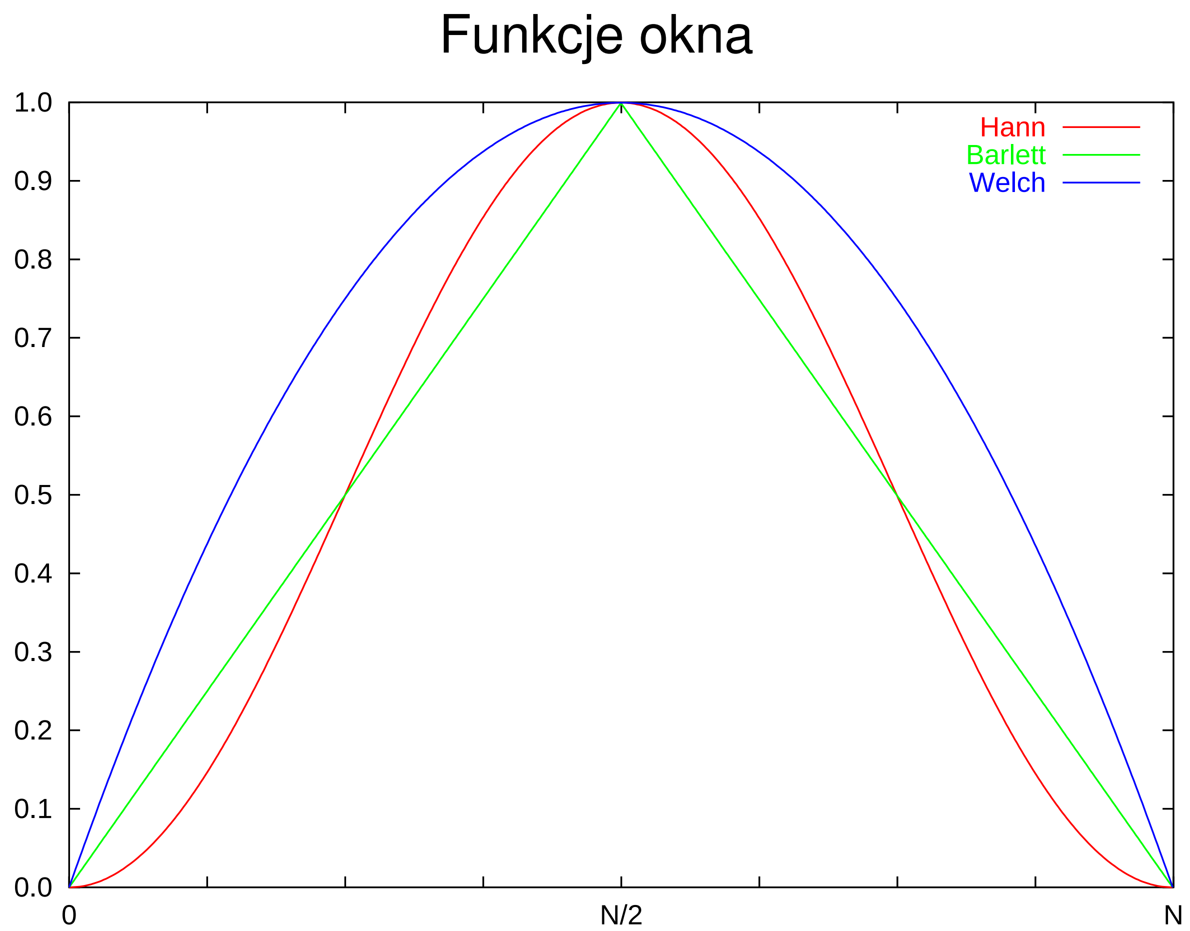
$$w_k = 1 - \left| \frac{k - N/2}{N/2} \right|. \tag{10}$$

Okno Hanna:

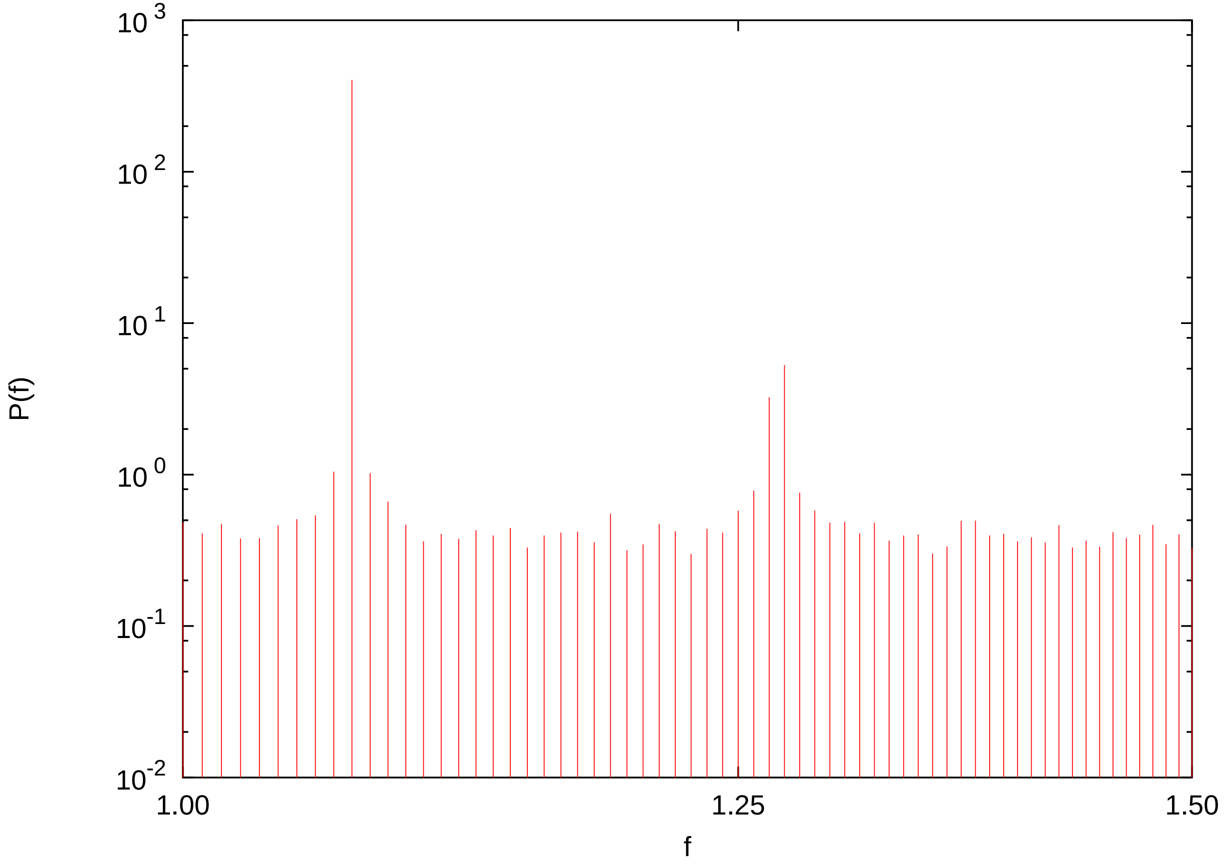
$$w_k = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k}{N} \right) \right]. \tag{11}$$

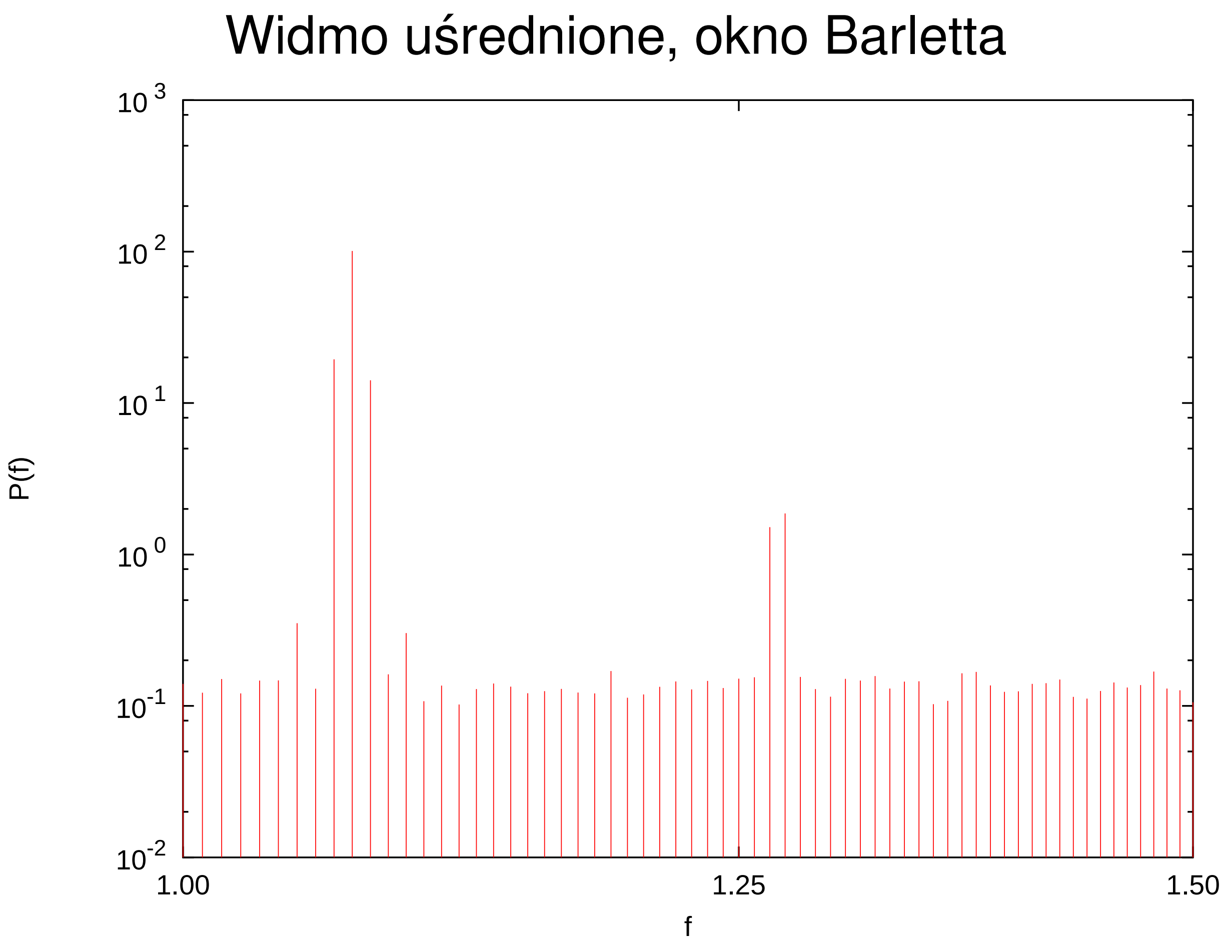
Okno Welcha:

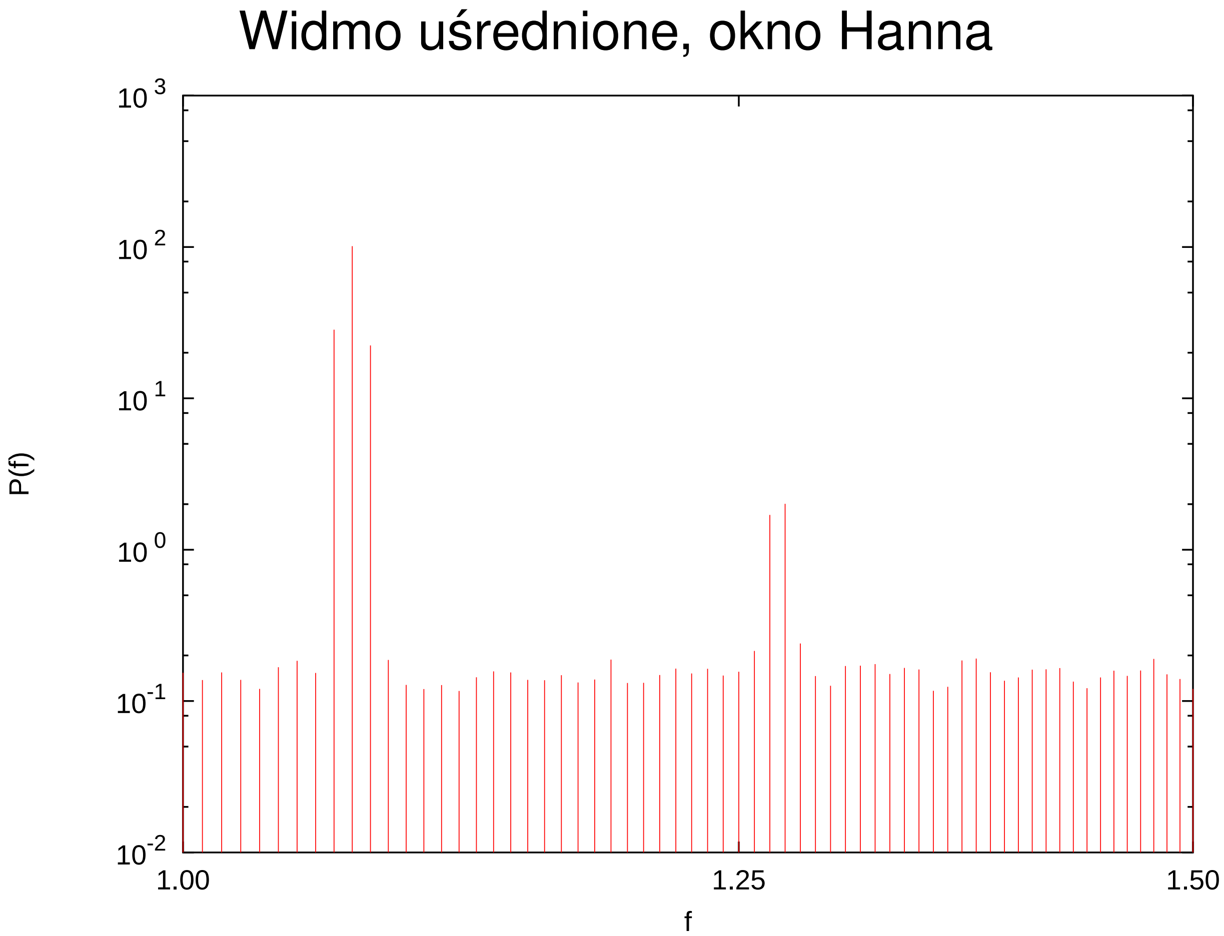
$$w_k = 1 - \left(\frac{k - N/2}{N/2} \right)^2. \tag{12}$$


Funkcje okna
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0.0
0
N/2
N
Hann
Barlett
Welch

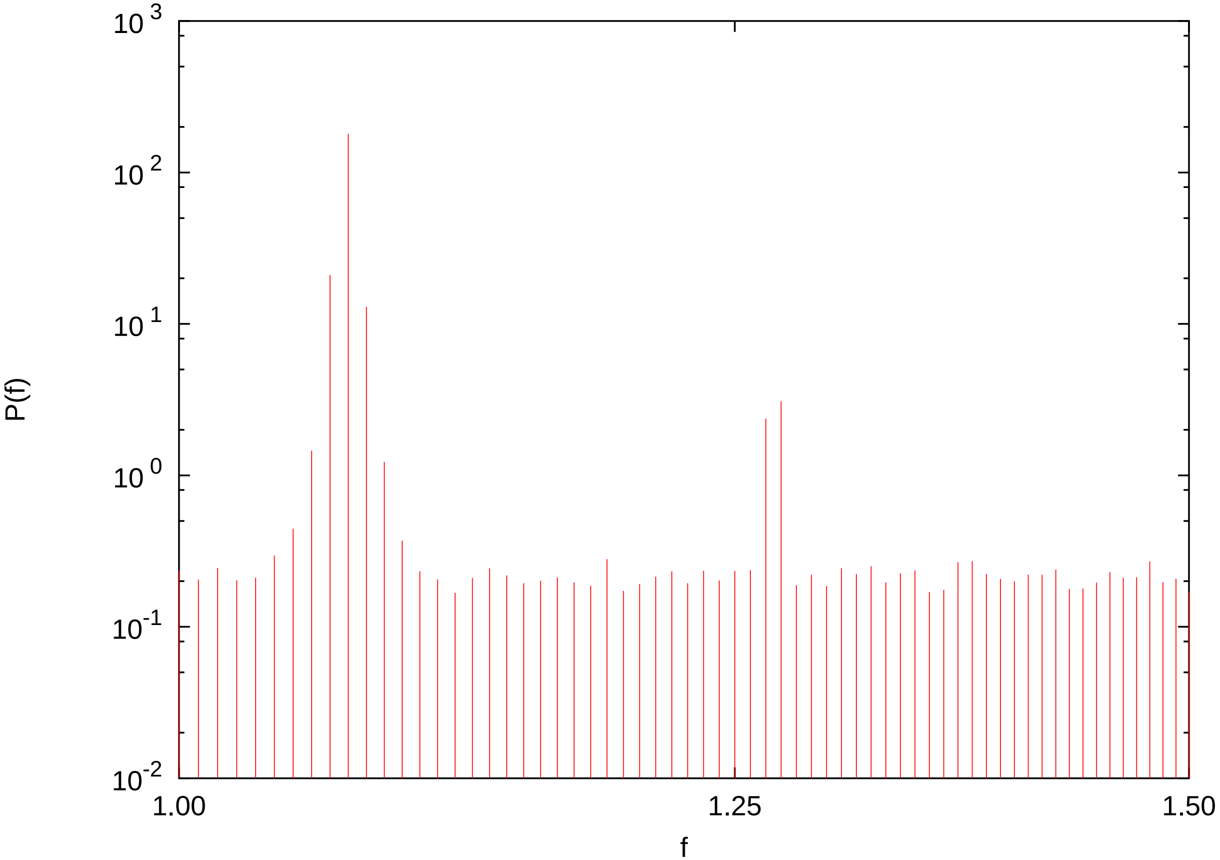
Widmo uśrednione, okno prostokątne

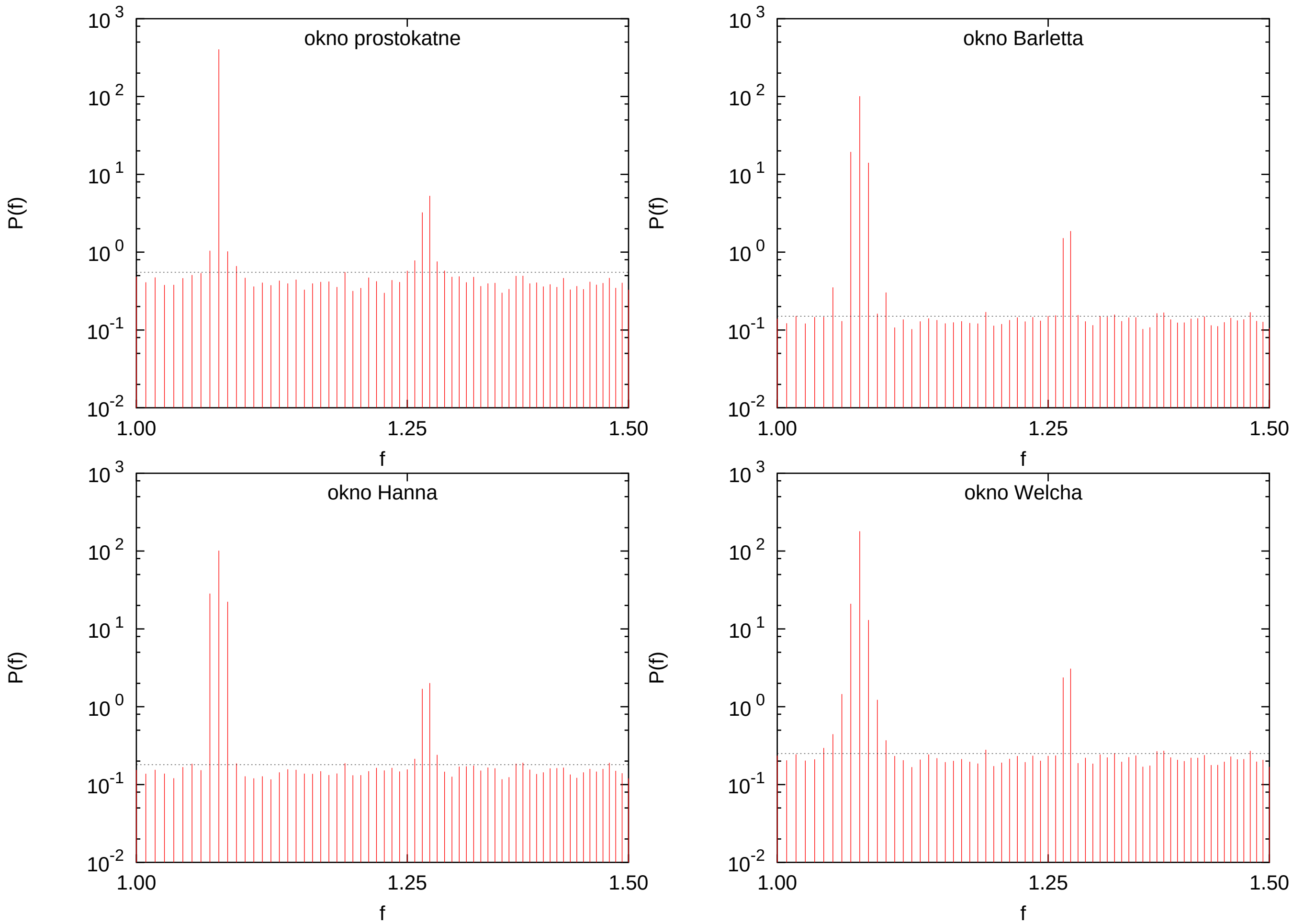



Widmo uśrednione, okno Barletta
10^3
10^2
10^1
10^0
10^-1
10^-2
P(f)
1.00
1.25
1.50
f


Widmo uśrednione, okno Hanna
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}
P(f)
1.00
1.25
1.50
f

Widmo uśrednione, okno Welcha




okno prostokatne
okno Barletta
okno Hanna
okno Welcha
P(f)
f
1.00
1.25
1.50
10^3
10^2
10^1
10^0
10^{-1}
10^{-2}

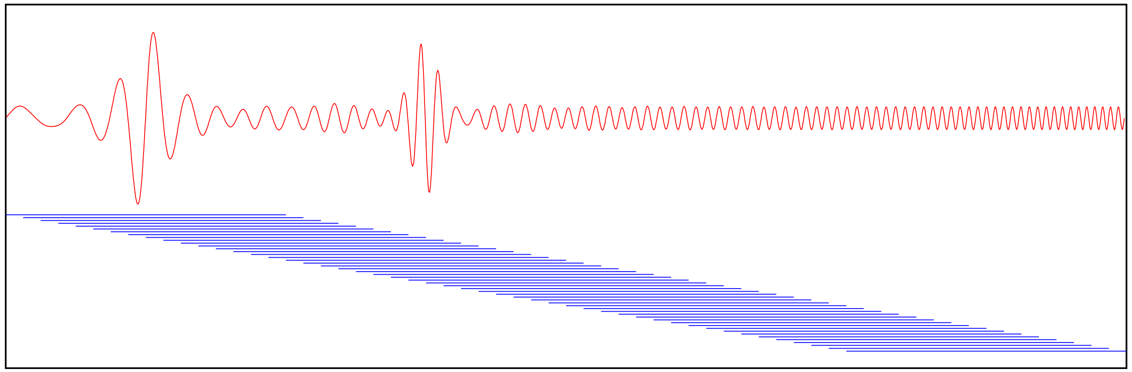
Szeregi stacjonarne

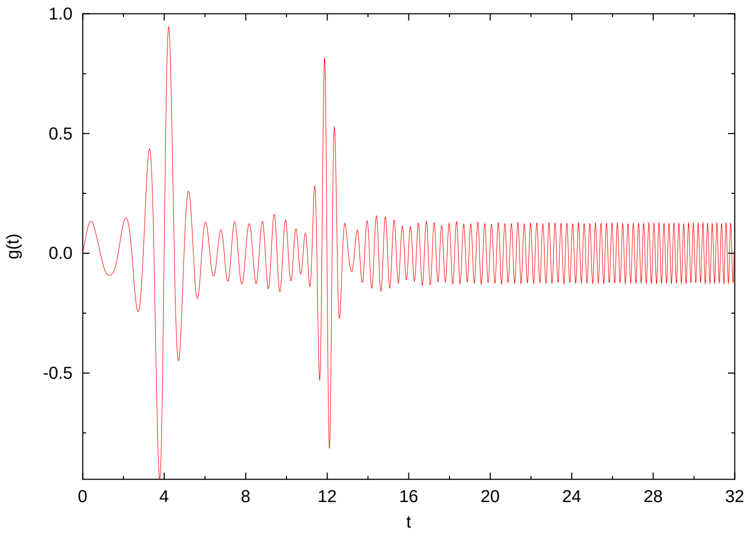
Stacjonarny szereg czasowy to taki szereg, który *jakościowo* nie zmienia się w czasie. Innymi słowy, obserwując fragment tego szeregu nie sposób powiedzieć *kiedy* zmierzono te wartości. Formalna definicja brzmi tak: Jeżeli rozkłady przybierane przez wartości szeregu czasowego są takie same w każdym dowolnym, dostatecznie długim, jego fragmencie i takie same, jak w całym szeregu, szereg nazywam stacjonarnym. Szereg, który nie jest stacjonarny, nazywam *niestacjonarnym*.

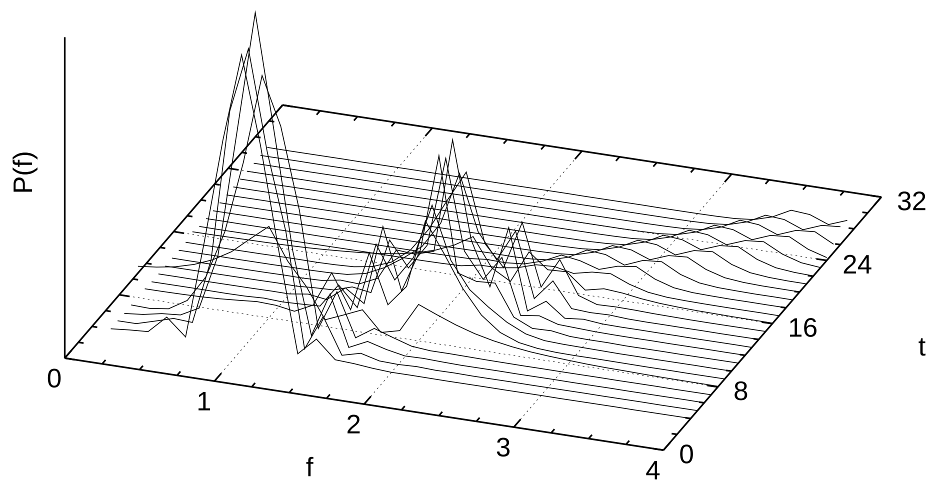
Szeregi okresowe, ze zmianami sezonowymi i z trendami są niestacjonarne. Szeregi danych giełdowych na ogół też są niestacjonarne. W ogólności szeregów niestacjonarnych jest znacznie więcej niż stacjonarnych.

Widmo mocy sygnałów niestacjonarnych

Twierdzenie Wienera-Chinczyna pozwala wiązać periodogram *tylko z widmem mocy sygnałów stacjonarnych*. Co robić z sygnałami niestacjonarnymi? Dzielimy cały sygnał na zachodzące na siebie segmenty, w których sygnał jest *w przybliżeniu* stacjonarny, następnie obliczamy periodogram dla każdego segmentu. W ten sposób dostajemy widmo zależne od czasu.

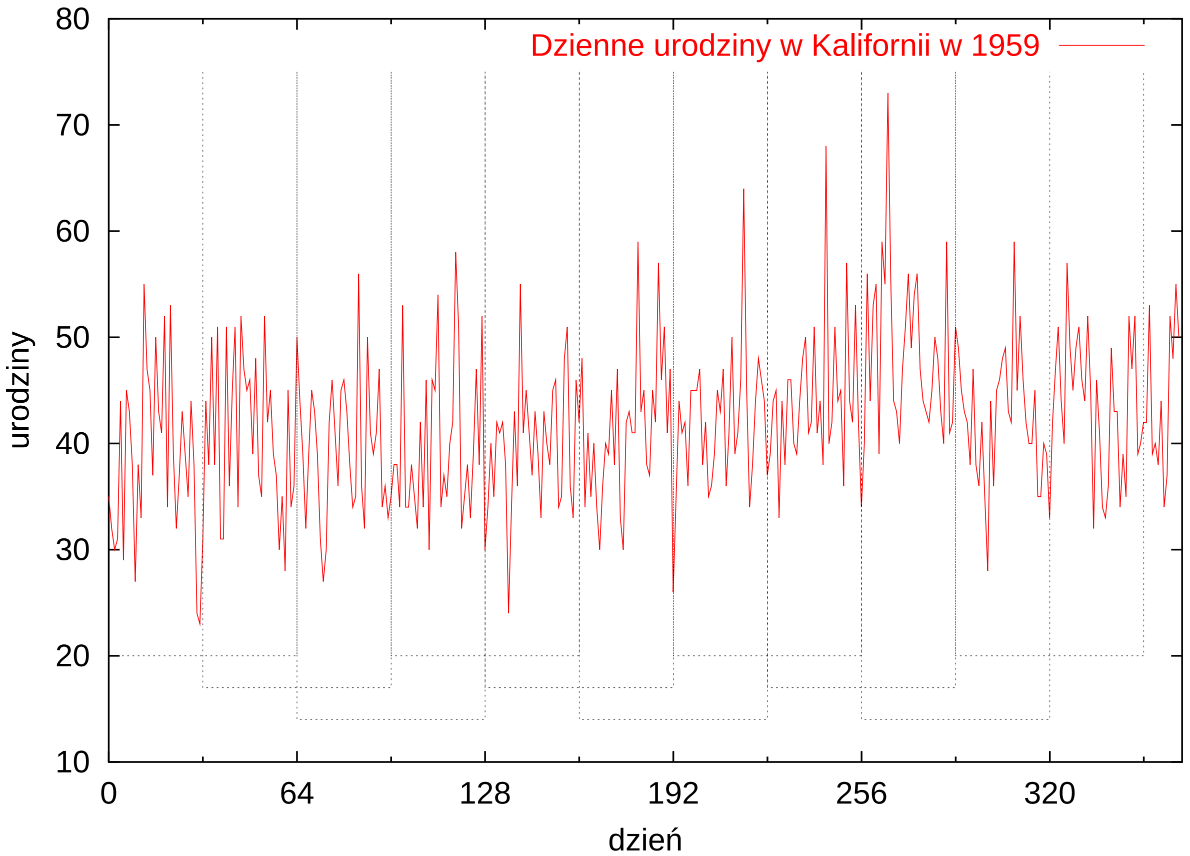




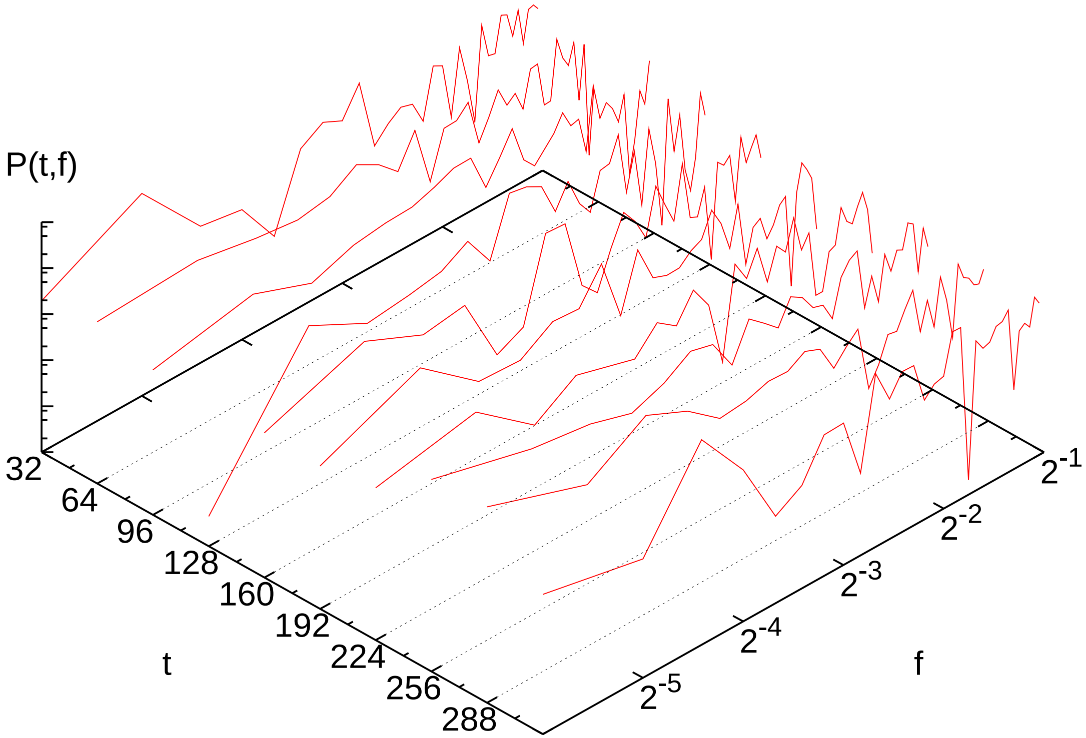


Po lewej — sygnał niestacjonarny. Po prawej — jego zależne od czasu widmo.

Inny przykład sygnału niestacjonarnego



Zależne od czasu widmo



Zależne od czasu widmo (okno Welcha)