Analiza szeregów czasowych:

5. Liniowe modele stochastyczne

P. F. Góra

http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/

semestr letni 2006/07

Dwa rodzaje modelowania

1. *Modelowanie “z pierwszych zasad”.* Znamy prawa rządzące jakimś zjawiskiem (fizycznym, biologicznym, procesem społecznym), na ich podstawie, dokonując odpowiednich idealizacji, tworzymy model szczegółowy. Często uwzględniamy zaburzenie stochastyczne.

2. *Modelowanie stochastyczne.* Nie znamy praw rządzących jakimś procesem, znamy tylko szereg czasowy będący wynikiem tego procesu. Wiemy lub zakładamy przy tym, iż w procesie uczestniczy bardzo wielu “agentów”, którzy dokonują przypadkowych decyzji, ale jakiś mechanizm sprawia, że wynikowy, uśredniony proces wykazuje pewne regularności. Obserwując owe regularności w szeregu czasowym, chcemy poznać pewne charakterystyki mechanizmu odpowiedzialnego za jego wygenerowanie.

Liniowe modele stochastyczne

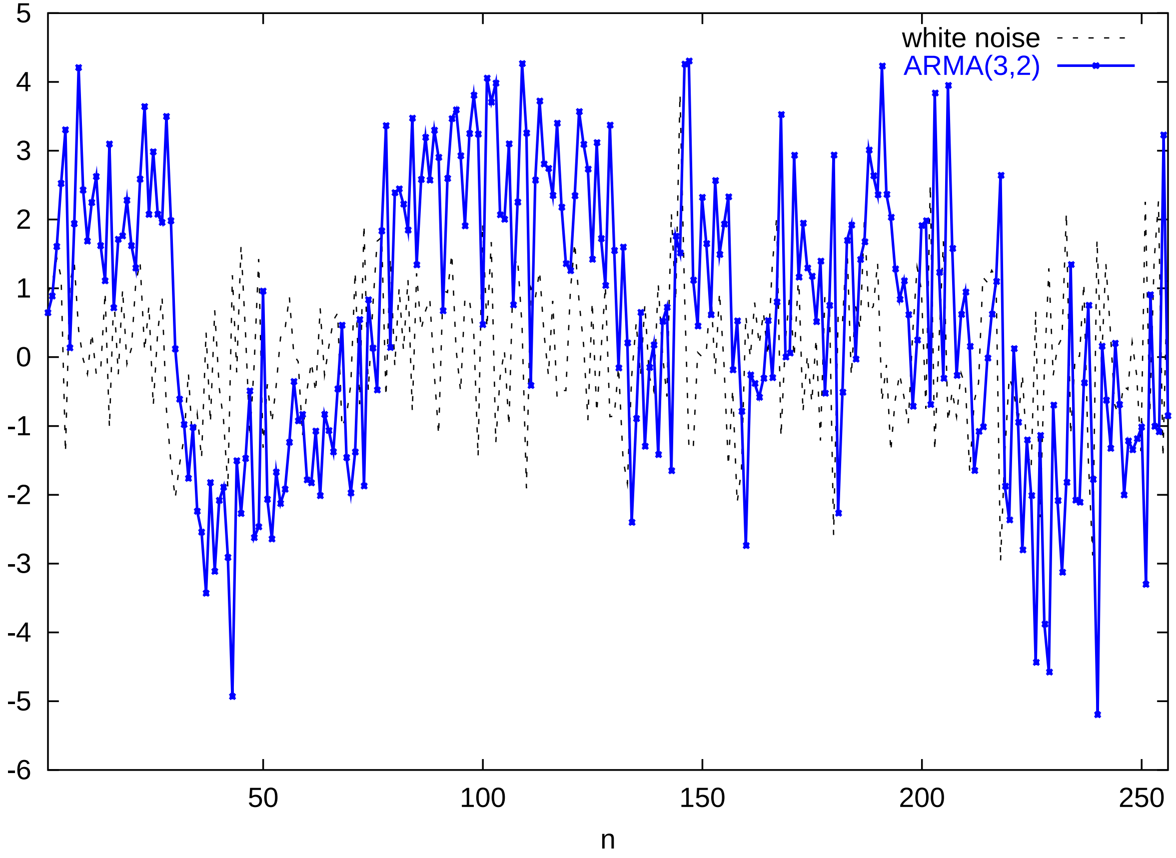
Niech $\{y_n\}_{n=1}^N$ będzie pewnym ciągiem danych "pomiarowych". Nie znamy mechanizmu, który wygenerował ten szereg. Przypuszczamy, że jest on mocno zaszumiony. Jeżeli szereg $\{y_n\}_{n=1}^N$ jest *stacjonarny*, próbujemy przedstawić go w postaci

$$y_n = \beta_1 y_{n-1} + \beta_2 y_{n-2} + \cdots + \beta_p y_{n-p} + \alpha_0 \eta_n + \alpha_1 \eta_{n-1} + \cdots + \alpha_q \eta_{n-q}\,, \tag{1}$$

gdzie $\{\eta_k\}$ jest białym szumem. Model (1) próbuje przedstawić rzeczywisty szereg czasowy w postaci odfiltrowanego białego szumu.

Proces (1) nazywam procesem *ARMA*(p,q) (*AutoRegressive Moving Average* — autoregresywny proces średniej ruchomej). W ogólności zamiast białego szumu, szereg $\{\eta_k\}$ mógłby być dowolnym stacjonarnym sygnałem o znanych własnościach.

Przykład procesu ARMA(3,2)



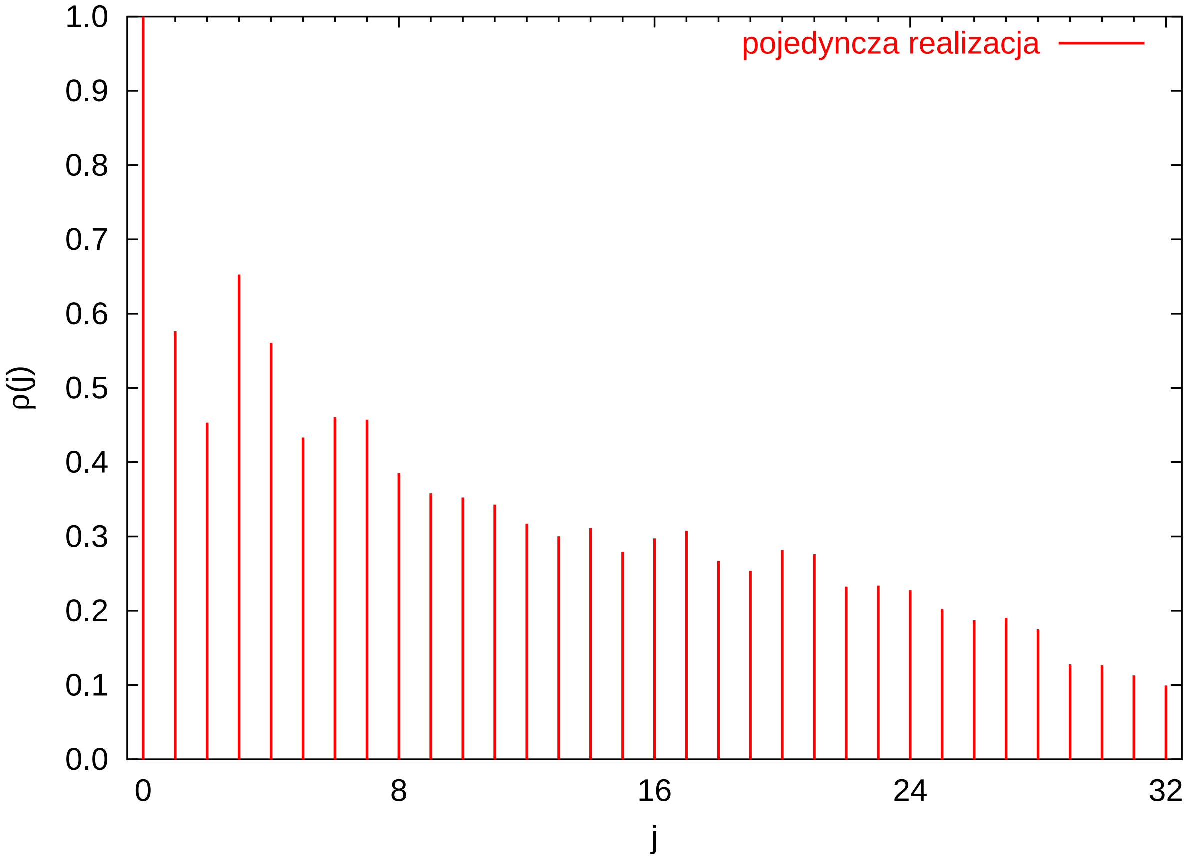
Funkcja korelacji

W teorii funkcję korelacji wylicza się średniując po realizacjach procesu stochastycznego, który “odpowiada” za wygenerowanie tego szeregu:

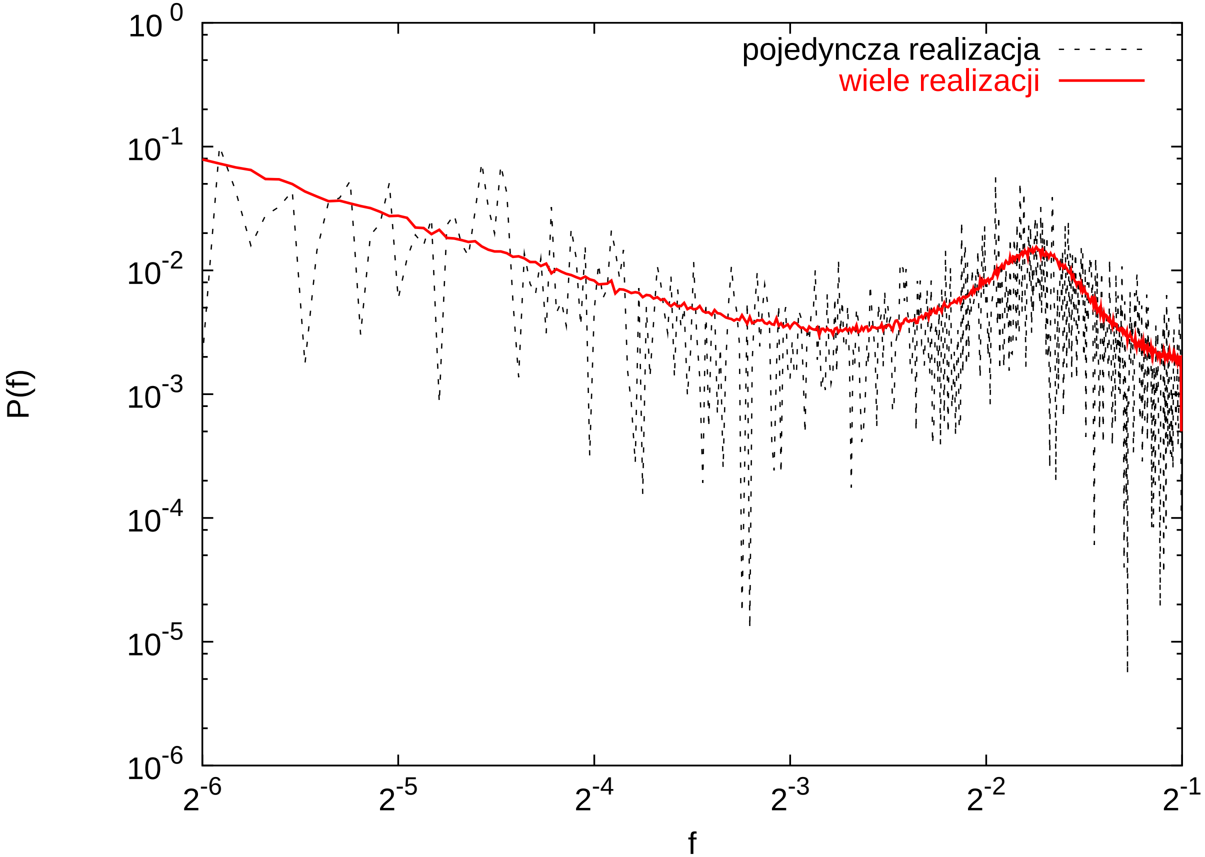
$$\rho(i) = \left\langle \left(\frac{1}{N-i} \sum_{j=i+1}^{N} y_{j-i} y_j \right) \Big/ \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} y_j^2 \right) \right\rangle \tag{2}$$

W praktyce mamy daną tylko jedną realizację naszego szeregu i dlatego obliczona funkcja korelacji może się różnić od wartości teoretycznej.

Funkcja korelacji powyższego procesu



Widmo mocy powyższego procesu



Warunek stacjonarności procesu ARMA

Proces (1) ma postać filtru IIR, a zatem

Proces (1) jest stacjonarny wtedy i tylko wtedy gdy pierwiastki równania

$$\lambda^p - \beta_1 \lambda^{p-1} - \beta_2 \lambda^{p-2} - \cdots - \beta_p = 0 \tag{3}$$

leżą wewnątrz okręgu jednostkowego.

Procesy autoregresywne — *AR*(p)

Jeżeli proces *ARMA* nie ma średniowania szumu, nazywamy go procesem autoregresywnym:

$$y_n = \beta_1 y_{n-1} + \beta_2 y_{n-2} + \cdots + \beta_p y_{n-p} + \alpha_0 \eta_n \,. \tag{4}$$

Aby obliczyć jego funkcję autokorelacji, mnożę (4) przez y_{n-m} i średniuję po realizacjiach szumu:

$$\langle y_{n-m} y_n \rangle = \beta_1 \langle y_{n-m} y_{n-1} \rangle + \cdots + \beta_p \langle y_{n-m} y_{n-p} \rangle + \alpha_0 \langle y_{n-m} \eta_n \rangle \,. \tag{5}$$

Ostatni człon w (5) znika, gdyż y_{n-m} nie może zależeć od *późniejszego od siebie* szumu.

Dzieląc (5) przez wariancję $\langle y_n^2 \rangle$, dostajemy równanie na *funkcję korelacji procesu AR*(p):

$$\rho_m = \beta_1 \rho_{m-1} + \beta_2 \rho_{m-2} + \cdots + \beta_p \rho_{m-p} \tag{6}$$

Z teorii równań różnicowych wiemy, że rozwiązanie równania różnicowego (6) ma postać

$$\rho_m = \sum_{j=1}^{p} A_j \lambda_j^m , \tag{7}$$

gdzie λ_j są rozwiązaniami równania (3). Z uwagi na wymaganie stabilności, $\forall j : |\lambda_j| < 1$, a zatem możemy napisać $\lambda_j = e^{-\tau_j} e^{2\pi i f_j}$, gdzie $\forall j : \tau_j > 0$.

Funkcja korelacji procesu autoregresywnego

Ponieważ równanie (3) ma współczynniki rzeczywiste, jego pierwiastki są albo rzeczywiste, albo parami sprzężone. Wobec tego stałe A_j można dobrać tak, aby ρ_m było rzeczywiste. Ostatecznie stwierdzamy, że

Funkcja korelacji procesu autoregresywnego ma postać kombinacji liniowej zanikających eksponent i tłumionych sinusoid:

$$\rho_m = \sum A_j e^{-m\tau_j} + \sum{}' A_{j'} e^{-m\tau_{j'}} \sin(2\pi f_{j'} m + \phi_{j'}) \,. \tag{8}$$

Widmo procesu autoregresywnego

Widmo procesu autoregresywnego otrzymujemy natychmiast z funkcji przejścia odpowiedniego filtru:

$$P(f) = \frac{\alpha_0^2}{\left|1 - \sum_{n=1}^{p} \beta_n e^{2\pi i n f}\right|^2}, \quad 0 \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}, . \tag{9}$$

Równania Yule'a-Walkera

W równaniu (6) podstawmy $m = 1$. Dostaniemy

$$\rho_1 = \beta_1\rho_{1-1} + \beta_2\rho_{1-2} + \ldots \beta_p\rho_{1-p} = \beta_1 + \beta_2\rho_1 + \ldots \beta_p\rho_{p-1}\,, \tag{10}$$

gdyż na mocy stacjonarności $\rho_j = \rho_{-j}$. Jeżeli zrobimy tak dla $m = 1, \ldots, p$, dostaniemy *równania Yule'a-Walkera*:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{p-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{p-1} & \rho_{p-2} & \rho_{p-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_p \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Teoretycznie, znając funkcję korelacji ρ_m, możemy stąd obliczyć parametry procesu β_j. *W praktyce* nie znamy funkcji korelacji ρ_m, możemy tylko używać korelacji "doświadczalnej", wyliczonej z jedynej znanej nam realizacji procesu:

$$r_m = \left(\frac{1}{N-m} \sum_{i=m+1}^{N} y_{i-m} y_i \right) \Bigg/ \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} y_i^2 \right) . \qquad (12)$$

r_m podstawiamy do równania Yule'a-Walkera (11), skąd wyliczamy *przybliżone* wartości współczynników β_i. Jest jednak poważny problem: Skąd mamy wiedzieć jaki jest rząd procesu, czyli jaki jest rozmiar układu równań (11)?

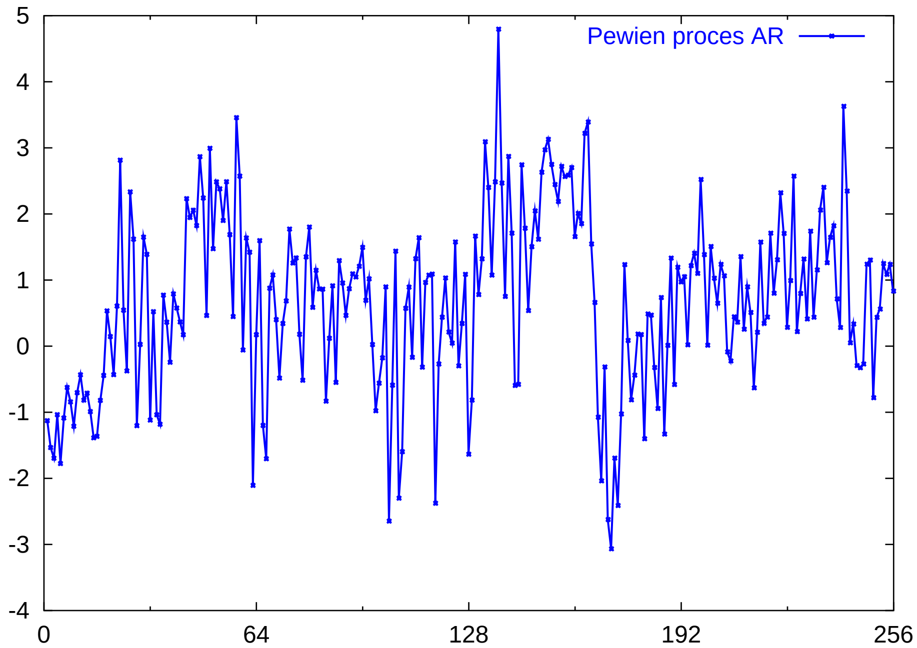
Funkcja autokorelacji cząstkowej

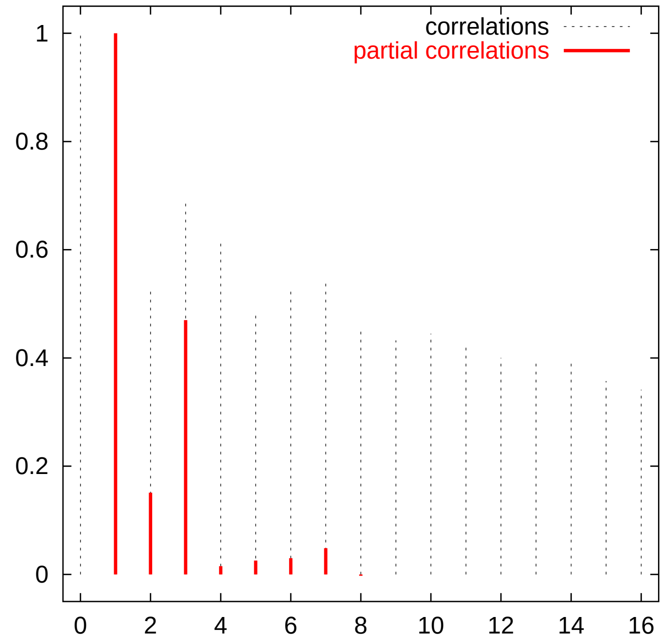
Funkcja autokorelacji procesu *AR*(p) ma rozwinięcie nieskończone, zależy jednak od p liniowo niezależnych funkcji. Załóżmy, że proces jest rzędu k. Wówczas równania Yule'a-Walkera mają postać

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{k1} \\ \varphi_{k2} \\ \vdots \\ \varphi_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}. \tag{13}$$

φ_{kk} nazywam funkcją autokorelacji cząstkowej. *Dla procesu AR rzędu* p, $\varphi_{kk} \neq 0$ *dla* $k \leqslant p$ *i* $\varphi_{kk} \equiv 0$ *dla* $k > p$. W praktyce zamiast ρ_m używamy r_m, co oczywiście utrudnia podjęcie decyzji o rzędzie procesu ☹

Przykład





Parametry wyestymowane:	$p = 3$: $\beta_1 = 0.415$, $\beta_2 = 0.003$, $\beta_3 = 0.470$
	$p = 4$: $\beta_1 = 0.474$, $\beta_2 = -0.149$, $\beta_3 = 0.530$, $\beta_4 = 0.015$
Parametry “prawdziwe”:	$p = 3$: $\beta_1 = 0.500$, $\beta_2 = -0.125$, $\beta_3 = 0.500$

Proces *AR*(1)

$$y_n = \beta_1 y_{n-1} + \alpha_0 \eta_n \tag{14}$$

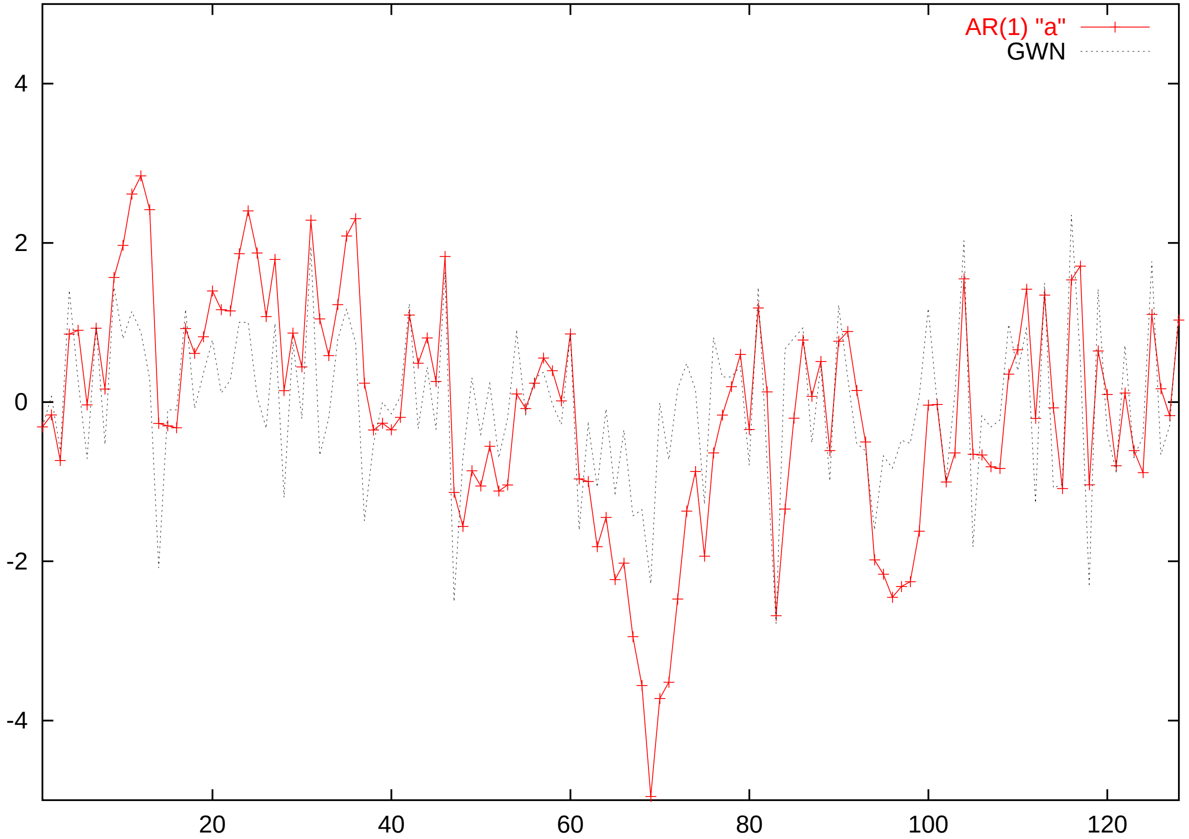
$-1 < \beta_1 < 1$. Funkcja korelacji ($m > 0$):

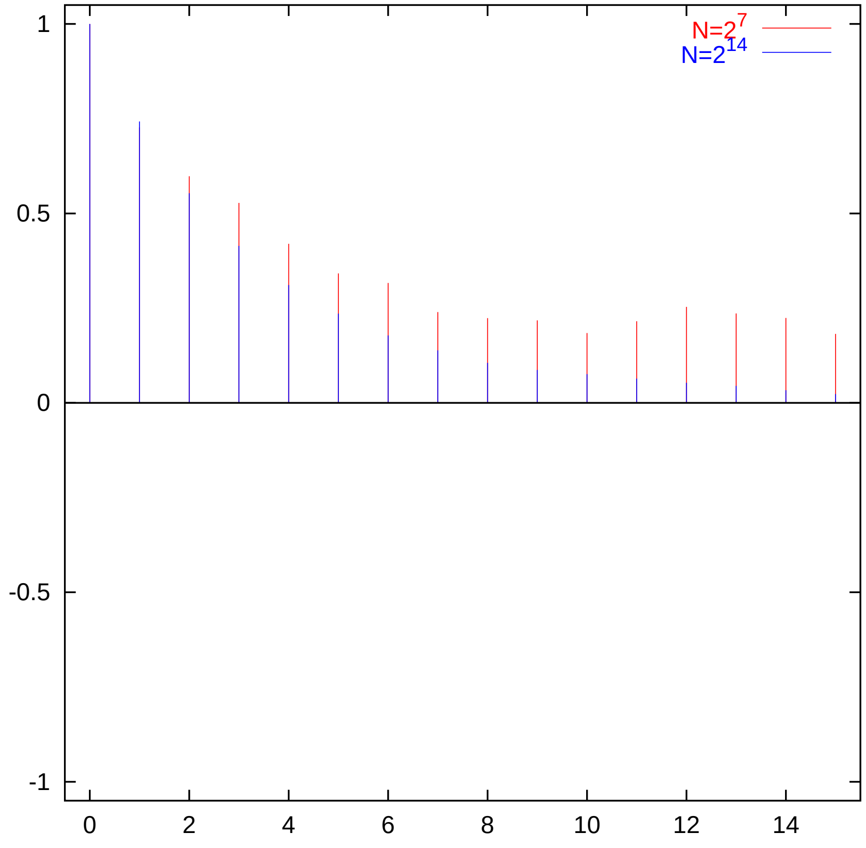
$$\langle y_n y_{n-m} \rangle = \beta_1 \langle y_{n-1} y_{n-m} \rangle + \alpha_0 \langle \eta_n y_{n-m} \rangle \tag{15}$$

$$\rho_m = \beta_1 \rho_{m-1} \tag{16}$$

$$\rho_m = {\beta_1}^m = (\mathrm{sgn}(\beta_1))^m \, e^{-m \ln |\beta_1|} \tag{17}$$

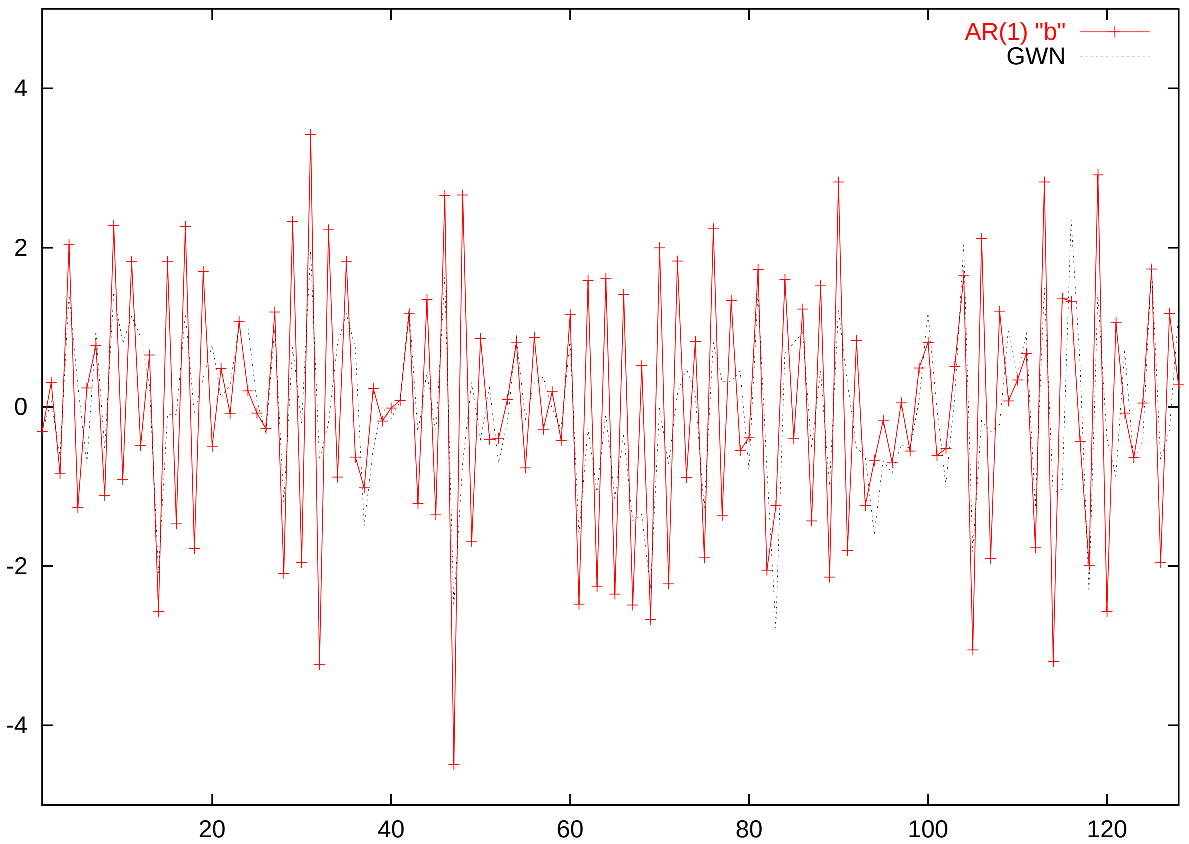
$$y_n = 0.75 y_{n-1} + \eta_n$$

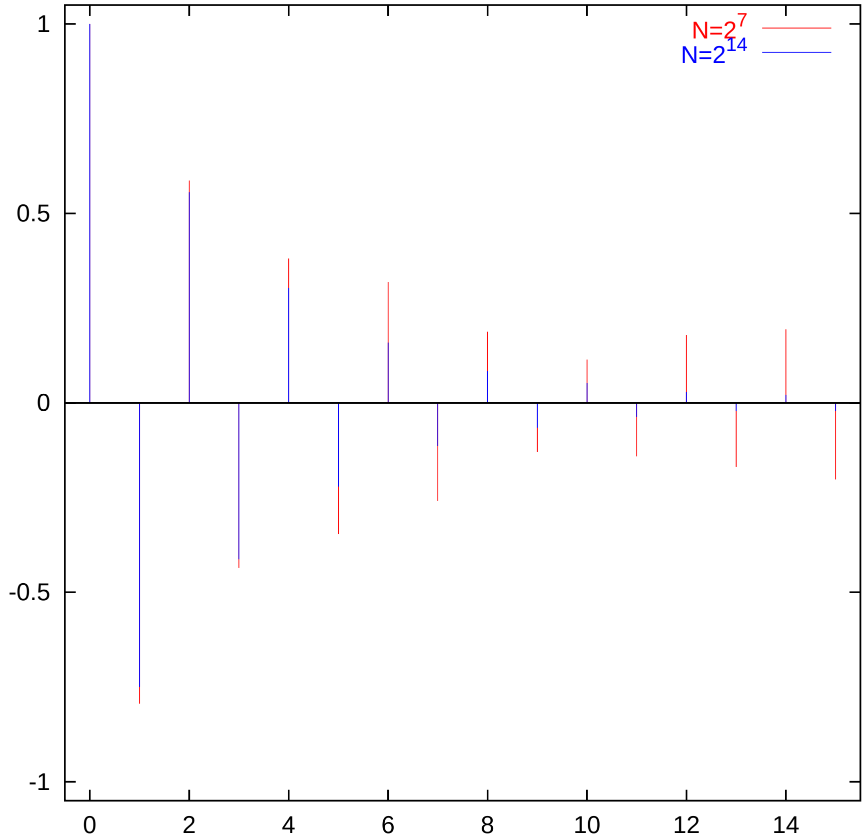




N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

$$y_n = -0.75 y_{n-1} + \eta_n$$




N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

Proces *AR*(2)

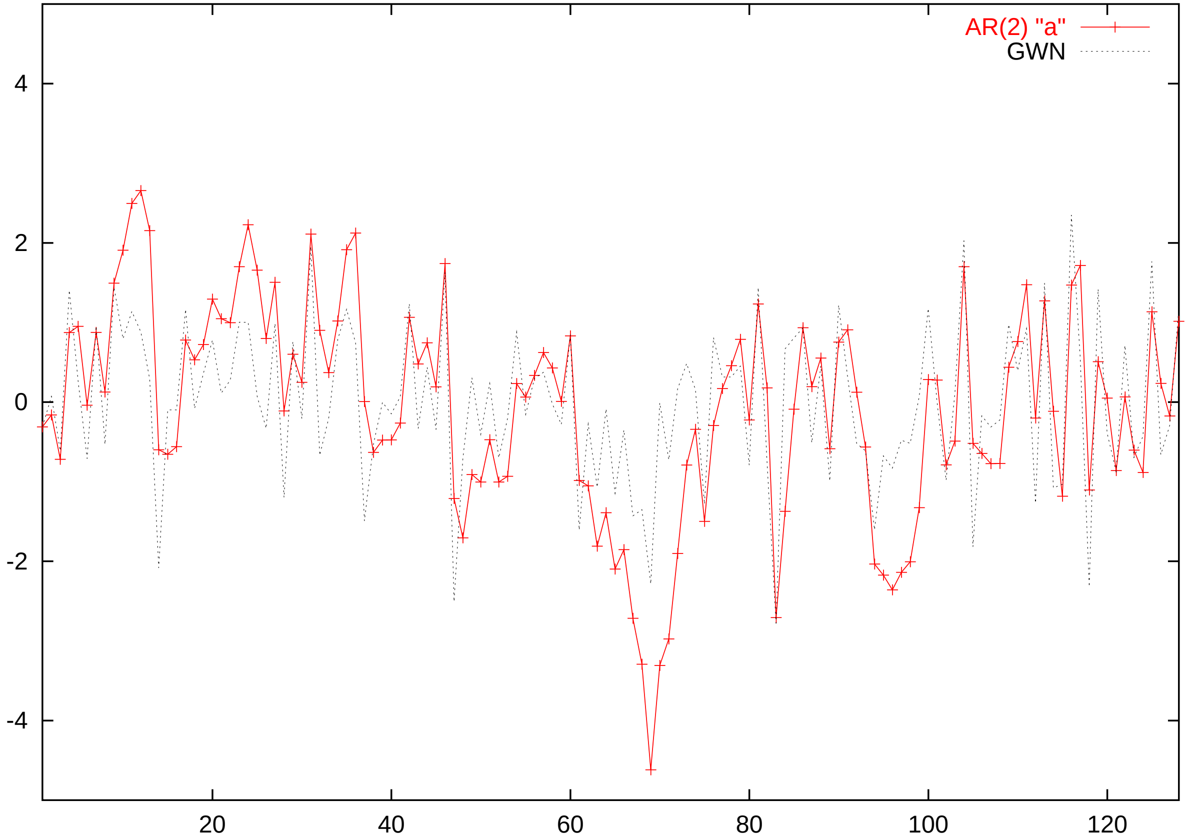
$$y_n = \beta_1 y_{n-1} + \beta_2 y_{n-2} + \alpha_0 \eta_n \tag{18}$$

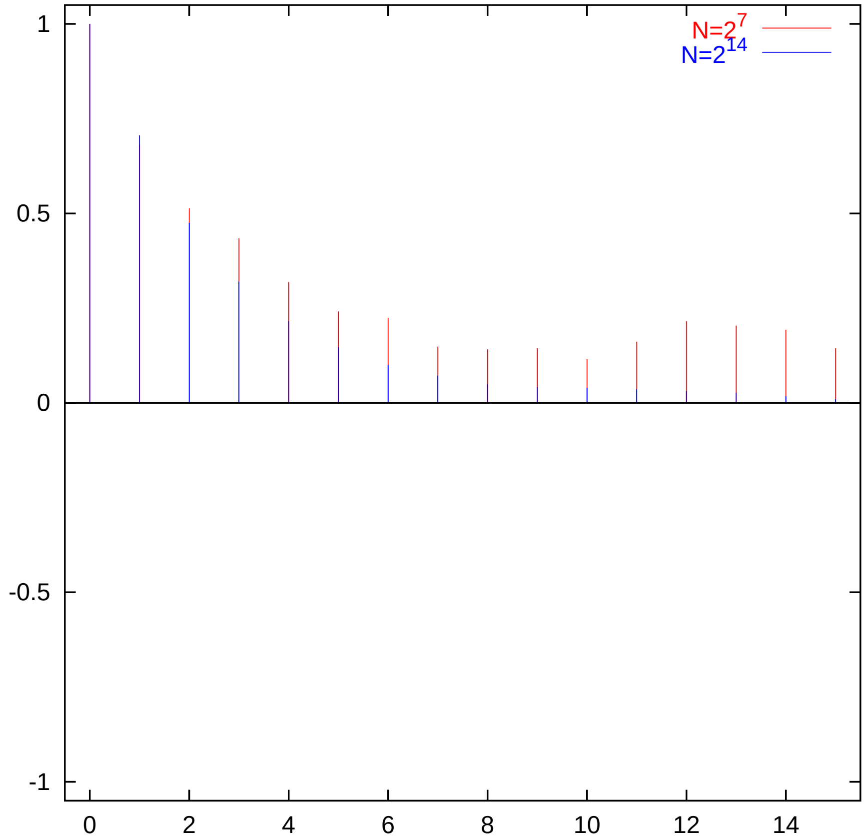
Postępując jak poprzednio

$$\rho_i = \beta_1 \rho_{i-1} + \beta_2 \rho_{i-2} \tag{19}$$

Rozwiązaniem jest albo suma dwu członów zanikających potęgowo ("dwie eksponenty"), albo pewne zanikające rozwiązanie znakozmienne ("drgania tłumione"). To, że korelacja zanika, jest zagwarantowane przez warunki stacjonarności.

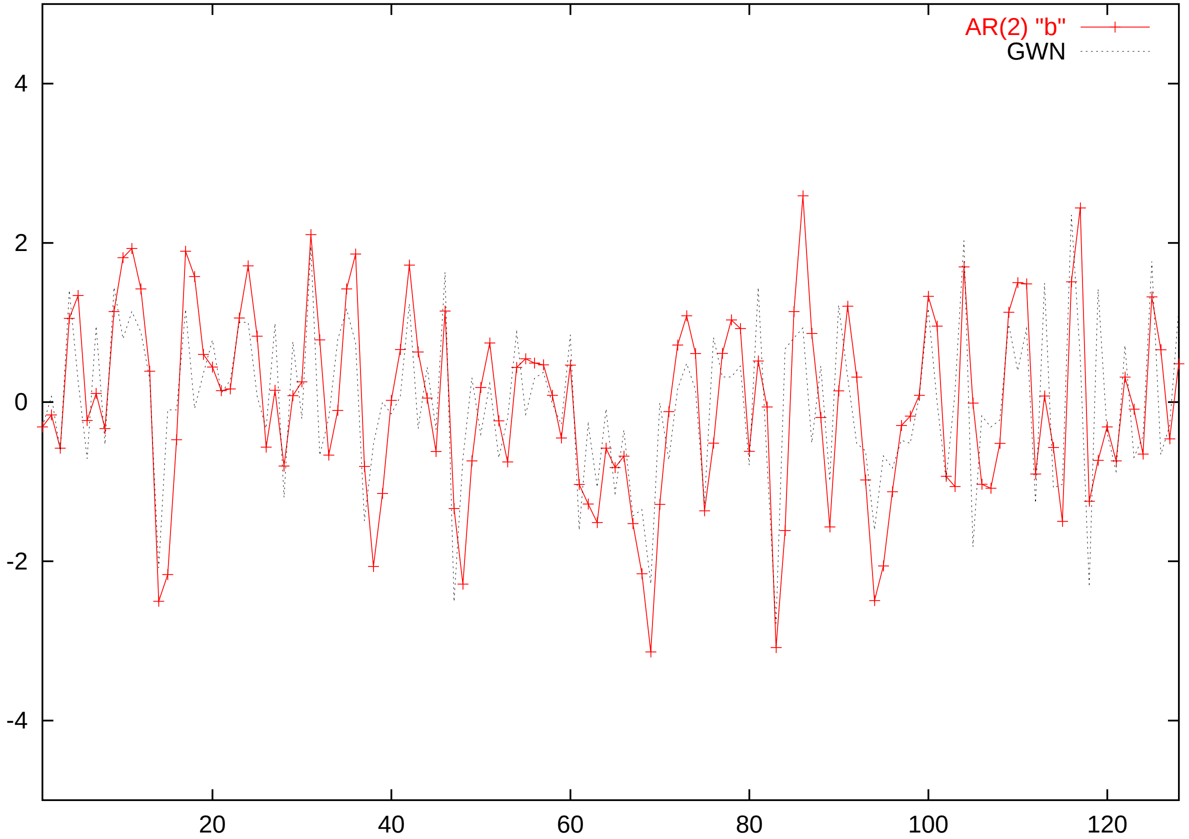
$$y_n = 0.75 y_{n-1} - 0.05 y_{n-2} + \eta_n$$

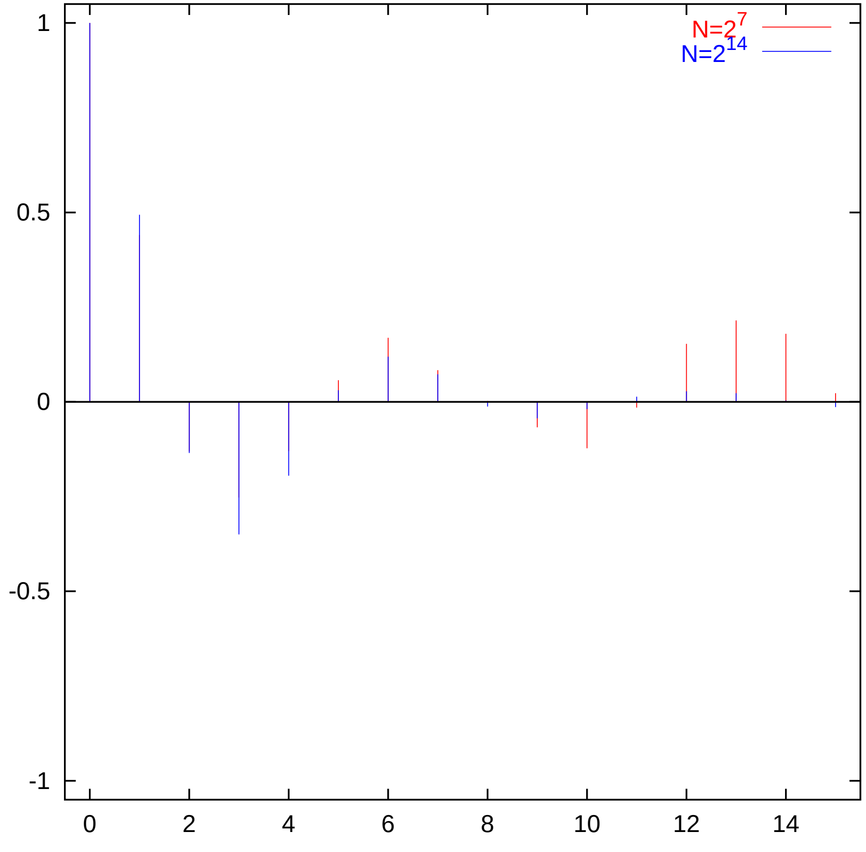




N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

$$y_n = 0.75 y_{n-1} - 0.5 y_{n-2} + \eta_n$$





N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

Procesy średniej ruchomej *MA*(q)

Dla procesu

$$y_n = \alpha_0 \eta_n + \alpha_1 \eta_{n-1} + \cdots + \alpha_q \eta_{n-q} \tag{20}$$

otrzymujemy

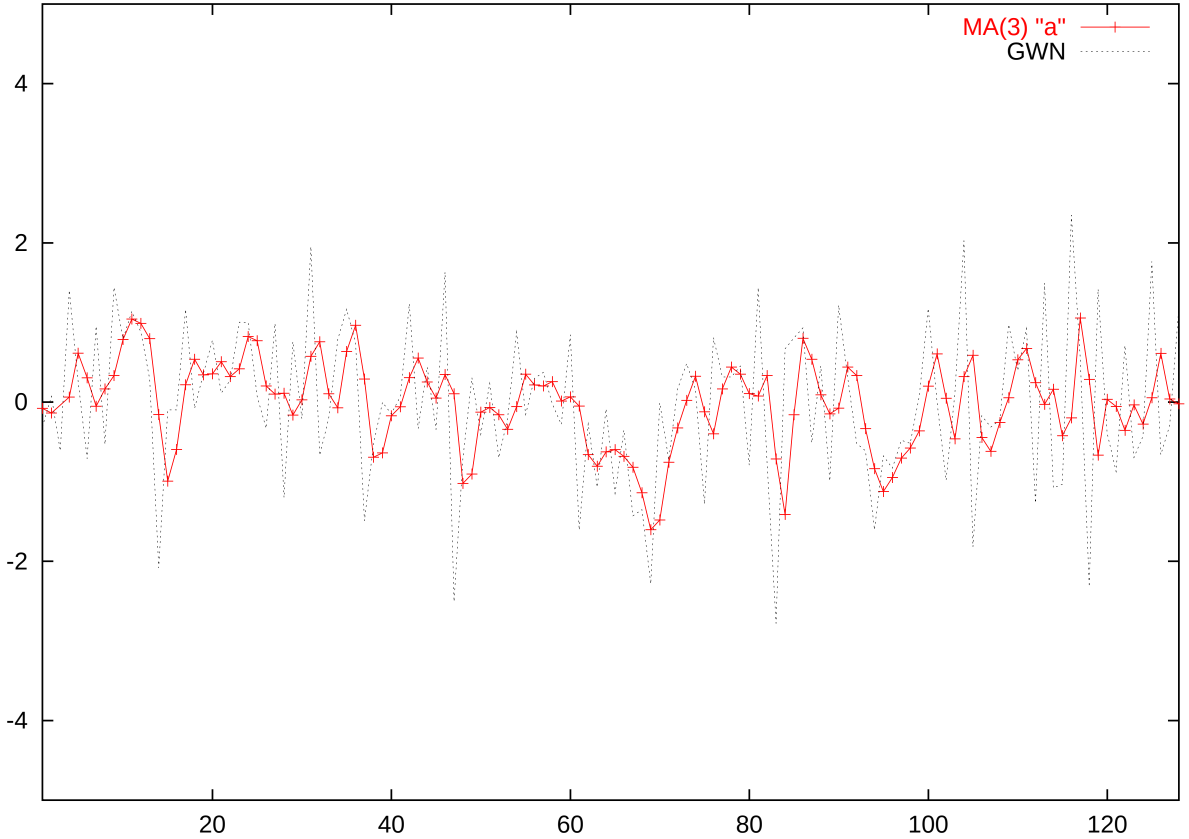
$$\langle y_n y_{n-i} \rangle = \sum_{j=0}^{q} \alpha_j \left\langle \eta_{n-j} y_{n-i} \right\rangle \tag{21}$$

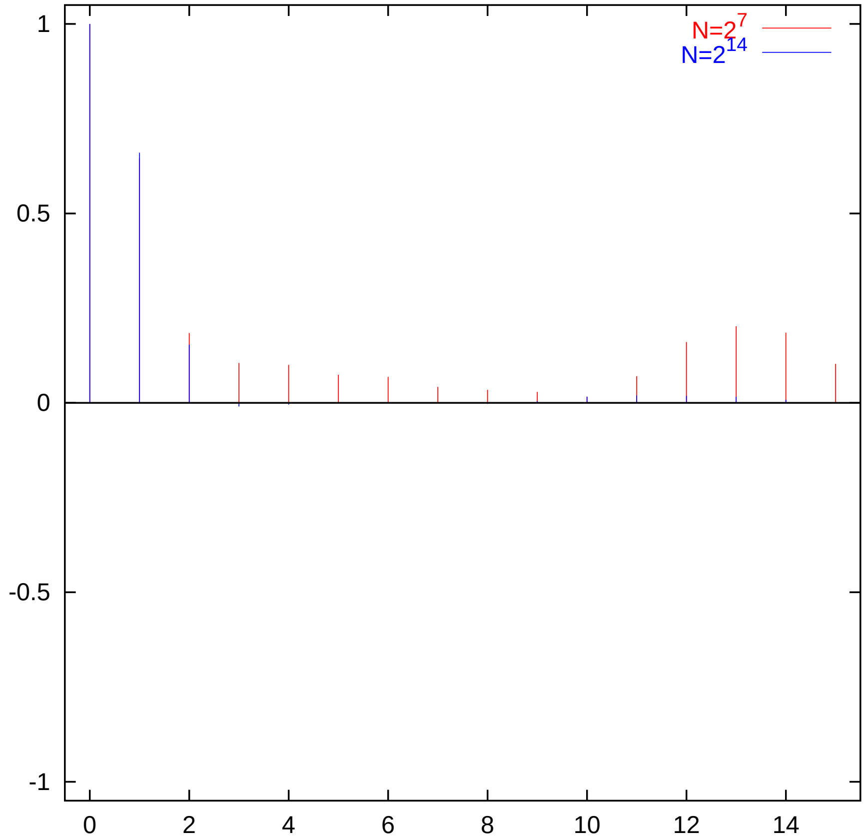
Funkcja korelacji urywa się dla $i > q$:

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{-\alpha_i + \alpha_1 \alpha_{i-1} + \cdots + \alpha_{q-i} \alpha_q}{1 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_q^2} & i = 1, 2, \ldots, q \\ 0 & i > q \end{cases} \tag{22}$$

Funkcja autokorelacji cząstkowej zanika.

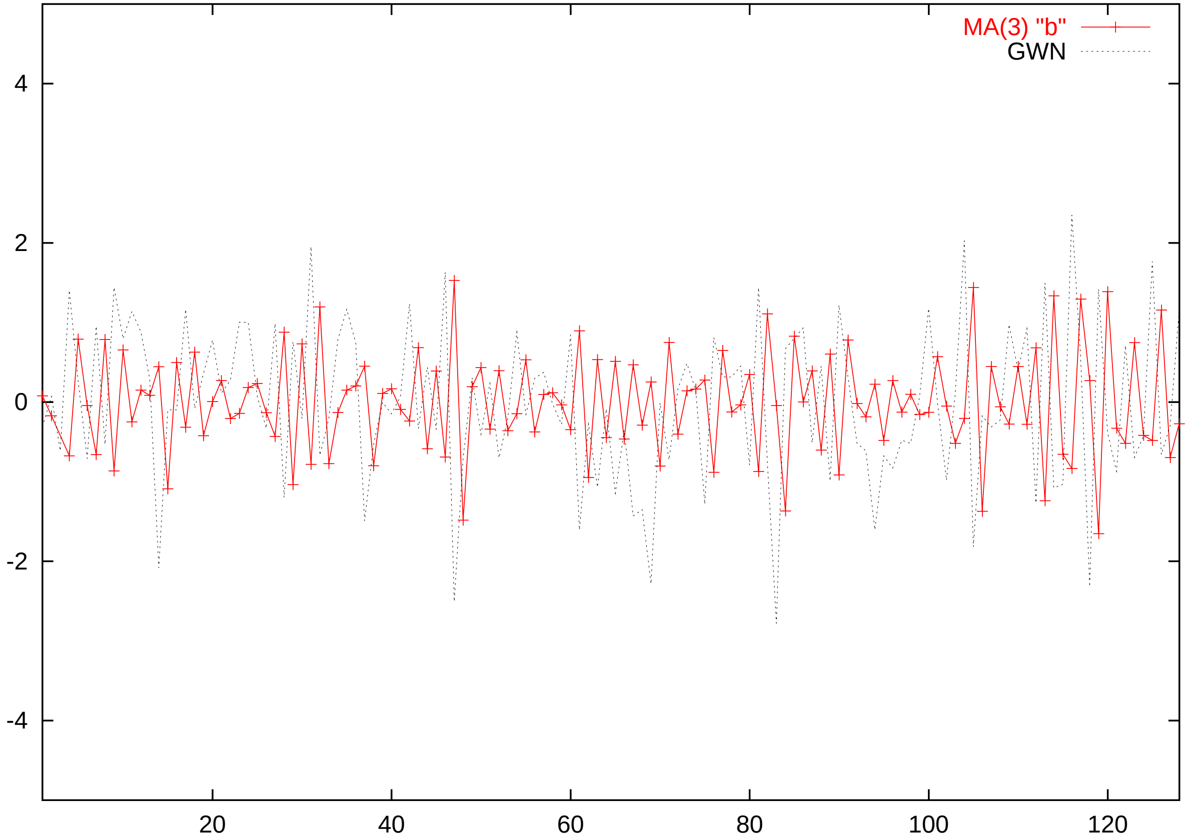
$$y_n = 0.25\eta_n + 0.5\eta_{n-1} + 0.25\eta_{n-2}$$

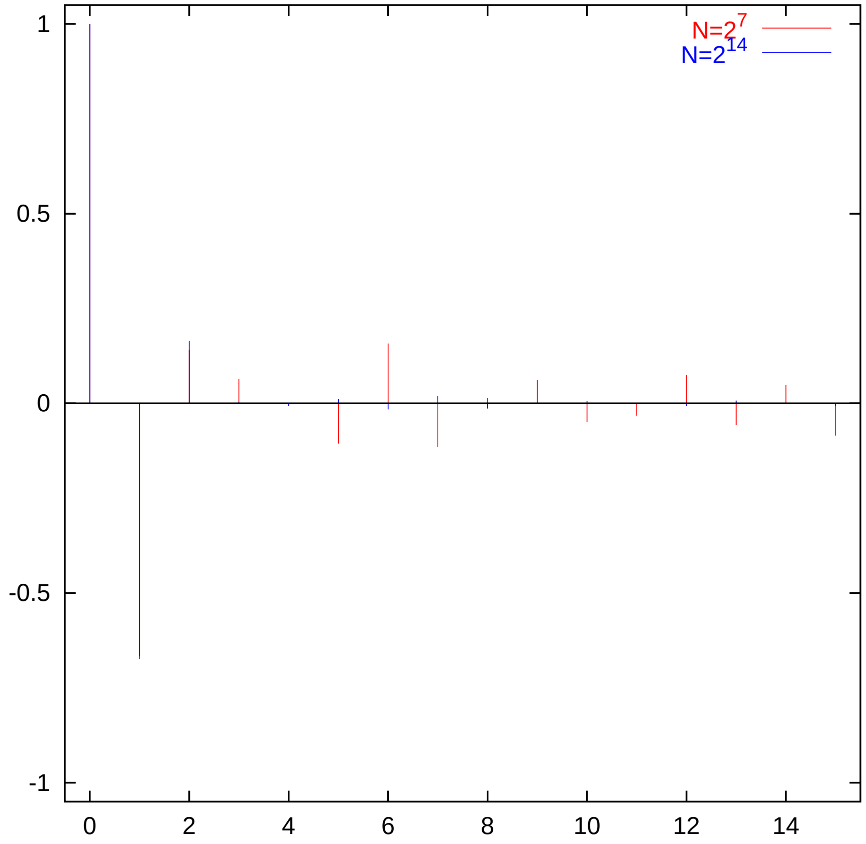




N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

$$y_n = -0.25\eta_n + 0.5\eta_{n-1} + -0.25\eta_{n-2}$$





N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

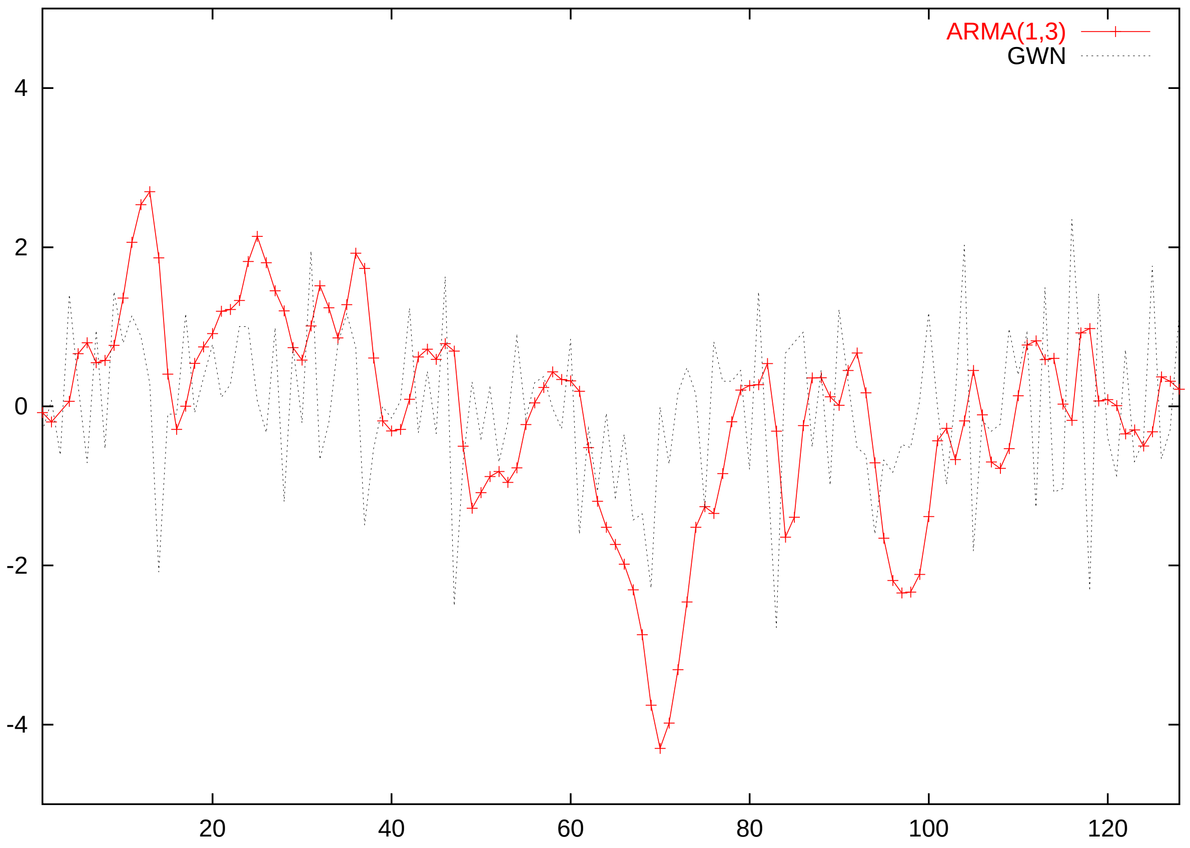
Procesy *ARMA*(p,q)

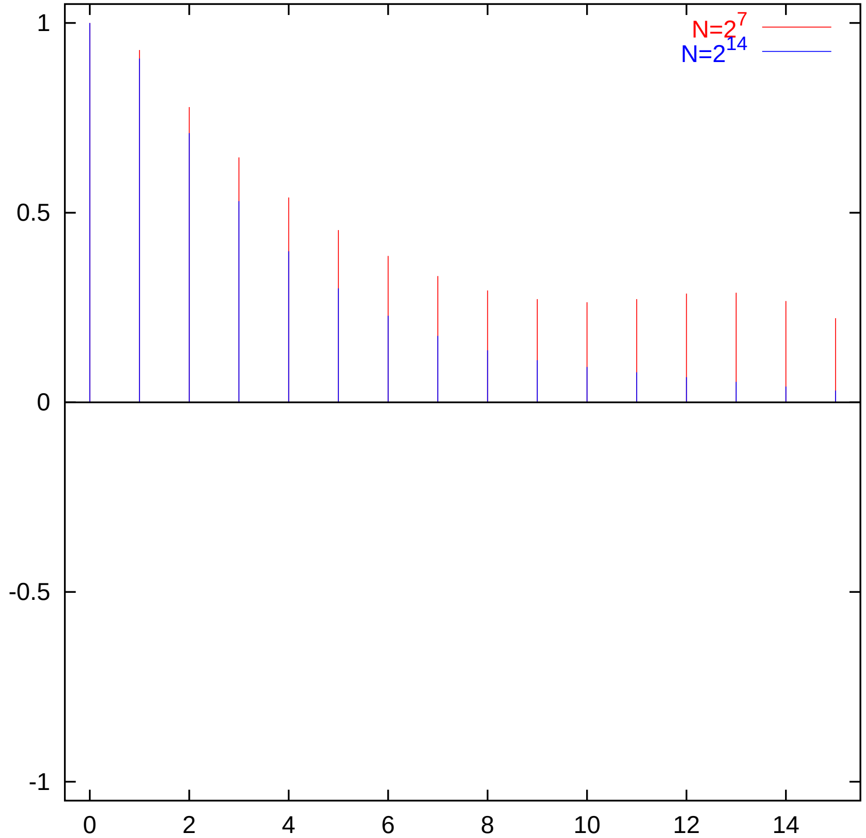
Warunkiem stacjonarności procesu *ARMA* jest stacjonarność części autoregresywnej.

Widmo procesu *ARMA* otrzymujemy z funkcji przejścia odpowiedniego filtru *IIR*:

$$P(f) = \left| \frac{\sum\limits_{n=0}^{q} \alpha_n e^{2\pi i n f}}{1 - \sum\limits_{n=1}^{p} \beta_n e^{2\pi i n f}} \right|^2, \quad 0 \leqslant f \leqslant \frac{1}{2}. \tag{23}$$

$$y_n = 0.75 y_{n-1} + 0.25 \eta_n + 0.5 \eta_{n-1} + 0.25 \eta_{n-2}$$




N=2^7
N=2^14
1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

Kryteria identyfikacji rzędu procesu

Rodzaj procesu	Fukcja autokorelacji	Funkcja autokorelacji cząstkowej
AR(p)	zanika (nieskończona)	urywa się (skończona)
MA(q)	urywa się (skończona)	zanika (nieskończona)
ARMA(p,q)	zanika (nieskończona)	zanika (nieskończona)