Fizyka statystyczna

Dodatek: cykle graniczne

P. F. Góra

https://zfs.fais.uj.edu.pl/pawel_gora

2023

Rozważmy równanie Newtona na ruch z tłumieniem

$$\ddot{x} + \gamma\,\dot{x} + \frac{dV}{dx} = 0\,, \tag{1}$$

gdzie γ jest współczynnikiem tłumienia. Jeżeli $\gamma > 0$, mamy zwykłe tłumienie Stokesowskie, gdzie energia jest rozpraszana. Jeśli $\gamma < 0$, mamy "niefizyczny" przypadek, w którym energia jest pompowana do układu.

Ciekawie robi się wtedy, gdy znak γ może się zmieniać *w zależności od stanu układu*.

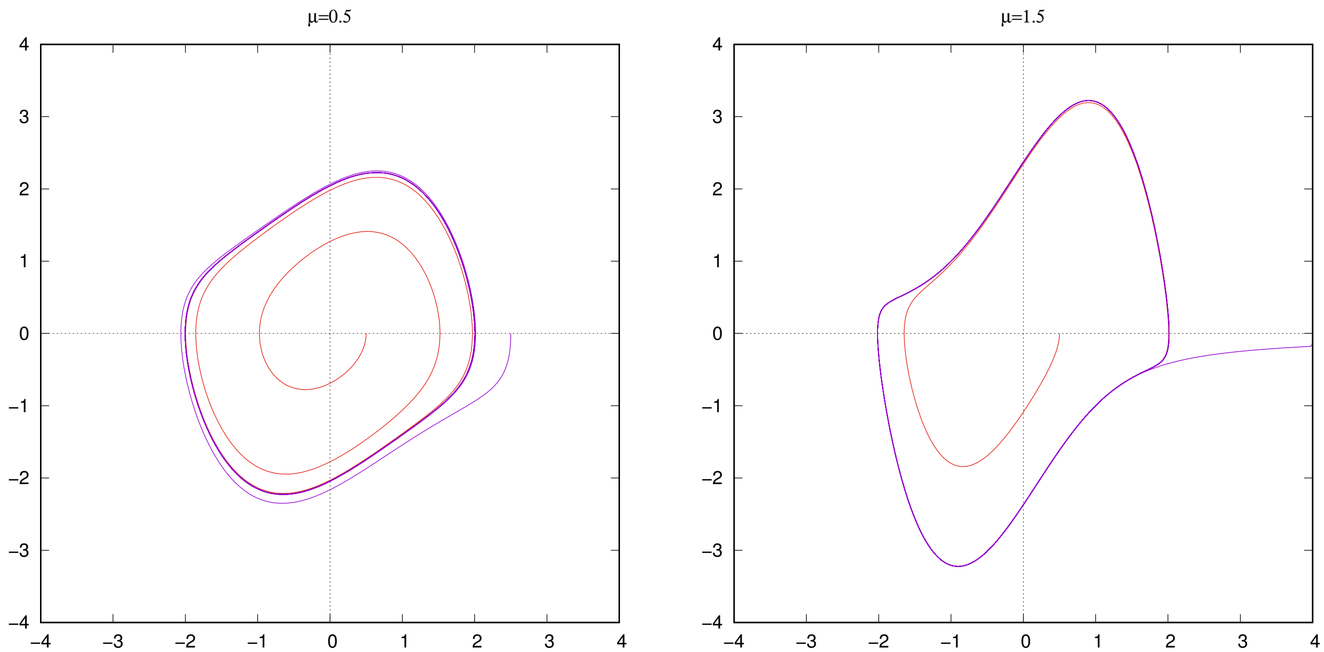
Oscylator van der Pola

Rozważmy pewne równanie należące do ogólnej kategorii (1):

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0\,. \tag{2}$$

Układ taki nazywa się oscylatorem van der Pola. Oscylator van der Pola ma punkt stacjonarny $(x, \dot{x}) = (0, 0)$.

Niech $\mu > 0$. Wówczas $x^2 > 1$ odpowiada tłumieniu "fizycznemu" — oscylator nie może uciec do nieskończoności — natomiast $x^2 < 1$ odpowiada tłumieniu "niefizycznemu" — układ jest odpychany od swojego punktu stacjonarnego.



Wszystkie trajektorie równania (2) dążą do cyklu granicznego. Do określenia położenia na cyklu granicznym wystarczy podać *jedną* współrzędną. Jak znaleźć ten cykl?

Jeśli podstawimy

$$y = x - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{\mu}\dot{x} \tag{3}$$

otrzymamy

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu\left(x - \frac{1}{3}x^3 - y\right) && \text{(4a)} \\ \ddot{x} &= \mu(1 - x^2)\dot{x} - \dot{y} && \text{(4b)} \end{aligned}$$

a wówczas równanie (2) przechodzi w

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu\left(x - \frac{1}{3}x^3 - y\right) && \text{(5a)} \\ \dot{y} &= \frac{1}{\mu}x && \text{(5b)} \end{aligned}$$

W punkcie stacjonarnym układu (5) musi zachodzić

$$\dot{y} = 0 \tag{6}$$

co, biorąc pod uwagę (3), oznacza, że

$$\dot{x} = \mu \left(x - \frac{1}{3} x^3 \right) . \tag{7}$$

To właśnie jest równanie cyklu granicznego. Jest to autonomiczne równanie pierwszego stopnia.

Przykład ciekawszy

Zastanówmy się, czy umiemy *jakościowo* przeanalizować asymptotyczne ($t \gg 1$) rozwiązania równania

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left[2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^4 - 1\right]\frac{dx}{dt} + x^3 = 0\,. \tag{8}$$

Zdefiniujmy

$$\gamma(x,\dot{x}) = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^4 - 1\,. \tag{9}$$

Równanie (8) jest równaniem ruchu w potencjale $\frac{1}{4}x^4$ z “tarciem” $\gamma(x,\dot{x})$, zależnym od położenia i prędkości.

Zauważmy, że

- Punkt $\left(x = 0, \frac{dx}{dt} = 0\right)$ jest punktem stacjonarnym równania (8).
- Jeżeli $\gamma(x, \dot{x}) > 0$, układ jest tłumiony <u>w stronę</u> punktu stacjonarnego.
- Jeżeli $\gamma(x, \dot{x}) < 0$, układ wybucha.
- Jeżeli $|x| \ll 1$ oraz $\left|\frac{dx}{dt}\right| \ll 1$, to $\gamma(x, \dot{x}) < 0$ i układ jest odpychany od punktu stacjonarnego.
- Jeżeli $|x| \gg 1$ lub $\left|\frac{dx}{dt}\right| \gg 1$, to $\gamma(x, \dot{x}) > 0$ i układ jest ściągany <u>w stronę</u> punktu stacjonarnego.

Jako jedyna interesująca możliwość pozostaje

$$2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x^4 - 1 = 0\,. \tag{10}$$

Jeżeli zachodzi (10), równanie (8) redukuje się do

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 = 0\,. \tag{11}$$

Różniczkując (10) dostajemy

$$0 = 4\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + 4x^3\cdot\frac{dx}{dt} = 4\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2} + x^3\right) \tag{12}$$

Widzimy zatem, że jeżeli zachodzi (10), to albo $\frac{dx}{dt} = 0$, co zachodzi na niestabilnym punkcie stacjonarnym, albo spełnione jest równanie (11). Ponieważ równanie to jest zgodne z równaniem (8) przy założeniu (10), widzimy, że równanie (10) jest krzywą całkową równania (8). Rozwiązanie tego typu nazywamy *cyklem granicznym*. Cykl graniczny opisuje tak naprawdę *dwa* rozwiązania, różniące się kierunkiem obiegu.

Stabilność cyklu granicznego

Czy znaleziony cykl graniczny jest stabilny? Załóżmy, że spełnione jest równanie (10). Zaburzamy rozwiązanie $x(t) \to x(t) + \varepsilon(t)$, przy czym zakładamy, że $|\varepsilon(t)| \ll 1$. Wstawiamy zaburzone rozwiązanie do *wyjściowego* równania (8):

$$\ddot{x} + \ddot{\varepsilon} + \left[2(\dot{x} + \dot{\varepsilon})^2 + (x + \varepsilon)^4 - 1\right](\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + (x + \varepsilon)^3 = 0 \tag{13a}$$

$$\ddot{x} + \ddot{\varepsilon} + \left[2(\dot{x})^2 + 4\dot{x}\dot{\varepsilon} + x^4 + 4x^3\varepsilon - 1\right](\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + x^3 + 3x^3\varepsilon = 0 \tag{13b}$$

Wyrazy wyróżnione kolorami zerują się.

$$\ddot{\varepsilon} + 4(\dot{x}\dot{\varepsilon} + x^3\varepsilon)(\dot{x} + \dot{\varepsilon}) + 3x^2\varepsilon = 0 \tag{13c}$$

$$\ddot{\varepsilon} + 4(\dot{x})^2\dot{\varepsilon} + x^2(4\dot{x}x + 3)\varepsilon = 0 \tag{13d}$$

Zauważmy teraz, że jeżeli spełnione jest równanie (10), to $x \in [-1, 1]$, $\dot{x} \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$. Wobec tego

$$|4\dot{x}x| \leqslant 4|\dot{x}| \leqslant \frac{4}{\sqrt{2}} < 3 \Rightarrow 4\dot{x}x + 3 > 0\,, \tag{14}$$

a wobec tego równanie (13d) jakościowo zachowuje się jak równanie tłumionego oscylatora harmonicznego, a zatem *zaburzenie $\varepsilon(t)$ jest ściągane do zera*. Oznacza to, że znaleziony cykl graniczny jest stabilny.