

**Fizyka statystyczna**  
**Kwantowe gazy doskonałe**

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2023

## Gaz doskonały

Dla kwantowego gazu doskonałego, a więc nieoddziałującego, wielka suma statystyczna rozpada się na iloczyn jednocząstkowych wielkich sum statystycznych, czyli

$$\Xi = \prod_{i=0}^{\infty} \text{Tr}_i e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)\hat{n}_i} \quad (1)$$

gdzie  $\varepsilon_i$  jest energią, a  $\hat{n}_i$  operatorem liczby obsadzeń  $i$ -tego poziomu.

Różnice pomiędzy bozonami a fermionami wynikają z różnych możliwości obsadzania poszczególnych stanów.



Satyendra Nath Bose, 1894-1974

## Gaz Bosego

Dla bozonów liczby obsadzeń nie są niczym ograniczone, a zatem (1) przechodzi w

$$\Xi = \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left( e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \right)^n = \prod_{i=0}^{\infty} \left( 1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \right)^{-1} \quad (2)$$

Stąd otrzymujemy wielki potencjał termodynamiczny i średnią liczbę cząstek w doskonałym gazie Bosego:

$$\Omega = -k_B T \ln \left( \prod_{i=0}^{\infty} \left( 1 - e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} \right)^{-1} \right) \quad (3a)$$

$$\langle N \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1} \quad (3b)$$

Widmo energii dane jest przez

$$\varepsilon_p = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (4)$$

Jak poprzednio, gaz zamykamy w bardzo dużym pudle o objętości  $V$  i zastępujemy sumowanie po stanach całkowaniem po wektorach falowych:

$$\sum_i \longrightarrow \frac{gV}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \quad (5)$$

gdzie  $g$  oznacza degenerację stanu. Całkę po kątach wykonujemy trywialnie, wektory falowe wyrażamy poprzez energię i ostatecznie dostajemy

$$-\frac{\Omega}{k_B T} = \frac{PV}{k_B T} = -\frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \ln\left(1 - e^{-\beta(\varepsilon - \mu)}\right) \quad (6)$$

i dalej, całkując przez części,

$$PV = \frac{2}{3} \cdot \frac{gV}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (7)$$

Z drugiej strony

$$E = \sum_i n_i \varepsilon_i \longrightarrow \frac{gV}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (8)$$

a zatem otrzymujemy **równanie stanu doskonałego gazu Bosego**:

$$PV = \frac{2}{3} E \quad (9)$$

## Potencjał chemiczny gazu Bosego

Postępując analogicznie, dostajemy wyrażenie na gęstość cząstek

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1} \quad (10)$$

**Wyrażenie (10) ma sens tylko jeśli  $\varepsilon \geq \mu$ :** Potencjał chemiczny musi być mniejszy od najmniejszej możliwej energii. Ponieważ najniższa energia jest równa zero, potencjał chemiczny gazu Bosego musi spełniać

$$\mu \leq 0 \quad (11)$$

Z drugiej strony w granicy wysokich temperatur wielki potencjał termodynamiczny i gęstość cząstek przyjmują postać klasyczną, skąd możemy wy-

liczyć potencjał chemiczny (por. “kwantowy gaz Boltzmannna” z poprzedniego wykładu):

$$\frac{\mu_C}{k_B T} = \ln \left[ \frac{N}{gV} \left( \frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T} \right)^{3/2} \right]. \quad (12)$$

(12), jako funkcja temperatury, jest monotoniczny: dąży do  $\infty$  przy  $T \rightarrow 0^+$  i do  $-\infty$  przy  $T \rightarrow \infty$ . Wnioskujemy stąd, że potencjał chemiczny gazu Bosego musi leżeć poniżej wartości klasycznej. Łatwo wyliczyć temperaturę, dla której potencjał chemiczny osiąga zero. W (10) podstawiamy  $\mu = 0$  i dostajemy

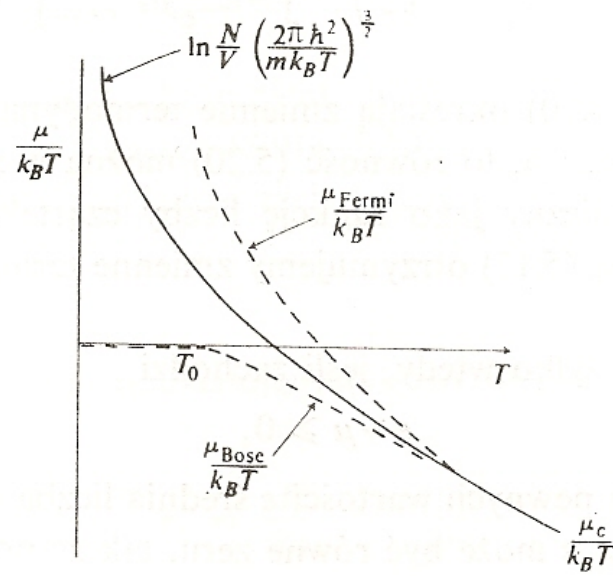
$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\varepsilon/k_B T_0} - 1} = \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2mk_B T_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} \\ &= \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2mk_B T_0}{\hbar^2} \right)^{3/2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned} \quad (13)$$



Stąd można wyliczyć

$$T_0 = \frac{\hbar^2}{2mk_B} \left( \frac{4\pi^2}{g\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \right)^{2/3} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (14)$$

Poniżej  $T_0$ , potencjał chemiczny gazu Bosego musi być inifinitezymalnie mały i ujemny:  $\mu = 0^-$  dla  $T \leq T_0$ .



## Kondensacja Bosego-Einsteina

Dla  $T < T_0$   $\mu = 0^-$  i całka we wzorze (10) jest mniejsza od  $N/V$ , gdyż wartość mianownika rośnie w porównaniu do wartości w  $T_0$ . Skąd się to bierze? Otóż zastępując w (5) sumę po stanach całką po pędach (efektywnie po energiach), **zgubiliśmy pierwszy wyraz**: gęstość stanów jest proporcjonalna do  $\varepsilon^{1/2}$ , więc ten stan “znika”, podczas gdy w rzeczywistości może wnieść znaczny wkład do całej sumy: **Dla  $T < T_0$  stan o naniższej energii jest makroskopowo obsadzany**. Zjawisko to nosi nazwę **kondensacji Bosego-Einsteina**.

Całka (10) daje wówczas tylko gęstość stanów o energiach większych od zera; pozostałe cząstki znajdują się w stanie o energii zerowej (najniższej):

$$\frac{N_{\varepsilon>0}}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty dx \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} = \frac{N}{V} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad (15a)$$

$$\frac{N_{\varepsilon=0}}{V} = \frac{N}{V} \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \right] \quad (15b)$$

Podobnie możemy wyliczyć energię i pojemność cieplną dla  $T \leq T_0$

$$E = \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} N k_B T \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad (16a)$$

$$C_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} N k_B \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} \quad (16b)$$

## Gaz Bosego dla $T > T_0$

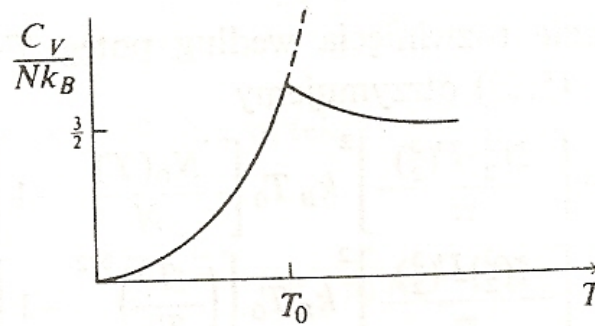
Wyliczmy różnicę pomiędzy prawdziwą liczbą cząstek a hipotetyczną liczbą cząstek dla przypadku  $\mu = 0$  i  $T > T_0$ .

$$\begin{aligned} N - N_0(T) &= \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \varepsilon^{1/2} \left[ \frac{1}{e^{(\varepsilon-\mu)/k_B T} - 1} - \frac{1}{e^{\varepsilon/k_B T} - 1} \right] \\ &\simeq -\frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \pi k_B T_0 |\mu|^{1/2} \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie ostatnią równość otrzymaliśmy rozwijając funkcję podcałkową dla  $0 < T - T_0 \ll T_0$ , gdyż wówczas wkład wnoszą tylko małe wartości  $\varepsilon$ . Stąd wyliczamy potencjał chemiczny

$$\mu \simeq - \left[ \frac{\zeta\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\pi} \right]^2 k_B T_0 \left[ \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2} - 1 \right]^2 \quad (18)$$

Potencjał chemiczny doskonałego gazu Bosego ma nieciągłą drugą pochodną w  $T = T_0$ . Postępując analogicznie, widzimy, że pojemność cieplna ma wówczas ostrze. **Doskonały gaz Bosego wykazuje przejście fazowe drugiego rodzaju w  $T = T_0$ .**



## Komentarz: Znaczenie potencjału chemicznego

**Formalnie** potencjał chemiczny jest wielkością, która jest równa dla dwóch układów, które pozostają w równowadze ze względu na wymianę cząstek — podobnie jak temperatura jest wielkością, która jest równa dla dwóch układów, które pozostają w równowadze ze względu na przekaz ciepła.

Potencjał chemiczny w ogólności *zależy* od parametrów układu, takich jak temperatura, objętość, liczba cząsteczek itp. Aby zrozumieć tę zależność, należy zadać pytanie: w jaki sposób zwiększyć całkowitą entropię układu (i otoczenia), w jaki sposób dodawanie cząsteczek do układu może zwiększyć tę entropię?

Pamiętajmy, że

$$dF = -S dT - p dV + \mu dN \quad (19a)$$

$$\mu = \left. \frac{\partial F}{\partial N} \right|_{T,V} \quad (19b)$$

Dla układu w stałej temperaturze i objętości, potencjał chemiczny jest zmianą **energii swobodnej Helmholtza** wynikającą z dodania nowej cząsteczki do układu.



## Wysokie temperatury

Dla układów (dla gazów) w wysokich temperaturach dodanie cząsteczki na ogół (poza przypadkami jakichś bardzo szczególnych oddziaływań) **zwiększa** energię układu. W warunkach stałej temperatury i objętości układ “stara się” minimalizować swoją energię swobodną Helmholtza.  $F = U - TS$ . Jeśli więc energia wewnętrzna rośnie, ale energia swobodna Helmholtza spada, oznacza to, że z jednej strony potencjał chemiczny jest **ujemny** (spadek energii swobodnej!), z drugiej, że **wzrost** energii wewnętrznej jest (z naddatkiem) rekompensowany przez wzrost entropii: Dodanie cząsteczki do układu powoduje wzrost energii, ale zarazem sprawia, że energia ta może zostać rozdystrybuowana na więcej sposobów, a więc rośnie liczba stanów dostępnych układowi.

## Gaz klasyczny w niskich temperaturach

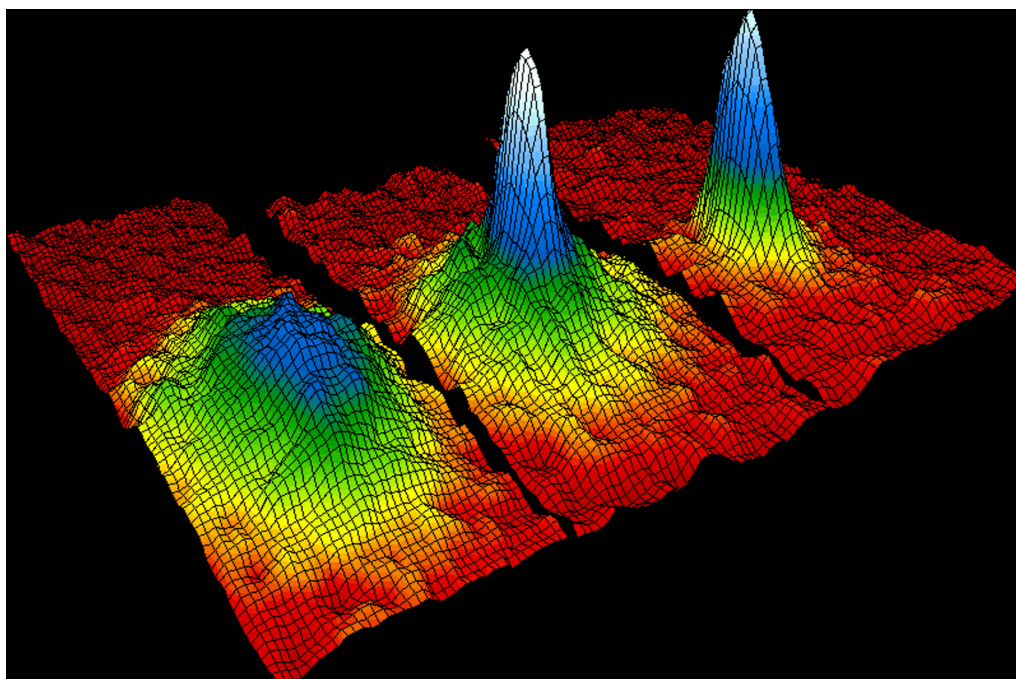
W niskich temperaturach (lub przy dużej gęstości) w gazie klasycznym wzrost energii wewnętrznej związany z dodaniem cząsteczki do układu *nie jest* dostatecznie kompensowany przez wzrost entropii, a dodatkowo mogą pojawiać się efekty wykluczonej objętości. Potencjał chemiczny gazu staje się dodatni. (Należy jednak pamiętać, że *klasyczny* gaz w bardzo niskich temperaturach nie ma wielkiego sensu.)

## Bozony w niskich temperaturach

Poniżej temperatury krytycznej, potencjał chemiczny gazu Bosego staje się infinitezymalnie mały i ujemny: układ może przyjmować dowolnie dużo cząsteczek. Pojawia się **uporządkowanie w przestrzeni pędów**. Część bozonów wciąż ma niezerowe energie i pędy, ale w miarę spadku temperatury od  $T_0$  do zera, coraz więcej bozonów obsadza stan o zerowej energii. *Kondensacja Bosego-Einsteina jest wynikiem zmiany analitycznych własności potencjału chemicznego w temperaturze kondensacji.*

Aby uzyskać pewien pogląd na skalę temperaturową, jeśli wziąć parametry dla atomów  $^4\text{He}$ , otrzymamy  $T_0 \simeq 3.14 \text{ K}$ . Ciekły hel przechodzi do stanu nadciekłego w temperaturze 2.2 K, ale kondensacja Bosego-Einsteina jest tylko przybliżonym wyjaśnieniem zjawiska nadciekłości, z uwagi na silne oddziaływania w cieczy kwantowej.

“Czysty” kondensat Bosego-Einsteina uzyskano w 1995 (Nagroda Nobla 2001), kondensując gaz atomów rubidu w 170 nK. Obrazek przedstawia rozkład prędkości atomów gazu tuż przed kondensacją, w temperaturze kondensacji i w temperaturze poniżej temperatury kondensacji.



## Fotony

Fotony są bozonami. Czy wobec tego mogą podlegać zjawisku kondensacji?

Odpowiedź jest negatywna: **Fotony nie podlegają kondensacji Bosego-Einsteina**. Dlaczego? Jak widzieliśmy, z formalnego punktu widzenia kondensacja Bosego-Einsteina oznacza zmianę w analitycznym charakterze potencjału chemicznego, tymczasem **potencjał chemiczny fotonów stale równy jest zero**, a więc zjawisko kondensacji “nie ma gdzie” zachodzić.

Patrząc na to inaczej, kondensacja oznacza makroskopowe obsadzenie stanu o najniższej energii; dla gazu doskonałego jest to stan o energii zerowej. Jest to możliwe dla cząstek masywnych, ale nie dla bezmasowych,

które muszą poruszać się z prędkością  $c \neq 0$ . Formalnym przejawem tego jest fakt, że doskonały gaz fotonów *nie spełnia* równania stanu (9).

Komentarz: W silnie nieliniowej optyce obserwuje się zjawisko “zatrzymania światła” — fotony nie są jednak wówczas swobodne, ale są pochłaniane i reemitowane przez specjalnie przygotowany ośrodek. “Zatrzymanie światła” można interpretować jako powstanie bardzo złożonego stanu kwantowego, w którym potencjał chemiczny fotonów staje się dodatni. Podobnie można powiedzieć, że do chwili, w której młody Wszechświat stał się przezroczysty (czyli do oderwania się promieniowania zwanego dziś reliktywnym od materii), potencjał chemiczny fotonów był dodatni.

## Fermiony w niskich temperaturach

Wychodzimy ze znanego już wtrącenia na wielką sumę statystyczną:

$$\Xi = \prod_{i=0}^{\infty} \text{Tr}_i e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)\hat{n}_i} \quad (20)$$

gdzie  $\varepsilon_i$  jest energią, a  $\hat{n}_i$  operatorem liczby obsadzeń  $i$ -tego poziomu. Rozpatrujemy gaz doskonały, którego poziomy energetyczne kwantujemy tak samo, jak dla bozonów. Różnica bierze się stąd, że liczby obsadzeń mogą przyjmować tylko wartości 0 lub 1.

$$\Xi = \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n=0}^1 \left( e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right)^n = \prod_{i=0}^{\infty} \left( 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right) \quad (21a)$$

$$\Omega = -k_B T \sum_{i=0}^{\infty} \ln \left( 1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} \right) \quad (21b)$$

$$\langle N \rangle = \sum_{i=0}^{\infty} n_i^0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} + 1} \quad (21c)$$



## Równanie stanu

Postępując tak, jak dla bozonów i przyjmując nierelatywistyczne widmo energii, znajdujemy, że dla fermionów

$$PV = \frac{2}{3}E = \frac{2}{3} \cdot \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{3/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad (22a)$$

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)} + 1} \quad (22b)$$

## Średnia liczba obsadzeń

Poziom o energii  $\varepsilon_i$  ( $\varepsilon_i \geq 0$ ) jest średnio obsadzany przez

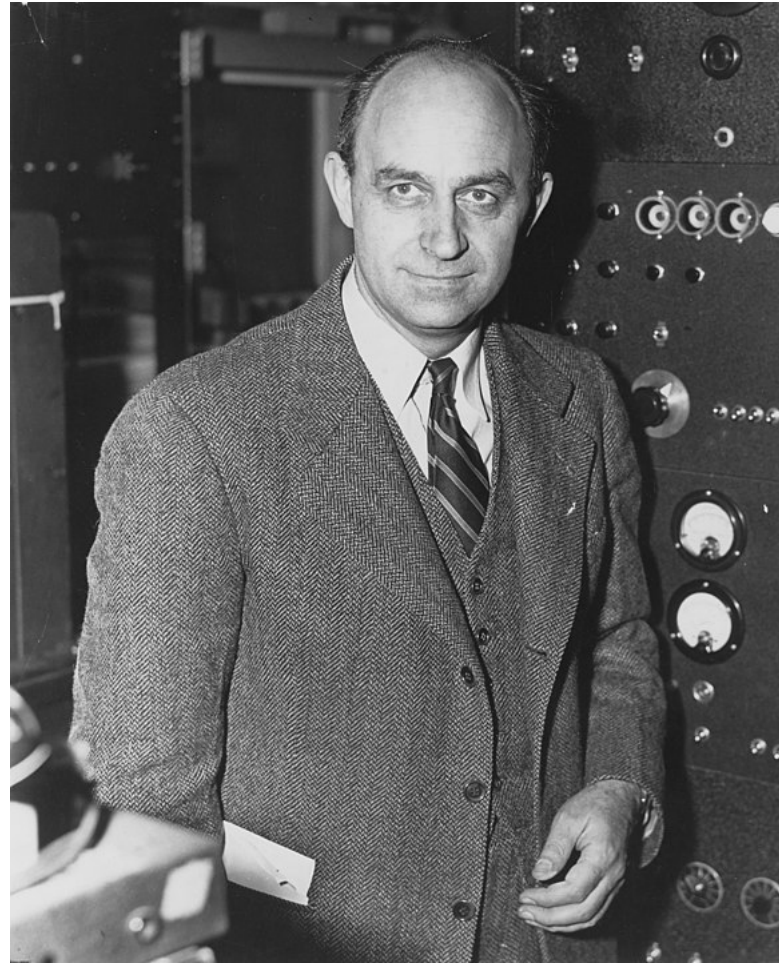
$$n_i^0 = \left( e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1 \right)^{-1} \quad (23)$$

cząstek. Widzimy, że  $n_i^0 \leq 1$ , natomiast w granicy wysokich temperatur,  $T \rightarrow \infty$ , natychmiast otrzymujemy rozkład Boltzmanna  $n_i^0 = e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}$ .

W  $T = 0$  rozkład Fermiego redukuje się do funkcji schodkowej:

$$\frac{1}{e^{(\varepsilon - \mu)/k_B T} + 1} = \begin{cases} 1 & \varepsilon < \mu \\ 0 & \varepsilon > \mu \end{cases} \quad (24)$$

Stan układu o najniższej energii otrzymuje się obsadzając jednocząstkowe poziomy energetyczne aż do  $\mu = \varepsilon_F$  w  $T = 0$ . **Potencjał chemiczny doskonałego gazu Fermiego w  $T = 0$  jest skończoną liczbą dodatnią, równą energii Fermiego.**



Enrico Fermi  
1901-54

## Własności doskonałego gazu Fermiego w $T = 0$

W  $T = 0$  mamy po uwzględnieniu (24)

$$\frac{N}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \int_0^\mu d\varepsilon \varepsilon^{1/2} = \frac{g}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} \frac{2}{3} \mu^{3/2} \quad (25)$$

Stąd możemy wyliczyć energię Fermiego i wektor falowy Fermiego jako funkcję gęstości cząstek:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \mu(T = 0) = \left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \quad (26)$$

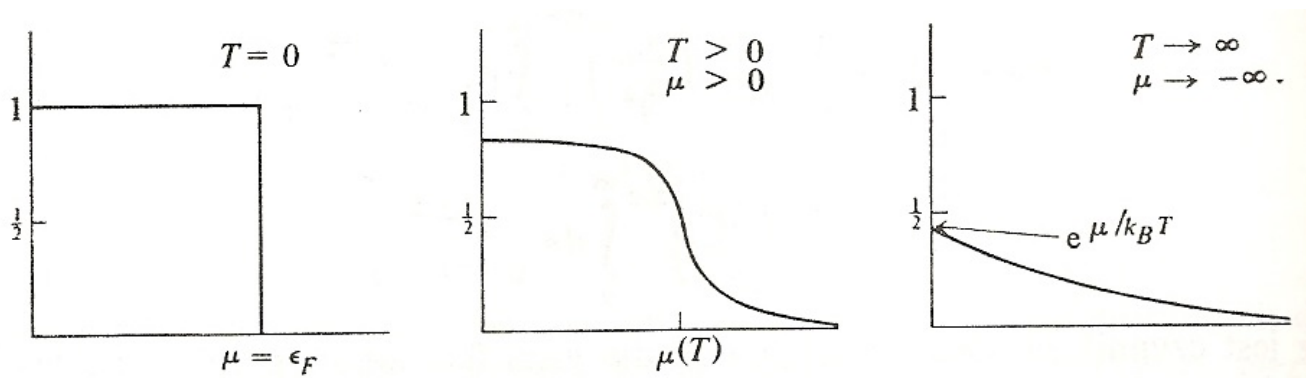
Podobnie

$$\frac{E}{V} = \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{2}{5} \mu^{5/2} \quad (27)$$

$$P = \frac{2}{5} \cdot \frac{g}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \mu^{5/2} \quad (28)$$

W temperaturze  $T = 0$  gaz Fermiego wywiera skończone ciśnienie, gdyż na skutek zakazu Pauliego, obsadzone są wszystkie stany pędowe, aż do pędu Fermiego. Fermiony w tych wyższych stanach pędowych wywierają ciśnienie na ścianki zbiornika.

W niskich temperaturach potencjał chemiczny gazu Fermiego jest dodatni i większy niż dla gazu klasycznego. Dodanie nowej cząsteczki zwiększa energię, ale ponieważ z dużym prawdopodobieństwem nowa cząsteczka zajmuje stan o najniższej dopuszczalnej energii, jest to proces dość przewidywalny i związany z nim spadek entropii nie jest znaczny. W granicy wysokich temperatur  $T \rightarrow \infty$  potencjał chemiczny gazu Fermiego staje się praktycznie równy potencjałowi chemicznemu gazu klasycznego.



## Rozkład Fermiego w różnych temperaturach

## Gaz Fermiego w skończonych temperaturach

Dla  $T > 0$ , ale niewiele większych od zera, równanie stanu przybiera postać

$$PV = \frac{2}{3} \cdot \frac{gV}{4\pi^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2} (k_B T)^{5/2} \int_{-\mu/k_B T}^{\infty} dx \frac{(x + \mu/k_B T)^{3/2}}{e^x + 1} \quad (29)$$

Pomijając szczegóły matematyczne i korzystając z faktu, że  $\mu = \partial(pV)/\partial N|_{T,V}$ , można znaleźć wyrażenie na potencjał chemiczny:

$$\mu = \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\varepsilon_F}\right)^2 + \dots \right] \quad (30)$$

Podobnie

$$S = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \quad (31)$$

Wynika stąd, że w granicy niskich temperatur

$$C_V = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{V,N} = \frac{\pi^2}{2} N k_B \frac{k_B T}{\varepsilon_F} \quad (32)$$

Pojemność cieplna zmienia się liniowo z temperaturą. Z drugiej strony w granicy wysokich temperatur pojemność cieplna dąży do wartości stałej  $C_V \rightarrow \frac{3}{2} N k_B$ .

Funkcje termodynamiczne doskonałego gazu Fermiego nie wykazują żadnych nieciągłości w funkcji temperatury.



## Parametr zwyrodnienia

To, czy w układzie dominować będą efekty kwantowe, czy też można stosować statystykę Boltzmann, zależy od stosunku objętości właściwej (gęstości cząstek) do objętości zajmowanej przez cząstkę “klasyczną” o danej energii cieplnej.

$$\xi = \frac{N}{gV} \left( \frac{\hbar^2}{2\pi m k_B T} \right)^{3/2} \quad (33)$$

Jeśli  $\xi \ll 1$ , efekty kwantowe nie są istotne. Efektów kwantowych należy szukać więc przy bardzo dużych gęstościach lub niskich temperaturach. Ale jak dużych gęstościach i jak niskich temperaturach? Dla helu w warunkach normalnych  $\xi \sim 4 \cdot 10^{-7}$ , a więc gaz zachowuje się zupełnie klasycznie. Z drugiej strony dla gazu elektronów przewodnictwa w metalu  $\xi \sim 4000$ . **Gaz elektronów przewodnictwa we wszystkich metalach, aż do temperatury topnienia, zachowuje się jak silnie zwyrodniały gaz Fermiego.**

## Teoria białych karłów

Biały karzeł to słabo świecąca gwiazda, która wypaliła już swoje paliwo i teraz — powoli — stygnie. Białe karły są zbudowane głównie z helu. mają one gęstość  $\rho \sim 10^7 \text{ g/cm}^3 \sim 10^7 \rho_{\odot}$ , masę  $M \sim 10^{33} \text{ g} \sim M_{\odot}$ , temperaturę  $T \sim 10^7 \text{ K} \sim T_{\odot}$ . Gwiazda zbudowana jest z całkowicie zjonizowanych jąder helu i gazu elektronów swobodnych. Gęstość elektronów wynosi  $\sim 10^{30}$  na  $\text{cm}^3$ , co odpowiada energii i temperaturze Fermiego

$$\varepsilon_F \sim \frac{\hbar^2}{2m_e} \sim 20 \text{ MeV}, \quad T_F = \varepsilon_F/k_B \sim 10^{11} \text{ K}. \quad (34)$$

Temperatura Fermiego jest o wiele wyższa od faktycznej temperatury gwiazdy, więc gaz elektronów można traktować jak doskonały gaz Fermiego, zachowujący się jak gaz w temperaturze zera bezwzględnego.

W tym uproszczonym modelu pomijamy efekty takie, jak możliwość kreacji par elektron-pozyton oraz kreacji neutrin w zderzeniach.

Biały karzeł jest stabilny, gdyż energii grawitacyjnej przeciwstawia się ciśnienie gazu Fermiego.

Obliczmy to ciśnienie. Energie poziomów nie zależą od spinu i są dane przez

$$\varepsilon_{ps} = \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2}. \quad (35)$$

Wobec tego energia stanu podstawowego jest dana całką z tego wyrażenia aż do pędu Fermiego  $p_F = \hbar(3\pi^2/v)^{1/3}$ :

$$E_0 = \frac{2V}{\hbar^2} \int_0^{p_F} dp 4\pi p^2 \sqrt{(pc)^2 + (m_e c^2)^2} \quad (36)$$

Wówczas

$$\frac{E_0}{N} = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} v f(x_F), \quad (37)$$

gdzie  $x_F = p_F/m_e c$  oraz

$$\begin{aligned}
 f(x_F) &= \int_0^{x_F} dx x^2 \sqrt{1+x^2} \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{3}x_F^3(1 + \frac{3}{10}x_F^2 + \dots) & x_F \ll 1 \text{ (nierelatywistyczny)} \\ \frac{1}{4}x_F^4(1 + \frac{1}{x_F^2} + \dots) & x_F \gg 1 \text{ (ultrarelatywistyczny)} \end{cases} \quad (38)
 \end{aligned}$$

Masa gwiazdy wynosi  $M \simeq (m_e + 2m_p)N \simeq 2m_p N$  ( $N$  jest liczbą *elektronów* w gwiazdzie), a jej promień  $R = (3V/4\pi)^{1/3}$ .  $X_F$  można teraz wyrazić przez masę gwiazdy i jej promień:

$$x_F = \frac{\hbar}{m_e c} \cdot \frac{1}{R} \left( \frac{9\pi}{8} \cdot \frac{M}{m_p} \right)^{1/3} = \frac{\bar{M}^{1/3}}{\bar{R}} \quad (39)$$

gdzie  $\bar{M} = (9\pi/8) \cdot (M/m_p)$ ,  $\bar{R} = R/(\hbar/m_e c)$  są masą zredukowaną i promieniem zredukowanym gwiazdy.

Ciśnienie wyznaczamy z warunku  $p_0 = -\partial E_0/\partial V$ , co w przypadku ultra-relatywistycznym daje

$$p_0 = K \left( \frac{\bar{M}^{4/3}}{\bar{R}^4} - \frac{\bar{M}^{2/3}}{\bar{R}^2} \right), \quad K = \frac{m_e c^2}{12\pi^2} \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^3. \quad (40)$$

Komentarz: Wyrażenie (40) jest wzorem na ciśnienie Fermiego w przypadku ultra-**relatywistycznym**. Wyrażenie na energię cząstki swobodnej (35) jest inne, niż w omawianym poprzednio przypadku nierelatywistycznym.

## Granica Chandrasekhara

Aby gwiazda mogła pozostawać w równowadze, praca potrzebna do sprężenia gazu od stanu nieskończonego rozrzedzenia do kuli o zadanym promieniu i ciśnieniu  $p_0$  musi być równa energii grawitacyjnej gwiazdy:

$$\int_{\infty}^R dr p_0 4\pi r^2 = -\frac{GM^2}{R}. \quad (41)$$

Różniczkując to wyrażenie po  $R$  otrzymamy następujący warunek równowagi:

$$p_0 = \frac{1}{4\pi} G \left( \frac{8m_p}{9\pi} \right)^2 \left( \frac{m_e c}{\hbar} \right)^4 \frac{\bar{M}^2}{\bar{R}^4} \quad (42)$$

Aby gwiazda była w równowadze, ciśnienie “grawitacyjne” (42) musi być co do wartości równe ciśnieniu gazu Fermiego (40). W przypadku ultrare-

łatywistycznym otrzymujemy stąd następujący warunek na promień zredukowany.

$$\bar{R} = \bar{M}^{2/3} \sqrt{1 - \left(\frac{\bar{M}}{\bar{M}_0}\right)^{2/3}} \quad (43)$$

Z równania (43) widać, że istnieje maksymalna masa  $\bar{M} = \bar{M}_0$ , powyżej której biały karzeł traci stabilność. Masa graniczna nosi nazwę *granicy Chandrasekhara*.  $M_0 \simeq 1.4 M_\odot$ .



Subrahmanyan Chandrasekhar, 1910-94  
Nagroda Nobla 1983