

# Fizyka statystyczna

## Ruchy Browna

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2020

## Odkrycie ruchów Browna



Robert Brown  
(1773–1858)  
botanik szkocki

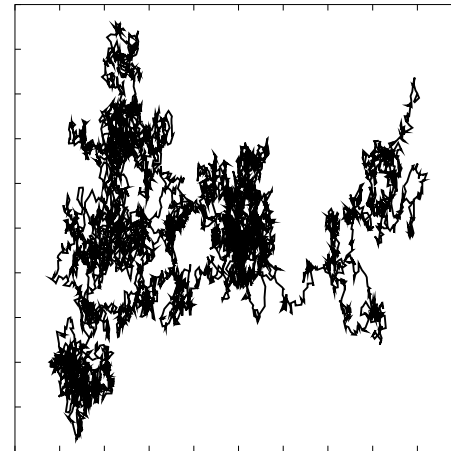
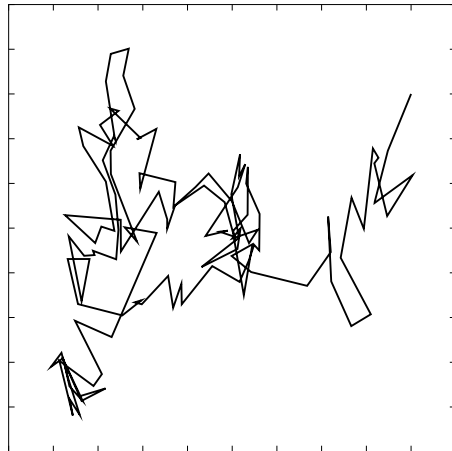
*While examining the form of these particles immersed in water, I observed many of them very evidently in motion. . . These motions were such as to satisfy me, after frequently repeated observations, that they arose neither from currents in the fluid, nor from its gradual evaporation [konwekcja], but belonged to the particle itself.*

Brown odkrył te ruchy w 1827, ale nie był pierwszy — już przed nim obserwowano mikroskopowe ruchy cząsteczek organicznych, ale przypisywano je jakiejś *sile życiowej*.

Brown obserwował ruchy żywych pyłków, obumarłych pyłków i zawiesiny nieorganicznej.

## Dziwny charakter ruchów Browna

- Ruch bardzo nieregularny
- Trajektoria w różnych skalach czasowych wygląda podobnie



- Trajektoria nie zależy od historii
- Próby opisu w języku prędkości zawiodły.

## Dwie prace, które wszystko wyjaśniły



Albert Einstein  
(1879–1955)

A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*, Ann. Phys. 17, 549–560 (1905).



Marian Smoluchowski  
(1872–1917)

M. von Smoluchowski, *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen*, Ann. Phys. 21, 756–780 (1906).

## Mechanizm mikroskopowy

- Ruch wywołany jest zderzeniami z cząsteczkami rozpuszczalnika — ruchy Browna są obserwowalną manifestacją ruchów cieplnych
- Dlaczego efekty zderzeń “z lewej” i “z prawej” nie znoszą się? Znoszą się *statystycznie*, ale w każdej chwili występują *fluktuacje*, statystyczne odchylenia od średniej.
- Pomiędzy każdymi kolejnymi zarejestrowanymi położeniami nastąpiło *bardzo wiele* zderzeń elementarnych
- Proces zderzeń można (w dobrym przybliżeniu) opisywać jako ciągły w czasie
- Trajektorie są nieróżniczkowalne w żadnym punkcie
  - Ruchu nie da się scharakteryzować poprzez prędkość!
  - Druga zasada dynamiki  $\left(\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{x}, t)\right)$  nie obowiązuje!
- Heurystyczne wyprowadzenie równania dyfuzji
- $\langle x \rangle = 0, \langle x^2 \rangle = 2Dt$

## Cząstka w kąpeli cieplnej

Rozpatrujemy\* cząstkę o hamiltonianie  $H_0 = p^2/(2m) + \phi(q)$ , oddziałującą harmonicznje z wielką liczbą oscylatorów harmonicznycn, stanowiącycn rodzaj kąpeli cieplnej; same oscylatory ze sobą nie oddziałują. Hamiltonian całego układu ma postać

$$H = \frac{p^2}{2m} + \phi(q) + \sum_{\alpha} \left[ \frac{p_{\alpha}^2}{2m_{\alpha}} + m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2 \left( x + \frac{g_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} q \right)^2 \right], \quad (1)$$

gdzie  $g_{\alpha}$  jest stałą sprzężenia z oscylatorem o indeksie  $\alpha$  (pozostałe oznaczenia są oczywiste). Z (1) otrzymujemy równania ruchu

\*Patrz tutaj

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \quad (2a)$$

$$\dot{p} = -\frac{d\phi}{dq} - \sum_{\alpha} g_{\alpha} x_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2} q \quad (2b)$$

$$\dot{q}_{\alpha} = \frac{p_{\alpha}}{m_{\alpha}} \quad (2c)$$

$$\dot{p}_{\alpha} = -m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 - g_{\alpha} q \quad (2d)$$

lub w postaci alternatywnej

$$m\ddot{q} = -\frac{d\phi}{dq} - \sum_{\alpha} g_{\alpha} x_{\alpha} - \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2} q, \quad (3a)$$

$$m_{\alpha} \ddot{x}_{\alpha} = -m_{\alpha} \omega_{\alpha}^2 - g_{\alpha} q. \quad (3b)$$

Równania na  $x_{\alpha}$  są “proste”. Są to liniowe równania niejednorodne. Rozwiążemy je, a rozwiązania wstawimy do pierwszego z równań (3). W celu skorzystamy z transformaty

Laplace'a:

$$\tilde{q}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} q(t) dt \quad (4a)$$

$$\tilde{x}_\alpha(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} x_\alpha(t) dt \quad (4b)$$

gdzie  $s \in \mathbb{C}$ . Z własności transformaty Laplace'a

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \ddot{x}_\alpha(t) dt = s^2 \tilde{x}_\alpha - s x_\alpha(0) - \dot{x}_\alpha(0). \quad (5)$$

Zatem

$$\tilde{x}(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_\alpha^2} x_\alpha(0) + \frac{1}{s^2 + \omega_\alpha^2} \dot{x}_\alpha(0) - \frac{g_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{s^2 + \omega_\alpha^2} \tilde{q}(s). \quad (6)$$

Aby teraz znaleźć  $x_\alpha(t)$ , należy znaleźć transformatę odwrotną prawej strony równania (6). Pierwszy człon daje  $\cos \omega_\alpha t$ , drugi  $(1/\omega_\alpha) \sin \omega_\alpha t$ . Trzeci człon zawiera iloczyn



transformaty sinusa i transformaty  $q(t)$ , a zatem jest *splotem* tych dwu funkcji. Ostatecznie

$$x_\alpha(t) = x_\alpha(0) \cos \omega_\alpha t + \frac{\dot{x}_\alpha(0)}{\omega_\alpha} \sin \omega_\alpha t - \frac{g_\alpha}{m_\alpha \omega_\alpha} \int_0^t q(\tau) \sin \omega_\alpha(t - \tau) d\tau. \quad (7)$$

Okazuje się, że ostatni człon wygodnie jest przedstawić w innej postaci całkując przez części:

$$\begin{aligned} -\frac{g_\alpha}{m_\alpha \omega_\alpha} \int_0^t q(\tau) \sin \omega_\alpha(t - \tau) d\tau &= \frac{g_\alpha}{m_\alpha \omega_\alpha^2} \int_0^t \dot{q}(\tau) \cos \omega_\alpha(t - \tau) d\tau. \\ &- \frac{g_\alpha}{m_\alpha \omega_\alpha^2} [q(t) - q(0) \cos \omega_\alpha t] \end{aligned} \quad (8)$$

Zauważmy też, że  $\dot{x}_\alpha(0) = p_\alpha(0)/m_\alpha$ .

Zbierając wszystkie człony i podstawiając wyrażenie na  $x_\alpha(t)$  do pierwszego z równań (3) otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 m\ddot{q} = & -\frac{d\phi}{dq} - \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[ \left( x_{\alpha}(0) + \frac{g_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} q(0) \right) \cos \omega_{\alpha} t + \frac{p_{\alpha}(0)}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \sin \omega_{\alpha} t \right] \\
 & - \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} \int_0^t \dot{q}(\tau) \cos \omega_{\alpha}(t - \tau) d\tau.
 \end{aligned} \tag{9}$$

Zauważmy, że dzięki trickowi z całkowaniem przez części (8), pozbyliśmy się członu liniowego w  $q$ . Zmieńmy teraz kolejność całkowania i sumowania.

Definiujemy **jądro pamięci**:

$$\Gamma(t) = \sum_{\alpha} \frac{g_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} \cos \omega_{\alpha} t \tag{10}$$

oraz **siłę stochastyczną**<sup>†</sup>:

$$\xi(t) = - \sum_{\alpha} g_{\alpha} \left[ \left( x_{\alpha}(0) + \frac{g_{\alpha}}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}^2} q(0) \right) \cos \omega_{\alpha} t + \frac{p_{\alpha}(0)}{m_{\alpha}\omega_{\alpha}} \sin \omega_{\alpha} t \right] \tag{11}$$

<sup>†</sup>Na tym etapie “siła stochastyczna” jest w pełni deterministyczna ☺

W tej notacji równanie (9) przybiera postać

$$m\ddot{q} = -\frac{d\phi}{dq} - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \dot{q}(\tau) d\tau + \xi(t). \quad (12)$$

Równanie (12) nosi nazwę **uogólnionego równania Langevina (Generalized Langevin Equation, GLE)**.

Równanie (12) jest równaniem różniczkowo-całkowym. Opisuje ruch w potencjale  $\phi(q)$ , z nielokalnym (w czasie) członem tłumiącym oraz pod wpływem *zewnętrznej*, zależnej od czasu siły  $\xi(t)$ .

Nasze dotychczasowe rozważania są **ściśle**, dokładne: nie dokonywaliśmy żadnych przybliżeń, nie przyjmowaliśmy żadnych założeń upraszczających. *Teoretycznie*, znając wszystkie masy i częstości oscylatorów kąpieli, stałe sprzężenia i warunki początkowe, moglibyśmy próbować rozwiązywać — choćby numerycznie — równanie (12) tak, jak zostało ono sformułowane. Byłoby to jednak skrajnie niepraktyczne.

## Siła stochastyczna

Zamiast rozpatrywać jakieś *konkretne*, niemożliwe do ustalenia warunki początkowe oscylatorów kąpieli cieplnej, będziemy uśredniać po zbiorze takich warunków. Niech symbol  $\langle \dots \rangle$  oznacza taką średnią. Z samej postaci  $\xi(t)$  (11) widać, że

$$\langle \dot{q}(0)\xi(t) \rangle = 0, \quad (13)$$

a dla licznych potencjałów — w szczególności dla takich, które nie zależą od nieparzystych potęg  $q$  — zachodzi także

$$\langle q(0)\xi(t) \rangle = 0. \quad (14)$$

W ten sposób “siła stochastyczna” (11) *statystycznie* nie zależy od warunków początkowych dla cząstki. Ponieważ nie chcemy, nie potrafimy śledzić wszystkich mikroskopowych stanów kąpieli cieplnej, deterministyczną, jak dotąd, **siłę stochastyczną zastępujemy procesem stochastycznym o zadanych własnościach**. Ponieważ z analizy rozkładu kanonicznego wiemy, że odchylenia od średniej dla układu pozostającego w stanie równowagi<sup>‡</sup> mają charakter gaussowski, przyjmujemy, że  $\xi(t)$  są **gaussowskimi zmiennymi losowymi**. Trzeba jeszcze określić funkcję korelacji takiego procesu.

<sup>‡</sup>Wyobraźmy sobie, że rozważana kąpiel cieplna sama jest w kontakcie z jakimś większym termostatem, który ustala jej temperaturę.

## Jądro pamięci

Obecność w GLE, równanie (12), nielokalnego w czasie jądra pamięci odzwierciedla fakt, że kąpiel cieplna potrzebuje skończonego czasu na dostosowanie się do fluktuacji zmiennej dynamicznej  $q$ : Efektywna siła, z jaką kąpiel działa na układ, odzwierciedla *przeszłe* zachowania układu. Spodziewamy się jednak, że zachowania w **bardzo** odległej przeszłości nie będą wpływać na jego teraźniejsze zachowanie. Innymi słowy, “fizyczne” jądra pamięci powinny zanikać dla bardzo dużych czasów.

Średniując po warunkach początkowych, można pokazać, że

$$\langle \xi(0)\xi(t) \rangle = \sigma^2 \Gamma(t) \quad (15)$$

gdzie  $\sigma^2$  jest pewną stałą, którą spróbujemy określić za chwilę. Istotą równania (15) jest stwierdzenie, że siła stochastyczna i jądro pamięci nie są dowolne, w tym sensie, że są ze sobą powiązane. **Funkcja korelacji siły stochastycznej jest**, z dokładnością do stałej multiplikatywnej, **równa jądro pamięci**. Postulujemy, że ta zależność musi być zachowana, gdy siłę stochastyczną zastąpimy gaussowskim procesem stochastycznym.

## Powolna relaksacja

Przypuśćmy, że kąpiel cieplna bardzo wolno reaguje na fluktuacje w położeniu cząstki,  $q$ . Tak się może zdarzyć, gdy cząsteczki kąpeli są bardzo masywne w porównaniu z obserwowaną cząstką,  $m \ll m_\alpha$ . Wówczas, dla krótkich czasów,  $\Gamma(t) \simeq \Gamma_0 = \text{const}$  i GLE przybiera postać

$$\begin{aligned} m\ddot{q} &\simeq -\frac{d\phi}{dq} - \int_0^t \Gamma_0 \dot{q}(\tau) d\tau + \xi(t) = -\frac{d\phi}{dq} - \Gamma_0(q(t) - q(0)) + \xi(t) \\ &= -\frac{d}{dq} \left( \phi + \frac{1}{2} \Gamma_0 (q - q(0))^2 \right) + \xi(t). \end{aligned} \quad (16)$$

W tym przypadku obecność pamięci (i tarcia) przejawia się jak obecność dodatkowego potencjału harmonicznego, mogącego uwięzić cząstki w pobliżu ich położenia początkowych.

Znacznie ważniejsza jest przeciwna granica.

## Szybka relaksacja

Jeśli kąpiel cieplna jest w stanie **bardzo** szybko, w granicy nieskończenie szybko, odpowiadać na fluktuacje zmiennej  $q$ , układ “nie pamięta” swoich przeszłych stanów. Dzieje się tak na przykład, gdy  $m \gg m_\alpha$ , jak to ma miejsce w przypadku cząstek brownowskich. Wówczas

$$\Gamma(t) = 2\gamma\delta(t), \quad (17)$$

a GLE przybiera postać

$$m\ddot{q} = -\frac{d\phi}{dq} - 2\gamma \int_0^t \dot{q}(\tau)\delta(\tau) d\tau + \xi(t) = -\frac{d\phi}{dq} - \gamma\dot{q} + \xi(t). \quad (18)$$

Odzyskaliśmy zwykłe, Stokesowskie tłumienie (siła tłumiąca jest proporcjonalna do prędkości). Oczywiście z uwagi na zależność (15), jeśli w układzie nie ma pamięci (czyli jeśli mamy do czynienia ze zwykłym, zlokalizowanym w czasie tłumieniem), także siła stochastyczna musi być  $\delta$ -skorelowana, a zatem musi być białym szumem:

$$\langle \xi(0)\xi(t) \rangle = \sigma^2\delta(t). \quad (19)$$

## Przypadek przetłumiony

Bardzo często relaksacja jest ultra-szybka z uwagi na dużą wartość współczynnika tłumienia,  $\gamma$ . Taki przypadek jest uznawany za typowy, normalny. W takim wypadku zachodzi

$$|m\ddot{q}| \ll |\gamma\dot{q}| \quad (20)$$

Taki przypadek nazywamy *przetłumionym*. Wobec (20) człon inercyjny możemy zaniedbać i *uogólnione* równanie Langevina (18) przechodzi w

$$\dot{q} = -\frac{1}{\gamma} \frac{d\phi}{dq} + \frac{1}{\gamma} \xi(t). \quad (21)$$

(21) nosi nazwę równanie Langevina.



## Równanie Fokkera-Plancka

Równaniu Langevina (21) odpowiada równanie Fokkera-Plancka

$$\frac{\partial P(q, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{\gamma} \frac{d\phi}{dq} P \right) + \frac{\sigma^2}{\gamma^2} \frac{\partial^2 P}{\partial q^2}. \quad (22)$$

$\sigma^2$  jest tą samą stałą, która występuje w (19) i określa intensywność szumu. Rozwiązanie stacjonarne tego równania, jeśli istnieje<sup>§</sup>, czyli jeśli jest normalizowalne, ma postać

$$P(q) = \mathcal{N} \exp \left( -\frac{\gamma}{\sigma^2} \phi(q) \right). \quad (23)$$

Oczekujemy, że jeśli układ jest w równowadze z kąpielą cieplną o temperaturze  $T$ , rozkład ten będzie mieć charakter Boltzmannowski,  $P \sim \exp(-\phi/k_B T)$ . W takim wypadku musi zachodzić

<sup>§</sup>To znaczy, jeśli potencjał jest dostatecznie wiążący; już potencjał harmoniczny ma tę własność.

$$\sigma^2 = \frac{k_B T}{\gamma}. \quad (24)$$

Związek (24) nosi nazwę relacji Einsteina-Smoluchowskiego. Wiąże on temperaturę, natężenie fluktuacji i współczynnik tłumienia. Jego fizyczną treścią jest, że *nie ma dyssypacji bez szumu i nie ma szumu bez dyssypacji*.

## Twierdzenie fluktuacyjno-dyssypacyjne

Spróbujmy uogólnić relację Einsteina-Smoluchowskiego. Tak zależność (15), jak i jej szczególna postać (19), wzięte dla  $t=0$ , określają intensywność szumu. Nie zależy ona od pamięci szumu, czyli od czasowej zależności funkcji korelacji. To, co uzyskaliśmy dla szumu białego, możemy uogólnić na szum z dowolną pamięcią. W miejsce zależności (15) otrzymamy wówczas

$$\langle \xi(0)\xi(t) \rangle = k_B T \left( \frac{1}{\gamma} \Gamma(t) \right). \quad (25)$$

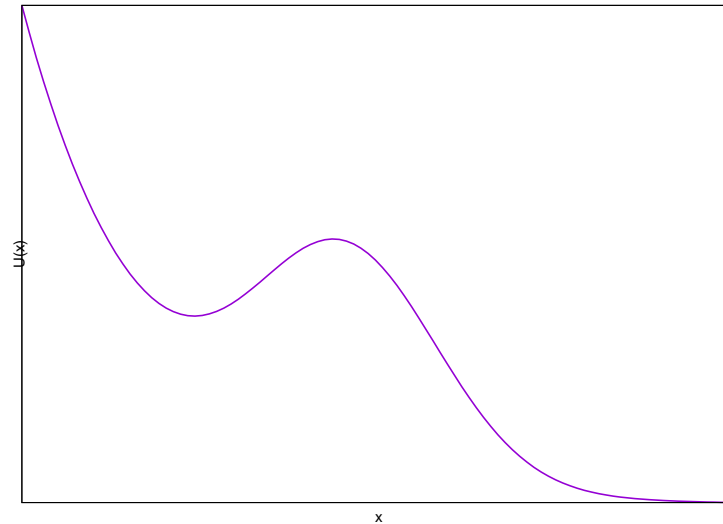
Czynnik  $1/\gamma$  możemy włączyć do jądra pamięci. Wyrażenie (25) nosi nazwę **twierdzenia fluktuacyjno-dyssypacyjnego**, a przedstawione wyżej rozważania służyły do jego heurystycznego (bo, mimo wszystko, nie ścisłego) uzasadnienia.

## Uwagi

1. Powyższe rozważania są słuszne dla kąpieli cieplnej złożonej z nieoddziałujących oscylatorów harmoniczných, sprzężonych harmonicznich do obserwowanej cząstki. Ważne, że uzyskane wyniki — uogólnione równanie Langevina, równanie Langevina, twierdzenie fluktuacyjno-dyssypacyjne - nie zależą od charakteru potencjału  $\phi(q)$ , opisującego cząstkę odsprzęgniętą od kąpieli: formalny kształt tych wyrażeń jest taki sam dla (prawie) dowolnego, fizycznie sensownego potencjału. Na ogół przemilcza się założenie o charakterze kąpieli i przyjmuje się, że na cząstkę działa gaussowski szum o korelacjach czasowych odpowiadających jądro pamięci. Można *próbować* rozważać inne postacie kąpieli cieplnej, ale jest to bardzo trudne i analitycznie niewykonalne (trzeba robić pewne dodatkowe przybliżenia). W takich przypadkach twierdzenie fluktuacyjno-dyssypacyjne może mieć inną postać, chociaż oczekujemy, że w granicy powinno dążyć do postaci (25).
2. Podejście to można uogólnić na przypadek wielowymiarowy, gdzie zamiast jednej zmiennej  $q$  mamy wektor  $\mathbf{q}$ , a zamiast siły deterministycznej  $-d\phi/dq$  mamy  $-\nabla\Phi(\mathbf{q})$ . W takim wypadku szum (siła stochastyczna) także musi mieć charakter wektorowy, jądro pamięci jest pewną macierzą, a twierdzenie fluktuacyjno-dyssypacyjne dotyczy macierzy kowariancji szumu.

## Problem Kramersa

Rozważmy ruch termiczny cząstek w potencjale  $U(x)$  o kształcie jak na rysunku poniżej:



Zakładamy, że głębokość metastabilnej studni potencjału jest większa od energii termicznej

$$|U_0| \gg k_B T. \quad (26)$$

Początkowo cząstki uwięzione są w studni. Pytamy, czy (i kiedy) szum termiczny wyrzuci je z tej studni, tak, że będą mogły przejść do jakiegoś innego stanu (niezaznaczonego na

wykresie). Jest to problem **reakcji aktywowanych termicznie**. Rozważamy zatem problem *średniego czasu pierwszego przejścia* (*Mean First Passage Time, MFPT*) przez barierę o wysokości  $U_0$ .

Problem ten rozwiązał Henrik Kramers w 1940.

Założmy, że zależna od pędu, położenia i czasu gęstość prawdopodobieństwa ma postać

$$P(p, x, t) = P(p, x) \exp(-t/\tau) \quad (27)$$

gdzie  $\tau$  jest charakterystycznym czasem życia w studni. Problem polega na tym, że gęstość prawdopodobieństwa  $P(p, x)$  jest nienormalizowalna (cząsteczki mogą uciec do  $+\infty$  — dla dużych  $x$  układ zachowuje się tak, jakby podlegał dyfuzji swobodnej). Gęstość prawdopodobieństwa może mieć postać (27) tylko wewnątrz studni i w bezpośrednim sąsiedztwie bariery potencjału, więc uzyskane rozwiązanie będzie mieć charakter przybliżony.

W pobliżu minimum (przyjmijmy, że jest zlokalizowane w  $x=0$ ), potencjał ma w przybliżeniu postać harmoniczną

$$U(x) \simeq -U_0 + \frac{1}{2}m\Omega^2 x^2 \quad (28)$$

a z kolei w pobliżu maksimum leżącego w  $x_{\max}$  ma postać

$$U(x) \simeq -\frac{1}{2}m\omega^2(x - x_{\max})^2. \quad (29)$$

Zależna od czasu liczba cząstek uwięzionych w studni dana jest przez

$$N(t) = \int_{-\infty}^0 dp \int_{-\infty}^{\infty} dx P(p, x, t) \sim \exp(-t/\tau), \quad (30)$$

natomiast strumień przez barierę to

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p}{m} P(p, x, t) dp. \quad (31)$$

Liczba cząstek musi być zachowana

$$\frac{dN}{dt} = -J \Rightarrow \frac{J}{N} = \frac{1}{\tau}. \quad (32)$$

Jeśli współczynnik tarcia,  $\gamma$ , jest duży oraz spełniony jest warunek (26), interesujące są tylko okolice maksimum bariery. Kramers pokazał, że stacjonarne równanie Fokkera-Plancka przybiera wówczas postać przybliżoną

$$\frac{p}{m} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial p} \left[ -m\omega^2 x P + \gamma \left( p P + k_B T \frac{\partial P}{\partial p} \right) \right] = 0. \quad (33)$$

Ostatecznie, korzystając z podanych wyżej warunków na strumień, można pokazać, że

$$\frac{1}{\tau} \simeq \frac{\Omega}{2\pi} \left[ \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4\omega^2}} - \frac{\gamma}{2\omega} \right] \exp \left( -\frac{U_0}{k_B T} \right). \quad (34)$$

Czynnik wykładniczy we wzorze (34) nazywa się niekiedy *czynnikiem Arrheniusa*, na cześć szwedzkiego chemika Svante Arrheniusa (Nagroda Nobla z chemii, 1903), który pierwszy jakościowo opracował teorię reakcji aktywowanych termicznie. Zaslugą Kramersa było wyliczenie współczynnika oraz wyjaśnienie mikroskopowego charakteru mechanizmu takich reakcji.



## Rezonans stochastyczny

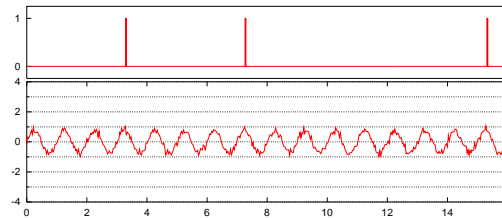
Szum termiczny zazwyczaj kojarzy się z zakłóceniami. Jako manifestacja ruchów cieplnych, oznacza przekaz energii w sposób “nieuporządkowany”. Niekiedy jednak szum może działać konstruktywnie: w problemie Kramersa, szum, destabilizując lokalne, metastabilne minimum potencjału, pozwala układowi wyrwać się z pułapki. Możliwe są także przypadki, w których szum **wzmacnia** pewien sygnał zewnętrzny. Dzieje się to w mechanizmie **rezonansu stochastycznego**.

Pierwsza propozycja: wyjaśnienie periodyczności epok lodowcowych na Ziemi — nutacja osi Ziemi sprzężona z zaburzeniami stochastycznymi: R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani, *Stochastic resonance in climatic change*, *Tellus* **34**, 10 (1982).

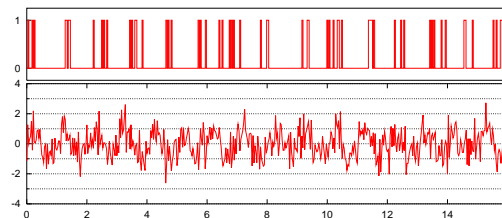
## Niedynamiczny rezonans stochastyczny — detekcja sygnału podprogowego

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi) + \sigma \xi(t), |A| < 1 \quad (35a)$$

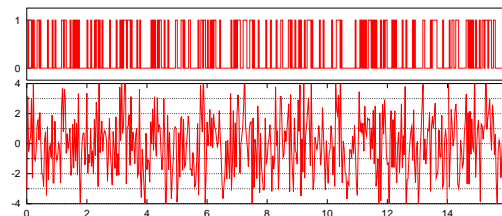
$$y(t) = \begin{cases} 1 & x(t) \geq 1 \\ 0 & x(t) < 1 \end{cases} \quad (35b)$$



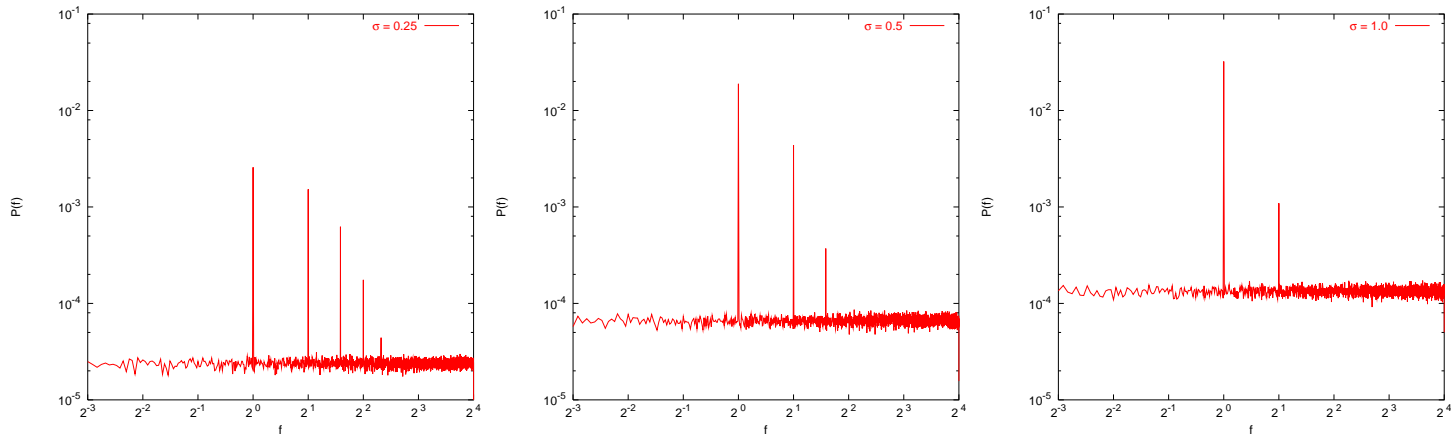
zbyt słaby szum



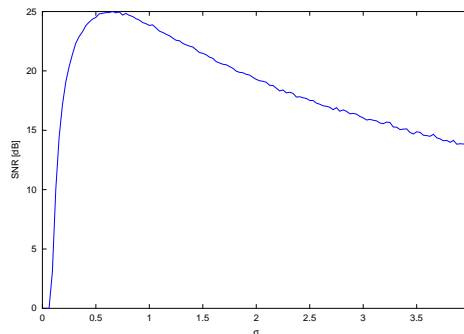
pośredni szum



zbyt mocny szum



Widma mocy dla różnych poziomów szumu



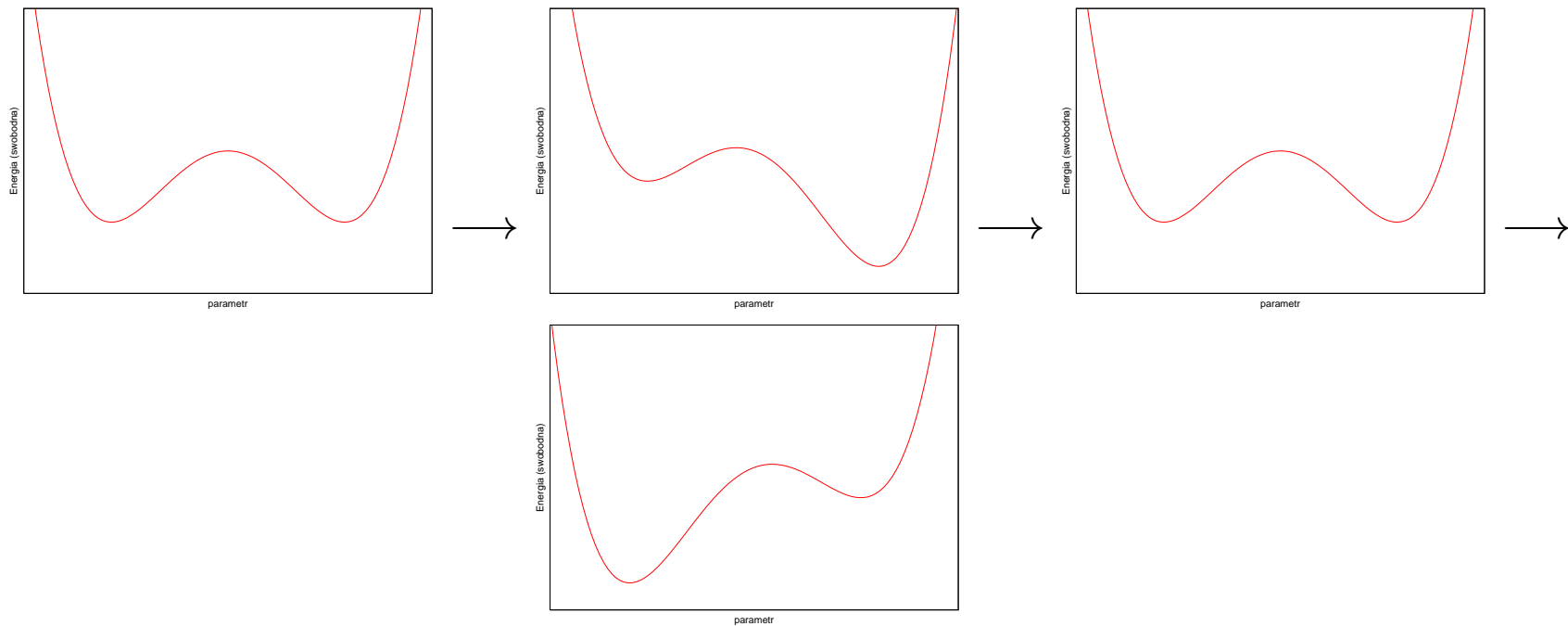
Signal to Noise Ratio

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{P(f_0)}{P_{\text{back}}(f = f_0)} \quad (36)$$

## Dynamiczny rezonans stochastyczny

$$\dot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + A \sin(2\pi f_0 t + \phi) + \sigma \xi(t) \quad (37)$$

$U(x)$  jest potencjałem o dwóch minimach:



**Opis teoretyczny** dynamicznego rezonansu stochastycznego w studni potencjału o dwóch minimach podano w pracy Bruce McNamara, Kurt Wiesenfeld, *Theory of stochastic resonance*, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989). Układ ciągły zamieniono tam na układ dwustanowy: Jeśli przez  $x'$  oznaczymy położenie bariery pomiędzy dwoma minimami, a gęstość prawdopodobieństwa oznaczymy przez  $p(x, t)$ , można zdefiniować obsadzenia lewego i prawego stanu  $n_{\pm}$ :

$$n_{-}(t) = 1 - n_{+}(t) = \int_{-\infty}^{x'} p(x, t) dx \quad (38)$$

a następnie badać równanie master

$$\frac{dn_{+}}{dt} = -\frac{dn_{-}}{dt} = W_{-}(t)n_{-} - W_{+}(t)n_{+} = W_{-}(t) - [W_{-}(t) + W_{+}(t)]n_{+}, \quad (39)$$

gdzie  $W_{\pm}$  są prawdopodobieństwami wyjścia z odpowiedniego stanu (prawdopodobieństwami przejścia przez barierę). Rozkład prawdopodobieństwa przybliżamy przez

$$p(x, t) = n_{-}(t)\delta(x - x_{-}) + n_{+}(t)\delta(x - x_{+}) \quad (40)$$

gdzie z kolei  $x_{\pm}$  są jakimiś położeniami wewnątrz odpowiednich studni (można je dobrać “eksperymentalnie”). Kontynuując te rozważania, autorzy uzyskali analityczne wyrażenie na widmo mocy i SNR, w pełni zgodne z symulacjami przedstawionymi powyżej.

## Rezonans stochastyczny dzisiaj

- Reakcje biochemiczne (np. ATP-aza)
- Modele klimatu (epoki lodowcowe, El Niño, . . .)
- Detektory — naturalne i sztuczne
- Zastosowania biomedyczne (korektory postawy, otoskleroza, . . .)
- Modele populacyjne i społeczne
- itd