

Fizyka statystyczna
Model Isinga
i zagadnienia pokrewne

P. F. Góra

<http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/>

2020

Model Isinga

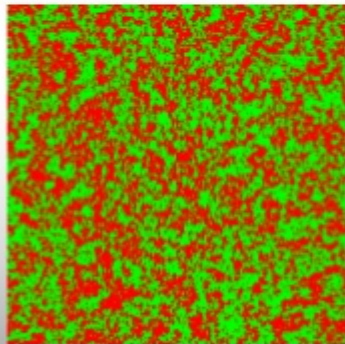
Model Isinga jest jednym z najważniejszych i najczęściej rozważanych modeli w fizyce statystycznej. Jego znaczenie wynika stąd, że (i) dwuwymiarowy model Isinga można rozwiązać ściśle oraz (ii) rozwiązanie to przewiduje istnienie przejścia fazowego. Jest to jeden z bardzo niewielu ściśle rozwiązywalnych modeli o tej właściwości.

Formalnie **model Isinga jest modelem ferromagnetyka** na jakiejś sieci. Z doświadczenia (i z *fenomenologicznego* równania stanu) wiadomo, że ferromagnetyk poniżej temperatury Curie wykazuje spontaniczną (czyli pod nieobecność zewnętrznego pola) magnetyzację; magnetyzacja ta znika powyżej temperatury Curie. Substancja staje się wówczas paramagnetykiem.

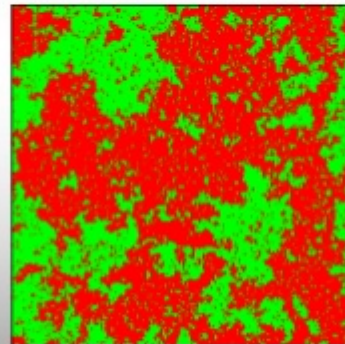
Ising Model (Ferromagnetism)

Lattice of spins

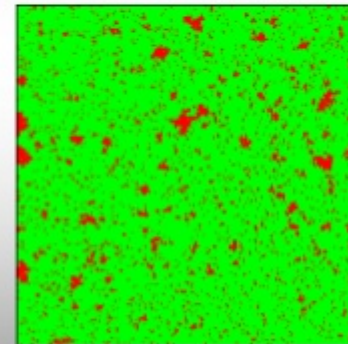
$$s_i = \pm 1$$



$T \gg T_c$



$T \sim T_c$



$T \ll T_c$

Dwuwymiarowa sieć ferromagnetyczna

Hamiltonian Isinga

Dana jest pewna sieć d -wymiarowa. W każdym węźle sieci rezyduje klasyczny moment magnetyczny (“spin”) s_j , gdzie j jest numerem węzła. Spin może przybierać tylko wartości ± 1 . Zbiór wszystkich wartości $\{s_j\}$ jednoznacznie wyznacza (mikro)stan układu. Przyjmujemy, że każdy spin oddziałuje tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami. Hamiltonian układu wynosi wobec tego

$$E\{s_i\} = - \sum_{\langle ij \rangle} \varepsilon_{ij} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i. \quad (1)$$

Pierwsza suma rozciąga się po wszystkich *sąsiednich, rozróżnialnych parach* spinów. Ile jest tych par zależy od wymiarowości i topologii sieci. Druga suma rozciąga się po wszystkich spinach na sieci; N jest liczbą spinów na sieci, B jest zewnętrznym polem magnetycznym. Stałe ε_{ij} określają sprzężenie pomiędzy i -tym a j -tym węzłem.

Rozważmy najprostszy przypadek, w którym wszystkie stałe sprzężenia są równe $\forall i, j: \varepsilon_{ij} = \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 0$ odpowiadałoby antyferromagnetyzmowi, którego w tej chwili nie rozważamy). Zachowanie układu determinowane jest przez dwie przeciwstawne tendencje: (1) dążenie do minimalizacji energii wewnętrznej, czyli do *uporządkowania* spinów oraz (2) dążenie do maksymalizacji *nieuporządkowania*. Nieuporządkowanie jest skutkiem oddziaływań termicznych, na przykład termicznych drgań sieci. Ostatecznie wynika z tego dążenie do minimalizacji energii swobodnej Helmholtza $F = U - TS$, natomiast szczegóły, jak to się manifestuje, wynikają ze struktury sieci, a przede wszystkim z jej wymiarowości.

Termodynamika

Przy powyższym założeniu hamiltonian redukuje się do

$$E\{s_i\} = -\varepsilon \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - B \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2)$$

Jako sumę statystyczną otrzymujemy

$$Z(B, T) = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N} e^{-\beta E\{s_i\}}, \quad (3)$$

skąd możemy odtworzyć termodynamikę za pomocą zwykłych wzorów:

$$F(B, T) = -k_B T \ln Z(B, T) \quad (4a)$$

$$U(B, T) = -k_B T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{F}{k_B T} \right) \quad (4b)$$

$$C(B, T) = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (4c)$$

$$M(B, T) = -\frac{\partial}{\partial B} \left(\frac{F}{k_B T} \right) = \left\langle \sum_{i=1}^N s_i \right\rangle \quad (4d)$$

Ostatnie wyrażenie określa magnetyzację. $M(0, T)$ jest magnetyzacją spontaniczną.

Gaz sieciowy

Rozważmy pewną sieć. Niektóre z węzłów są puste, niektóre obsadzone atomami; niech stała sieci wynosi a . Atomy oddziałują pomiędzy sobą za pomocą potencjału dwuciałowego (r oznacza odległość pomiędzy atomami):

$$v(r) = \begin{cases} \infty & r = 0 \\ -\varepsilon_0 & r = a \\ 0 & \text{poza tym} \end{cases} \quad (5)$$

Innymi słowy, dwa atomy nie mogą zajmować tego samego węzła, najbliżsi obsadzeni sąsiedzi oddziałują ze sobą ze stałą energią, dalsi sąsiedzi nie oddziałują. Po utożsamieniu węzłów obsadzonych ze spinami skierowanymi do góry, a węzłów pustych ze spinami skierowanymi w dół, model

ten staje się równoważny modelowi Isinga. (Trzeba jeszcze zapewnić *poprawne zliczanie boltzmannowskie*.) Model ten nosi nazwę **gazu sieciowego**. Największa różnica bierze się stąd, że gaz sieciowy na ogół rozpatruje się w wielkim zespole kanonicznym.

Stop binarny

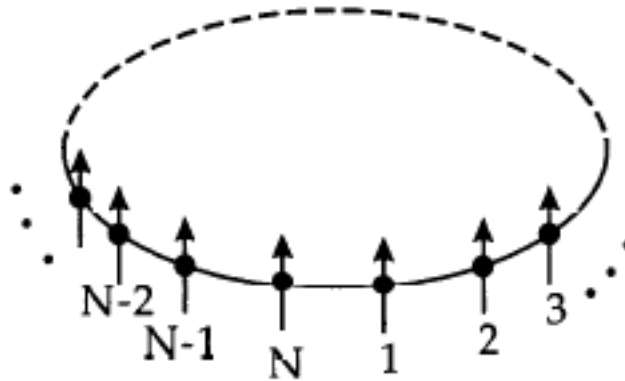
Pewną sieć mogą obsadzać atomy dwu rodzajów. Istnieją trzy typy najbliższej sąsiadujących par: (11), (22), (12). Tylko najbliżsi sąsiedzi oddziałują, przy czym energia zależy od tego, jakiego rodzaju jest to para. Atomy mogą zmieniać swoje położenie na sieci, ale energię związaną z tymi przemieszczeniami pomijamy. Ten model też jest równoważny modelowi Isinga. Obserwuje się w nim *przejście fazowe porządek-nieporządek*.

Modeli podobnych do modelu Isinga używa się w wielu różnych działach fizyki. Modeli “Isingopodobnych” używa się do opisu rozmaitych zjawisk społecznych (na przykład: ktoś zmienia swoje preferencje wyborcze w zależności od preferencji swoich sąsiadów), dlatego model Isinga ma duże znaczenie w socjo- i ekonofizyce.

Uogólnieniem modelu Isinga jest model Potts, gdzie “spiny” mogą przybierać nie dwie, ale m ($m = 3, 4, \dots$) różnych wartości.

Jednowymiarowy model Isinga

Rozpatrujemy *łańcuch* N spinów, z których każdy oddziałuje tylko z najbliższymi sąsiadami (jest ich dwóch) i z zewnętrznym polem magnetycznym. Na układ nakładamy periodyczne warunki brzegowe $s_{N+1} \equiv s_1$ — mówimy zatem o N spinach na okręgu.



Energia ma postać

$$E = -\varepsilon \sum_{k=1}^N s_k s_{k+1} - B \sum_{k=1}^N s_k = -\varepsilon \sum_{k=1}^N s_k s_{k+1} - \frac{1}{2} B \sum_{k=1}^N (s_k + s_{k+1}) \quad (6)$$

gdzie druga równość wynika z periodycznych warunków brzegowych, natomiast suma statystyczna

$$Z = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N} \exp \left[\beta \sum_{k=1}^N (\varepsilon s_k s_{k+1} + \frac{1}{2} B (s_k + s_{k+1})) \right] \quad (7)$$

Niech \mathbf{P} będzie macierzą, której elementy wynoszą

$$\langle s | \mathbf{P} | s' \rangle = e^{\beta(\varepsilon s s' + \frac{1}{2} B (s + s'))} \quad (8)$$

gdzie s, s' przybierają wartości ± 1 . Zatem

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{\beta(\varepsilon+B)} & e^{-\beta\varepsilon} \\ e^{-\beta\varepsilon} & e^{\beta(\varepsilon-B)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Sumę statystyczną (7) zapisujemy jako

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1} \sum_{s_2} \cdots \sum_{s_N} \langle s_1 | \mathbf{P} | s_2 \rangle \langle s_2 | \mathbf{P} | s_3 \rangle \cdots \langle s_N | \mathbf{P} | s_1 \rangle \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1 | \mathbf{P}^N | s_1 \rangle = \text{Tr} \mathbf{P}^N = \lambda_+^N + \lambda_-^N \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie λ_+, λ_- są wartościami własnymi macierzy (9)

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta\varepsilon} \left[\cosh(\beta B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta\varepsilon} \sinh(2\beta\varepsilon)} \right]. \quad (11)$$

Ponieważ w granicy $N \rightarrow \infty$ $(\lambda_+/\lambda_-)^N \rightarrow 0$ i drugi człon w końcowej części wyrażenia (10) staje się zaniedbywalny w porównaniu z pierwszym,

w tej granicy otrzymujemy

$$F = -N\varepsilon - Nk_B T \ln \left[\cosh(\beta B) \pm \sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta\varepsilon} \sinh(2\beta\varepsilon)} \right], \quad (12a)$$

$$M = \frac{N \sinh(\beta B)}{\sqrt{\cosh^2(\beta B) - 2e^{-2\beta\varepsilon} \sinh(2\beta\varepsilon)}} \quad (12b)$$

Jednowymiarowy model Isinga nie wykazuje spontanicznej magnetyzacji.

Dążenie do uporządkowania spinów jest zbyt słabe — jest za mało sąsiadów — i przeważa tendencja do wzrostu entropii.

Dwuwymiarowy model Isinga

Rozpatrzmy dwuwymiarowy model Isinga na sieci prostokątnej o n wierszach i kolumnach; łącznie jest zatem $N = n^2$ spinów. Nakładamy periodyczne warunki brzegowe: spiny z pierwszej i n -tej kolumny widzą siebie jak najbliższych sąsiadów, podobnie spiny z pierwszego i n -tego wiersza (jest to topologia torusa). Niech μ_α oznacza konfigurację spinów w wierszu o numerze α :

$$\mu_\alpha = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}. \quad (13)$$

Zauważmy, że każde μ_α może — jako obiekt n -wymiarowy — przybrać 2^n wartości (każdy spin ma dwa możliwe położenia, spinów zaś jest n), natomiast periodyczne warunki brzegowe oznaczają, że $\mu_{n+1} \equiv \mu_1$. Z założenia wiersz α oddziałuje tylko z wierszami $\alpha-1$ i $\alpha+1$. Niech $E(\mu, \mu')$

oznacza energię oddziaływania wierszy μ i μ' :

$$E(\mu, \mu') = -\varepsilon \sum_{k=1}^n s_k s'_k. \quad (14)$$

Z kolei niech $E(\mu)$ oznacza energię oddziaływań wewnątrz wiersza μ , plus oddziaływanie spinów z tego wiersza z zewnętrznym polem magnetycznym:

$$E(\mu) = -\varepsilon \sum_{k=1}^n s_k s_{k+1} - B \sum_{k=1}^n s_k, \quad (15)$$

przy czym z okresowych warunków brzegowych $s_{n+1} \equiv s_n$.

Całkowita energia wynosi

$$E\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n\} = \sum_{\alpha=1}^n \left(E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha) \right), \quad (16)$$

a suma statystyczna

$$Z(B, T) = \sum_{\mu_1} \dots \sum_{\mu_n} \exp \left\{ -\beta \sum_{\alpha=1}^n \left(E(\mu_\alpha, \mu_{\alpha+1}) + E(\mu_\alpha) \right) \right\}. \quad (17)$$

Sumowanie \sum_{μ} oznacza sumowanie po wszystkich możliwych konfiguracjach danego wiersza.

Niech \mathbf{P} będzie macierzą $2^n \times 2^n$, której elementami są

$$\langle \mu | \mathbf{P} | \mu' \rangle = e^{-\beta(E(\mu, \mu') + E(\mu))} \quad (18)$$

z uwzględnieniem, że wielkości primowane odnoszą się do wiersza następnego po swoim nieprimowanym sąsiedzie, i z uwzględnieniem okresowych warunków brzegowych.

Wówczas

$$\begin{aligned} Z(B, T) &= \sum_{\mu_1} \cdots \sum_{\mu_n} \langle \mu_1 | \mathbf{P} | \mu_2 \rangle \langle \mu_2 | \mathbf{P} | \mu_3 \rangle \cdots \langle \mu_n | \mathbf{P} | \mu_1 \rangle \\ &= \sum_{\mu_1} \langle \mu_1 | \mathbf{P}^n | \mu_1 \rangle = \text{Tr } \mathbf{P}^n \\ &= \sum_{\alpha=1}^{2^n} \lambda_{\alpha}^n, \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie λ_{α} oznaczają wartości własne macierzy \mathbf{P} .

Macierz \mathbf{P} ma 2^n wartości własnych, przy czym spodziewamy się, że *typowo* są one rzędu e^n , gdyż $E(\mu, \mu') + E(\mu)$ jest rzędu n . Niech λ_{\max} oznacza największą wartość własną. Mamy

$$\lambda_{\max}^n \leq Z(B, T) \leq 2^n \lambda_{\max}^n. \quad (20)$$

Po zlogarytmowaniu i podzieleniu przez $N = n^2$

$$\frac{1}{n} \ln \lambda_{\max} \leq \frac{1}{n^2} \ln Z(B, T) \leq \frac{1}{n} \ln \lambda_{\max} + \frac{1}{n} \ln 2 \quad (21)$$

a zatem w granicy termodynamicznej

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z(B, T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \lambda_{\max}. \quad (22)$$

Problem obliczenia sumy statystycznej dla modelu Isinga *zredukowaliśmy* do problemu znalezienia największej wartości własnej macierzy \mathbf{P} 😊.

Ścisłe rozwiązanie dwuwymiarowego modelu Isinga — czyli znalezienie największej wartości własnej macierzy \mathbf{P} — zostało podane przez Larsa Onsagera w 1944. Do dziś stanowi ono jedno z największych osiągnięć fizyki statystycznej. Jest to rozwiązanie dość złożone; samo jego prześledzenie jest żmudne, choć nie zawiera ono bardzo skomplikowanej matematyki. Zainteresowani mogą sięgnąć do rozdziału 17. *Mechaniki statystycznej* Kersona Huanga.

Zamiast tego podamy rozwiązanie dwuwymiarowego modelu Isinga [w przybliżeniu średniego pola](#).

Makrostan Isinga

Niech dla zadanej konfiguracji sieci N_+ oznacza liczbę spinów skierowanych do góry, N_- liczbę spinów skierowanych w dół, $N_+ + N_- = N$. Każda para najbliższych sąsiadów należy do jednego z trzech typów: $(+, +)$, $(+, -)$, $(-, -)$. Niech liczba odpowiednich par będzie N_{++} , N_{+-} , N_{--} .

Niech γ będzie liczbą najbliższych sąsiadów węzła (zakładamy, że jest taka sama dla każdego węzła). Wybierzmy pewien węzeł ze spinem skierowanym do góry i połączmy go z wszystkimi najbliższymi sąsiadami. Powtórzmy to dla każdego węzła ze spinem do góry. Uzyskamy łącznie γN_+ linii. Każdą parę $(+, +)$ łączą dwie linie, parę $(+, -)$ jedna, pary $(-, -)$

nie łączą żadne linie. Zatem $\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-}$. Procedurę powtarzamy dla spinów w dół i dostajemy analogiczny związek, z wszystkimi “+” zamienionymi na “-” i *vice versa*. Mamy zatem

$$\gamma N_+ = 2N_{++} + N_{+-} \quad (23a)$$

$$\gamma N_- = 2N_{--} + N_{+-} \quad (23b)$$

$$N = N_+ + N_- \quad (23c)$$

Związki (23) pozwalają wyeliminować trzy z pięciu zmiennych N_+ , N_- , N_{++} , N_{--} , N_{+-} : energię układu określają tylko **dwie** zmienne. Pozostawmy N_+ , N_{++} . Sumę statystyczną możemy zapisać jako

$$e^{-\beta F} = \left[e^{N\beta(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon - B)} \sum_{N_+=0}^N e^{-2\beta(\gamma\varepsilon - B)N_+} \right] \cdot \left[\sum_{N_{++}} g(N_+, N_{++}) e^{4\beta\varepsilon N_{++}} \right] \quad (24)$$

gdzie $g(N_+, N_{++})$ oznacza liczbę konfiguracji odpowiadających zadanym wartościom N_+ , N_{++} , a druga suma rozciąga się na wszystkie stany, dla których N_+ spinów skierowanych jest do góry.

Model Isinga w przybliżeniu Bragga-Williamsa

N_+/N jest miarą dalekiego uporządkowania, natomiast $N_{++}/\left(\frac{1}{2}\gamma N\right)$ jest miarą uporządkowania bliskiego: liczba ta wyznacza ułamek *sąsiednich* spinów, które są skierowane do góry jako ułamek wszystkich spinów. Oznaczmy

$$\frac{N_+}{N} = \frac{1}{2}(L + 1), \quad \frac{N_{++}}{\frac{1}{2}\gamma N} = \frac{1}{2}(\sigma + 1) \quad (25)$$

(są to definicje wielkości L , σ). W tych oznaczeniach

$$\frac{1}{N}E = -\frac{1}{2}\gamma\varepsilon(2\sigma - 2L + 1) - BL \quad (26)$$

Przyjmijmy, że **uporządkowanie bliskie jest wyznaczone przez uporządko-**

wanie dalekie

$$\frac{N_{+++}}{\frac{1}{2}\gamma N} \simeq \left(\frac{N_+}{N}\right)^2 \quad \text{czyli } \sigma \simeq \frac{1}{2}(L+1)^2 - 1. \quad (27)$$

Sens tego przybliżenia jest taki: Jeżeli ułamek wszystkich spinów do góry jest N_+/N i są one *równomiernie* rozłożone po całej sieci, ułamek *par* spinów do góry będzie się zachowywał jak kwadrat tej liczby, gdyż aby utworzyć parę, musimy z powodzeniem wykonać dwa niezależne losowania. (To nie ma sensu dla modelu jedowymiarowego.) Jest to *przybliżenie średniego pola*: lokalny spin oddziałuje z uśrednioną, równomiernie rozłożoną na sieci wartością sąsiedniego spinu.

W przybliżeniu (27) suma statystyczna ma postać

$$Z = \sum_{\{s_i\}} e^{\beta N(\frac{1}{2}\gamma \epsilon L + BL)} \quad (28)$$

W (28) sumujemy po konfiguracjach $\{s_i\}$, ale wyrażenie pod sumą zależy tylko od L . Ile zatem jest konfiguracji, które odpowiadają ustalonemu L ? Tyle, na ile sposobów można wybrać N_+ z N . Zatem

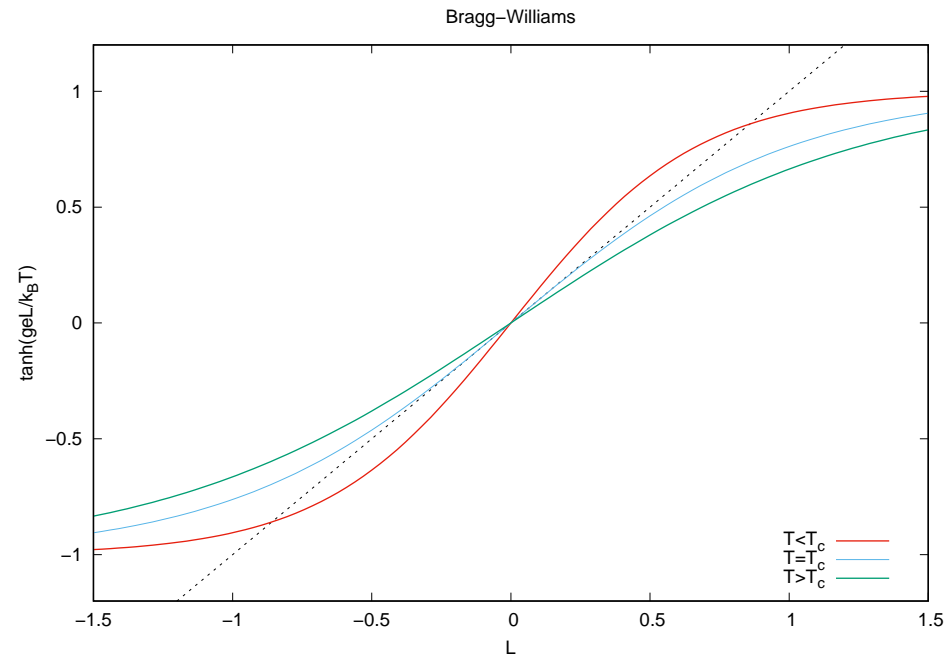
$$Z = \sum_L \frac{N!}{[\frac{1}{2}N(1+L)]![\frac{1}{2}N(1-L)]!} e^{\beta N(\frac{1}{2}\gamma\epsilon L + BL)} \quad (29)$$

W granicy $N \rightarrow \infty$ logarytm prawej strony (29) jest równy logarytmowi największego wyrazu sumy; niech wyraz ten odpowiada $L = \bar{L}$. Jest on pierwiastkiem równania

$$\ln \frac{1 + \bar{L}}{1 - \bar{L}} = 2\beta B + 2\beta\gamma\epsilon\bar{L} \quad (30)$$

Interesuje nas magnetyzacja spontaniczna, czyli przypadek $B = 0$. Wówczas z (30) otrzymujemy

$$\bar{L} = \operatorname{tgh} \left(\frac{\gamma\epsilon\bar{L}}{k_B T} \right) \quad (31)$$



Widać, że w modelu występuje temperatura krytyczna $T_{kr} = \gamma\varepsilon/k_B$: Powyżej temperatury krytycznej, jedynym rozwiązaniem (31) jest $\bar{L} = 0$. Poniżej temperatury krytycznej, gdy nachylenie prawej strony (31) w zerze staje się większe od 1, rozwiązanie $\bar{L} = 0$ traci stabilność, pojawiają się za to dwa nowe rozwiązania $\bar{L} = \pm L_0 \neq 0$ (w układzie występuje **bifurkacja superkrytyczna**). **W przybliżeniu Bragga-Williamsa w modelu Isinga poniżej temperatury krytycznej istnieje magnetyzacja spontaniczna.** W temperaturze krytycznej dwuwymiarowy model Isinga wykazuje przejście fazowe drugiego rodzaju (ciągłe).

Rozwiązanie ściste

Podane przez Onsagera ściste rozwiązanie dla dwuwymiarowego modelu Isinga w zerowym polu ma postać (energia wewnętrzna na jeden spin)

$$u(0, T) = -\varepsilon \operatorname{ctgh}(2\beta\varepsilon) \left[1 + \frac{2}{\pi} \kappa' K_1(\kappa) \right] \quad (32a)$$

$$\kappa = \frac{2 \sinh 2\beta\varepsilon}{\cosh^2 2\beta\varepsilon} \quad (32b)$$

$$\kappa' = 2 \tanh^2 2\beta\varepsilon - 1 \quad (32c)$$

($\kappa^2 + \kappa'^2 = 1$), natomiast

$$K_1(\kappa) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \phi}} \quad (32d)$$

jest całką eliptyczną pierwszego rodzaju.

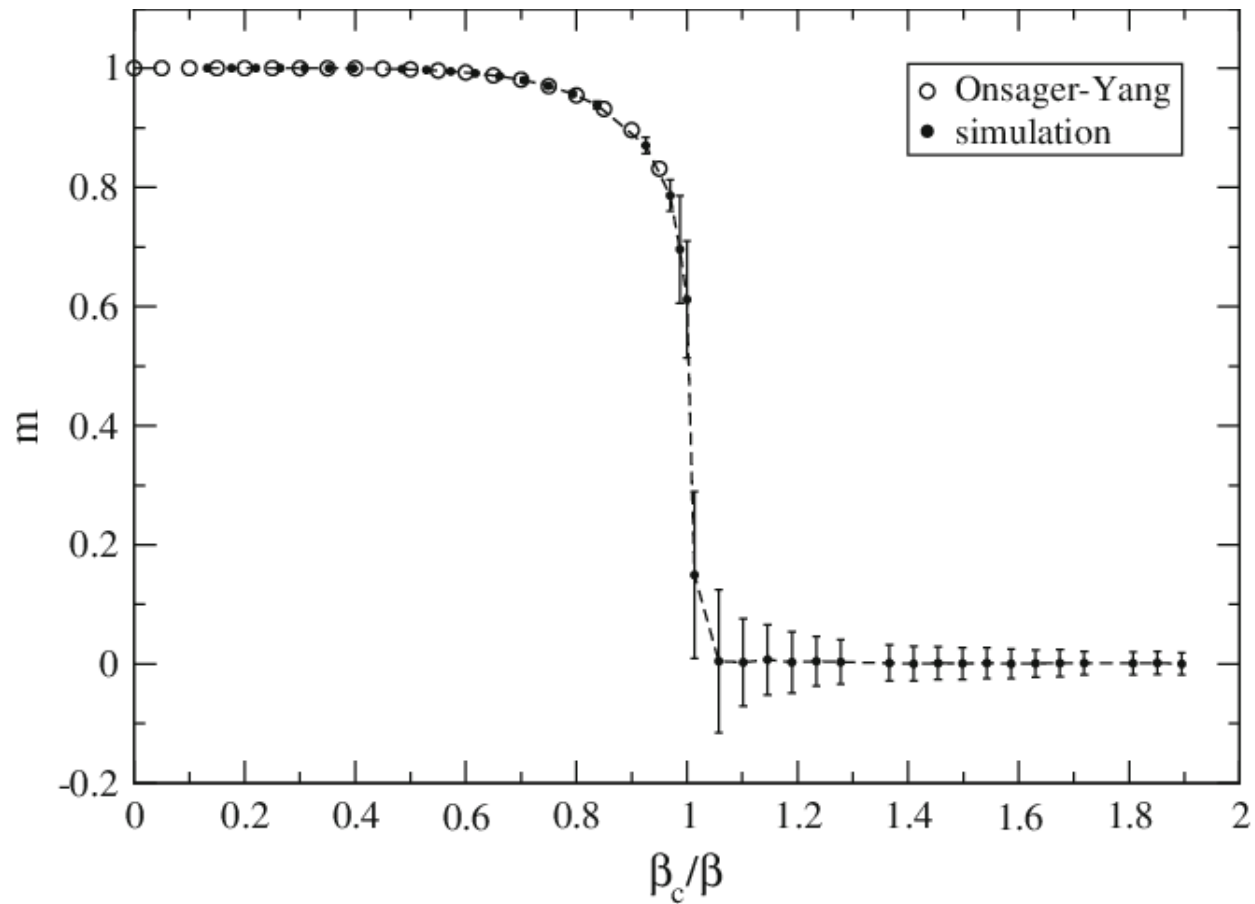
Całka eliptyczna ma osobliwość w $\kappa = 1$, skąd wynika, że **wszystkie funkcje termodynamiczne są osobliwe** w otoczeniu temperatury, dla której $\kappa = 1$:

$$2 \tanh^2 \frac{2\varepsilon}{k_B T_c} = 1. \quad (33)$$

Magnetyzacja spontaniczna na jeden spin ma postać

$$m(0, T) = \begin{cases} 0 & T > T_c \\ \frac{(1+z^2)^{1/4} (1-6z^2+z^4)^{1/8}}{\sqrt{1-z^2}} & T \leq T_c \end{cases} \quad (34)$$

gdzie $z = e^{-2\beta\varepsilon}$. Temperatura krytyczna odpowiada $z = \sqrt{2} - 1$.



Zauważmy, że w pobliżu przejścia fazowego wyniki symulacji obarczone są dużym błędem!

Ścisłe rozwiązania dla modelu Isinga w trzech (i więcej) wymiarach nie są znane.

Uwaga: Model Isinga jest modelem klasycznym — “spiny” są klasycznymi momentami magnetycznymi. Kwantowy odpowiednik modelu Isinga, gdzie zamiast klasycznych spinów występują kwantowe operatory spinu, nosi nazwę modelu Heisenberga.

Synchronizacja

Synchronizacja jest jednym z najbardziej spektakularnych (i najważniejszych) zachowań w dynamice nieliniowej. Po raz pierwszy opisał ją Huygens w XVII wieku.

Winfrey, badając zachowanie amerykańskich świetlików (robaczek świętojańskich), w 1967 zaproponował, by, po pierwsze, każdy indywidualny organizm opisywać jako **oscylator na cyklu granicznym**, po drugie, że każdy organizm (jakoś) reaguje na wspólny, globalny rytm generowany przez całą populację.

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\theta_i - \theta_j), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (35)$$

θ_i jest fazą i -tego oscylatora, ω_i jego naturalną częstością. Kropka oznacza pochodną po czasie.



Christiaan Huygens, 1629-1695

Model Kuramoto*

Rozważmy kolekcję N cząstek (oscylatorów fazowych) wykonujących ruchy jednostajne po okręgu. Jeśli cząstki nie oddziałują ze sobą, ruch każdej z nich jest opisany równaniem

$$\dot{\theta}_i = \omega_i \quad (36)$$

Zakładamy, że częstości cząstek zostały wylosowane z rozkładu $g(\omega)$, unimodalnego, symetrycznego ($g(-\omega) = g(\omega)$), posiadającego skończony drugi moment.

Założmy teraz, że oscylatory “widzą się”, to znaczy jakoś ze sobą oddziałują. Specyfikując sprzężenie z równania (35), Kuramoto zaproponował

*Y. Kuramoto, Lecture Notes in Physics **39**, Springer 1975, p. 420

następujący model:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j) \quad (37)$$

K jest stałą sprzężenia. Suma rozciąga się po wszystkich oscylatorach, jest to więc oddziaływanie “każdy z każdym”. Jeśli $\theta_i > \theta_j$, sprzężenie pomiędzy i -tym a j -tym spowalnia i -ty oscylator. Jeżeli $\theta_i < \theta_j$, sprzężenie przyspiesza ten oscylator. Jak zobaczymy, układ równań (37) zadaje pewien model typu średniego pola.

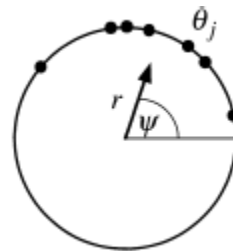


Yoshiki Kuramoto, 1940 -

Parametr porządku

Aby opisać zachowanie całej kolekcji sprzężonych oscylatorów, Kuramoto wprowadził *parametr porządku*

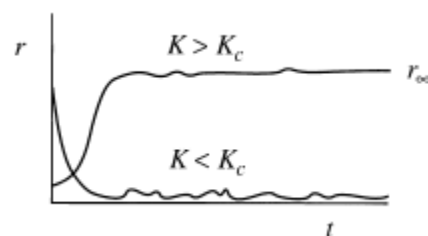
$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j} = r e^{i\psi} \quad (38)$$



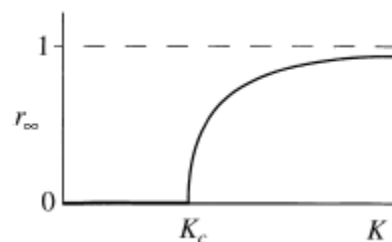
Gdyby wszystkie oscylatory miały identyczne fazy (pełna synchronizacja fazowa), r w równaniu (38) byłoby równe 1. W ogólności $0 \leq r \leq 1$. Możemy natomiast tak dobrać układ współrzędnych, aby globalna faza $\psi = 0$. Wówczas r jest parametrem porządku.

Wyniki “eksperymentalne”

Za pomocą symulacji łatwo sprawdzić, że w układzie występuje pewna krytyczna stała sprzężenia K_C : Jeżeli $K < K_C$, parametr porządku spada z czasem i wykonuje nieregularne fluktuacje powyżej zera. Jeżeli $K > K_C$, parametr porządku po pewnym czasie stabilizuje się w okolicach jakiejś wartości, wokół której wykonuje fluktuacje o amplitudzie $O(N^{-1})$.



Jeżeli $K > K_C$, to analizując wartości r_∞ (średnie wartości, jakie parametr porządku osiąga po bardzo długim czasie), widzimy, że powyżej K_C rosną one wraz z K .



Model Kuramoto jako model średniego pola

Przekształćmy (37)

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_i &= \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_i - \theta_j) = \omega_i - \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N (\sin \theta_i \cos \theta_j - \cos \theta_i \sin \theta_j) \\ &= \omega_i - K \sin \theta_i \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \cos \theta_j \right) + K \cos \theta_i \left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin \theta_j \right) \\ &= \omega_i - Kr \sin \theta_i \cos \psi + Kr \cos \theta_i \sin \psi \\ &= \omega_i - Kr \sin(\theta_i - \psi)\end{aligned}\tag{39}$$

gdzie do wykonania sum w nawiasach użyliśmy definicji (38). Widzimy, że i -ty oscylator sprzęga się ze *średnią* wartością fazy, przy czym parametr porządku modyfikuje stałą sprzężenia.

Jeśli przyjmiemy, że $\psi = 0$, ostatecznie otrzymamy

$$\dot{\theta}_i = \omega_i - Kr \sin \theta_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

Każdy oscylator zachowuje się tak, *jakby* nie był sprzężony z pozostałymi. Oczywiście tak nie jest, gdyż sprzężenie wpływa na wartość parametru porządku r , modyfikującego wartość stałej sprzężenia w (40).

Rozwiązania zsynchronizowane i dryfujące

Czy możliwe jest, aby (40) przewidywało istnienie rozwiązań zsynchronizowanych, $\theta_i = \Omega t$, gdzie Ω jest pewną wspólną częstością? Tak: oscylatory spełniające $|\omega_i| < Kr$ dążą do stabilnego punktu stałego, zdefiniowanego niejawnie przez

$$\omega_i = Kr \sin \theta_i \quad (41)$$

przy założeniu, że $|\theta_i| \leq \frac{\pi}{2}$. To są oscylatory pochodzące ze środka rozkładu $g(\omega)$. Jeśli K nie jest bardzo duże, oscylatory z ogonów rozkładu nie zsynchronizują się, tylko dryfują. Aby jednak założenia o stałości r i ψ miały sens, ich rozkład musi być stacjonarny, z odwrotną proporcjonalnością do prędkości przy danym θ . Przyjmujemy, że rozkład oscylatorów dryfujących ma postać

$$\rho(\theta, \omega) = \frac{C}{|\omega - Kr \sin \theta|}, \quad C = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2} \quad (42)$$

$$\langle e^{i\theta} \rangle = \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{synchron}} + \langle e^{i\theta} \rangle_{\text{dryf}} \quad (43)$$

$\psi = 0$, więc $\langle e^{i\theta} \rangle = r$. Dla $N \rightarrow \infty$ z symetrii $g(\omega)$ wynika, że $\langle \sin \theta \rangle = 0$. Zatem

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{synchron}} = \langle \cos \theta \rangle_{\text{synchron}} = \int_{-Kr}^{Kr} \cos \theta(\omega) g(\omega) d\omega \quad (44)$$

Z kolei

$$\langle e^{i\theta} \rangle_{\text{dryf}} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{|\omega| > Kr} e^{i\theta} \varrho(\theta, \omega) g(\omega) d\omega d\theta = 0 \quad (45)$$

co wynika z symetrii $g(\omega) = g(-\omega)$ oraz $\varrho(\theta + \pi, -\omega) = \varrho(\theta, \omega)$. Zmie-

niając zmienne w całce (44) ($\omega = Kr \sin \theta$), ostatecznie otrzymujemy

$$r = Kr \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (46)$$

Równanie (46) ma zawsze rozwiązanie trywialne $r = 0$. Czy możliwe są rozwiązania z $r > 0$? Innymi słowy, czy równanie

$$1 = K \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta g(Kr \sin \theta) d\theta \quad (47)$$

może mieć rozwiązanie?

Tak: Przechodząc w (47) do granicy $r \rightarrow 0^+$, otrzymujemy, że drugie rozwiązanie pojawia się dla $K = K_C$ równego

$$K_C = \frac{2}{\pi g(0)} \quad (48)$$

Dla $K > K_C$ pojawiają się rozwiązania z $r > 0$. Jeżeli $g''(0) < 0$, co jest przypadkiem generycznym, odpowiadającym przyjętym założeniom, model Kuramoto doświadcza **bifurkacji superkrytycznej** przy przejściu stałej sprężenia przez K_C . Rozwijając funkcję podcałkową w (47) w szereg w r otrzymujemy

$$r \simeq \sqrt{\frac{16}{-\pi K_C^3 g''(0)}} \cdot \sqrt{\frac{K - K_C}{K_C}} \quad (49)$$

Model Kuramoto wykazuje przejście fazowe drugiego rodzaju w $K = K_C$.