Jednowymiarowy model Isinga

A. Dana jest pewna sieć d-wymiarowa. W każdym węźle sieci rezyduje klasyczny moment magnetyczny ("spin") s_j, gdzie j jest numerem węzła. Spin może przybierać tylko wartości ± 1. Zbiór wszystkich wartości $\{s_j\}$ jednoznacznie wyznacza (mikro)stan układu. Przyjmujemy, że każdy spin oddziałuje tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami. Hamiltonian układu wynosi wobec tego

$$E\{s_i\} = -\sum_{\langle ij\rangle} \varepsilon_{ij}\, s_i s_j - B\sum_{i=1}^{N} s_i\,. \tag{1}$$

Pierwsza suma rozciąga się po wszystkich sąsiednich, rozróżnialnych parach spinów. N jest liczbą spinów na sieci, natomiast B jest zewnętrznym polem magnetycznym.

B. Ograniczmy się do *jednowymiarowego* modelu Isinga z periodycznymi warunkami brzegowymi: spiny siedzą na okręgu, $N+1$-wszy spin utożsamiamy z 1-wszym. Wówczas Hamiltonian ma postać

$$E = -\varepsilon\sum_{k=1}^{N} s_k s_{k+1} - B\sum_{k=1}^{N} s_k = -\varepsilon\sum_{k=1}^{N} s_k s_{k+1} - \frac{1}{2}B\sum_{k=1}^{N}(s_k + s_{k+1}) \tag{2}$$

gdzie druga równość wynika z periodycznych warunków brzegowych, natomiast suma statystyczna wynosi

$$Z = \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_N}\exp\left[\beta\sum_{k=1}^{N}(\varepsilon s_k s_{k+1} + \frac{1}{2}B(s_k + s_{k+1}))\right] \tag{3}$$

Niech $\mathbf{P}$ będzie macierzą

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} e^{\beta(\varepsilon+B)} & e^{-\beta\varepsilon} \\ e^{-\beta\varepsilon} & e^{\beta(\varepsilon-B)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

C.

1. Pokaż, że

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_N} \langle s_1|\,\mathbf{P}\,|s_2\rangle\,\langle s_2|\,\mathbf{P}\,|s_3\rangle \ldots \langle s_N|\,\mathbf{P}\,|s_1\rangle \\ &= \sum_{s_1} \langle s_1|\,\mathbf{P}^N\,|s_1\rangle = \mathrm{Tr}\,\mathbf{P}^N \end{aligned} \tag{5}$$

2. Znajdź wartości własne macierzy (4)

3. Na tej podstawie wyznacz w granicy $N \to \infty$ energię swobodną i magnetyzację układu. Czy w układzie występuje magnetyzacja spontaniczna?

PFG