Układy współrzędnych

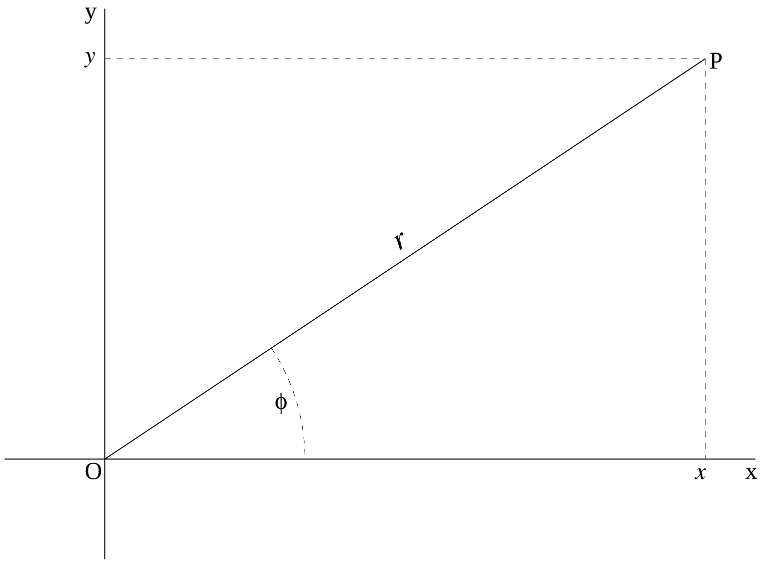
P. F. Góra

rok akademicki 2009-10

Układ kartezjański płaski. Układ kartezjański na płaszczyźnie składa się z dwu osi, przecinających się w punkcie O pod kątem prostym. Punkt O nazywamy "początkiem" lub "środkiem" układu współrzędnych. Ustalamy, która oś jest "pierwsza", która "druga". Tradycyjnie oznaczamy je OX, OY. Każdy punkt płaszczyzny można jednoznacznie określić podając jego rzuty prostokątne na obie osie. Punkt, którego rzuty na obie osie wynoszą, odpowiednio, x, y, oznaczamy $P(x, y)$. Liczby x, y, nazywane współrzędnymi kartezjańskimi, mogą przyjmować wszystkie wartości rzeczywiste, $x, y \in \mathbb{R}$. Punkty płaszczyzny można zatem utożsamiać z uporządkowanymi parami liczb rzeczywistych.

Punkt płaszczyzny można także utożsamiać z wektorem zaczepionym w początku układu współrzędnych, zakończonym zaś w danym punkcie. Wektor ten nazywamy *wektorem wodzącym* punktu.

Osie układu kartezjańskiego dzielą płaszczyznę na cztery ćwiartki, numerowane od prawego górnego rogu przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 1. Układ kartezjański płaski i układ biegunowy.

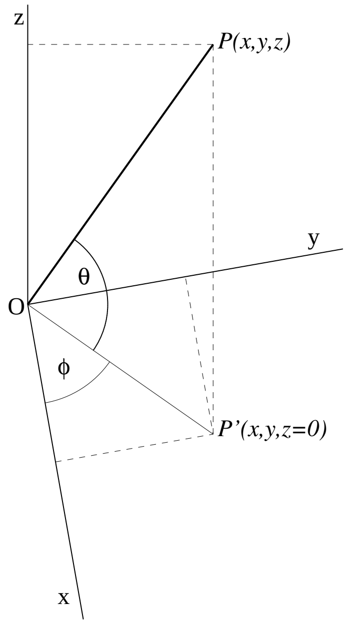
Układ biegunowy. Alternatywą dla układu kartezjańskiego płaskiego jest układ biegunowy. Zamiast podawać współrzędne kartezjańskie, podajemy odległość punktu od środka układu współrzędnych, r ($r \geqslant 0$), oraz kąt φ, jaki wektor wodzący punktu tworzy z osią OX. Kąt mierzymy przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

Związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a biegunowymi tego samego punktu jest dany przez

$$x = r\cos\phi \tag{1a}$$
$$y = r\sin\phi \tag{1b}$$

Trójwymiarowy układ kartezjański. Układ kartezjański trójwymiarowy składa się z trzech wzajemnie prostopadłych osi, przecinających się w jednym punkcie, zwanym "początkiem" lub "środkiem" układu współrzędnych. Każdy punkt przestrzeni możemy jednoznacznie określić podając jego trzy rzuty prostokątne na kolejne osie. Jeżeli punkt ma współrzędne $P(x, y, z)$, jego rzut na płąszczyznę XY ma współrzędne $(x, y, 0)$; można go wóczas utożsamiać z punktem płaszczyzny o współrzędnych $P'(x, y)$.

Wektor o początku w początku układu współrzędnych i końcu w danym punkcie nazywamy *wektorem wodzącym* punktu. Punkt można utożsamiać z jego wektorem wodzącym.



Rys. 2. Układ kartezjański trójwymiarowy i układ sferyczny.

Układ sferyczny. Alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych sferycznych. Położenie punktu określamy wówczas podając jego odległość od środka układu współrzędnych, r ($r \geqslant 0$) oraz dwa kąty. W wyborze tych kątów jest pewna dowolność — my przyjmujemy, że są to ϕ, kąt, jaki tworzy wektor wodzący punktu z płaszczyzną XY, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, oraz θ, kąt, jaki tworzy rzut wektora wodzącego punktu na płaszczyznę XY, z osią OX, mierzony przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. W tej konwencji związek pomiędzy współrzędnymi kartezjańskimi a sferycznymi punktu dany jest przez

$$x = r\cos\theta\cos\phi \quad (2a)$$
$$y = r\cos\theta\sin\phi \quad (2b)$$
$$z = r\sin\theta \quad (2c)$$

Zauważmy, że dla punktów leżących w płaszczyźnie XY $\theta = 0$ i współrzędne sferyczne redukują się do współrzędnych biegunowych.

Układ walcowy. Inną alternatywą dla układu kartezjańskiego jest układ współrzędnych walcowych. Jest to, mówiąc obrazowo, uzupełnienie współrzędnych cylindrycznych o "wysokość" punktu ponad płaszczyznę XY, czyli o współrzędną z:

$$x = r\cos\phi \quad (3a)$$
$$y = r\sin\phi \quad (3b)$$
$$z = z \quad (3c)$$