Materiały do zajęć wyrównawczych z matematyki dla studentów informatyki, rok akademicki 2013/14
Zestaw zadań 6

Półgrube litery ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$) oznaczają wektory swobodne.

1. Wektor $\vec{a} = [3, 4, 5]$ ma początek w punkcie $M(-2, 2, 5)$. Znaleźć współrzędne jego końca.

2. Niech $\mathbf{a} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{b} = [1, -2, 5]$. Oblicz
   (a) $3(\mathbf{a} + \mathbf{b})$,
   (b) Iloczyn skalarny $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$,
   (c) Długości wektorów $\mathbf{a}, \mathbf{b}$,
   (d) Kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

3. Oblicz iloczyn skalarny $\mathbf{a} \circ \mathbf{b}$, wiedząc, że $\|\mathbf{a}\| = \frac{1}{4}$, $\|\mathbf{b}\| = \frac{4}{5}$ oraz że sinus kąta pomiędzy tymi wektorami wynosi $\frac{3}{5}$, sam zaś kąt należy do przedziału $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

4. Wiedząc, że $\|\mathbf{a}\| = 2$, $\|\mathbf{b}\| = 3$ oraz $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -4$, oblicz $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) \circ (\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$.

5. Wykaż, że kąt wpisany w okrąg i oparty na średnicy jest kątem prostym. (Wskazówka: punkty leżące na okręgu o środku w środku układu współrzędnych i o promieniu r spełniają równanie $x^2 + y^2 = r^2$.)

6. Platforma o szerokości d porusza się z prędkością $\vec{v}_1$ pomiędzy dwoma równoległymi peronami (wzdłuż peronów). W punkcie O na platformę wbiega człowiek, który porusza się z prędkością $\vec{v}_2$ względem platformy, prostopadle do jej kierunku ruchu. W jakiej odległości od punktu A, leżącego na przeciw punbktu O na drugim peronie, człowiek zejdzie z platformy?

7. Linia prosta porusza się z prędkością $\vec{v}$ w kierunku prostopadłym do siebie i przecina pod kątem α drugą prostą, nieruchomą względem niej. Znaleźć prędkość, z jaką porusza się punkt przecięcia.

8. Dane są wektory $\mathbf{a} = [3, x, y]$, $\mathbf{b} = [1, 2, 3]$, $\mathbf{c} = [2, -4, -1]$.
   (a) Znajdź kąt pomiędzy wektorami $\mathbf{b}, \mathbf{c}$.
   (b) Znajdź wartości zmiennych x, y, dla których wektor $\mathbf{a}$ jest prostopadły do wektorów $\mathbf{b}, \mathbf{c}$.
   (c) Znajdź wektor $\mathbf{c}'$ prostopadły do wektora $\mathbf{b}$ i do wektora $\mathbf{a}$ obliczonego w poprzednim zadaniu. Jaki jest związek pomiędzy wektorem $\mathbf{c}'$ a wektorami $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$?

9. Znajdź rzut wektora $[1, -2]$ na prostą $y = 3x + 1$.

10. Znajdź równanie prostej prostopadłej do prostej $y = -2x + 4$ i przechodzącej przez punkt $(1, 1)$.

11. Znajdź długość przekątnej głównej sześcianu.

12. Oblicz kąt pomiędzy dwiema przekątnymi ścian bocznych sześcianu wychodzącymi z jednego wierzchołka.

13. Oblicz kąt pomiędzy przekątną główną sześcianu a
    (a) krawędzią sześcianu wychodzącą z tego samego wierzchołka,
    (b) przekątną ściany bocznej sześcianu wychodzącą z tego samego wierzchołka.

14. Niech $\mathbf{x} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right]$, $\mathbf{y} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.
    (a) Oblicz długości wektorów $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$.
    (b) Znajdź kąt, jaki tworzą te dwa wektory.
    (c) Znajdź dwa wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe $\mathbf{z}$, $\mathbf{s}$, jednocześnie prostopadłe do wektorów $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Czy to zadanie ma jednoznaczne rozwiązanie?

    Uwaga: $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^4$.