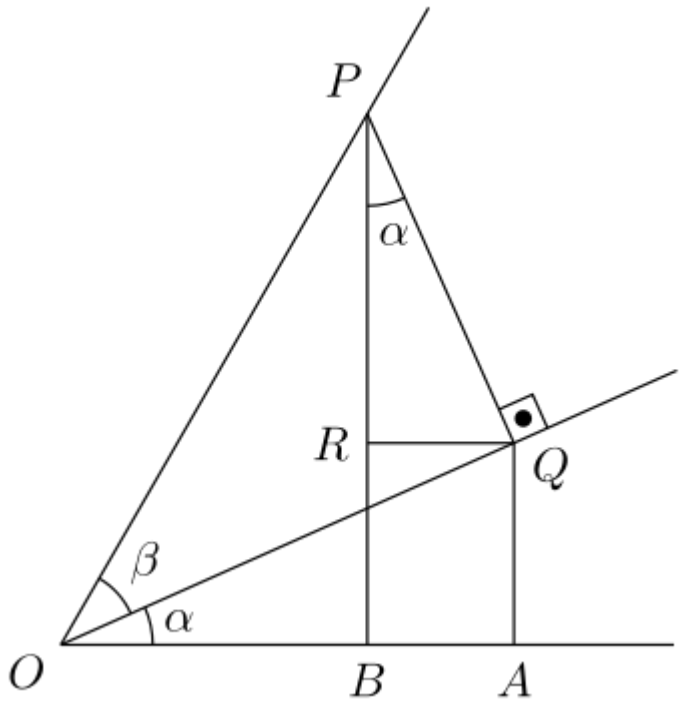
Materiały do zajęć wyrównawczych z matematyki dla studentów informatyki, rok akademicki 2013/14
Zestaw zadań 3

1. Podaj definicje funkcji trygonometrycznych w trójkącie prostokątnym.
2. Korzystając z własności kwadratu, oblicz funkcje trygonometryczne kąta $45°$.
3. Korzystając z własności trójkąta równobocznego, oblicz funkcje trygonometryczne kątów $60°$, $30°$.
4. Podaj definicje funkcji trygonometrycznym dla kątów pierwszej ćwiartki w kartezjańskim układzie współrzędnych.
5. Podaj definicje funkcji trygonometrycznych dla kątów w kartezjańskim układzie współrzędnych.
6. Parzystość funkcji trygonometrycznych. Ile wynosi $\sin(-x)$, $\cos(-x)$, $\mathrm{tg}(-x)$, $\mathrm{ctg}(-x)$? Uzasadnij.
7. Naszkicuj wykresy funkcji trygonometrycznych, zaznaczając na nich charakterystyczne punkty (miejsca zerowe, ekstrema, asymptoty — jeśli występują).
8. Rozważmy następujący rysunek:



   Zakładając, że zaznaczony kąt jest prosty, udowodnij,że kąty oznaczone α są równe.
9. Korzystając z powyższego rysunku, wyprowadź wzory na $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ dla kątów pierwszej ćwiartki. Dla uproszczenia można założyć, że odcinek OP ma długość 1.
10. Korzystając z powyższych wzorów i parzystości funkcji trygonometrycznych, podaj wzory na $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$.

11. Wzory redukcyjne.

    (a) Uprość wyrażenia:
    $$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad n = 1, \ldots, 3$$

    (b) Uprość wyrażenia:
    $$\sin\left(n\frac{\pi}{2} - x\right), \quad n = 1, \ldots, 3$$

    (c) Wykonaj powyższe zadania dla funkcji kosinus, tangens i kotangens.

    (d) Spróbuj podsumować wyniki w postaci pewnej prostej zasady.

12. Uzasadnij, że wyprowadzone wzory na sinus i kosinus sumy kątów obowiązują dla dowolnych kątów (nie tylko dla kątów pierwszej ćwiartki).

13. Udowodnij, że $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

14. Wyprowadź wzory na $\mathrm{tg}(x \pm y)$, $\mathrm{ctg}(x \pm y)$.

15. Wyprowadź wzory na $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\mathrm{tg}(2x)$, $\mathrm{ctg}(2x)$.

16. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów (i) $75°$, (ii) $105°$, (iii) $120°$, (iv) $135°$, (v) $150°$, (vi) $210°$, (vii) $225°$, (viii) $240°$.

17. Wyraź w mierze łukowej wszystkie kąty, które pojawiły się w dotychczasowych zadaniach.

18. Wyprowadź wzory na $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$. Pierwsza wskazówka: Spróbuj rozwiązać te zadania *jednocześnie*. Druga wskazówka: $\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$, $\cos x = \cos\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$.

19. Naszkicuj wykresy funkcji $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

20. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych kątów (i) $\pi/12$, (ii) $\pi/8$, (iii) $7\pi/8$.

21. Sumy i różnice funkcji trygonometrycznych.

    (a) Udowodnij, że
    $$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}.$$

    (b) Podaj wzór na $\sin x - \sin y$.

    (c) Udowodnij, że
    $$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\,\cos\frac{x-y}{2}.$$

    (d) Udowodnij, że
    $$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\,\sin\frac{x-y}{2}.$$

22. Przedyskutuj rozwiązania równań
    $$\sin x = k \tag{1}$$
    $$\cos x = k \tag{2}$$
    $$\mathrm{tg}\, x = k \tag{3}$$
    $$\mathrm{ctg}\, x = k \tag{4}$$
    gdzie $k \in \mathbb{R}$.

23. Jak nazywają się i jak są oznaczane funkcje odwrotne do funkcji trygonometrycznych? Naszkicuj ich wykresy.

24. Rozwiąż równania

$$\cos^2 x + \sin x = 1 \tag{5}$$
$$\cos(5x) = \sin(3x) \tag{6}$$
$$\sin x + \sin(3x) + \sin(5x) = 0 \tag{7}$$
$$\cos(2x) - \cos(6x) = \sin(3x) + \sin(5x) \tag{8}$$

25. Rozwiąż nierówność

$$\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{9}$$

26. Dla jakich wartości parametru a równanie

$$\sin x = \frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - 2} \tag{10}$$

ma co najmniej jedno rozwiązanie? Jeżeli rozwiązanie istnieje, *ile* ich jest?

27. Niech $\alpha = \operatorname{arc\,tg} z$. Oblicz (to znaczy wyraź jako funkcje z) $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

28. Dla $x \in [-1, 1]$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definiujemy $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$.

    (a) Znajdź jawną postać $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$.

    (b) Udowodnij, że dla $n \geqslant 2$
    $$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)\,. \tag{11}$$

    (c) Udowodnij, że $T_n(x)$ są wielomianami.

    (d) Jaki jest stopień wielomianu $T_n(x)$?

    $T_n(x)$ noszą nazwę *wielomianów Czebyszewa*.