Zbiory

P. F. Góra

rok akademicki 2009-10

Zbiór jest pojęciem pierwotnym matematyki. Można rozważać zbiory liczbowe, zbiory punktów, zbiory osób, zbiory obiektów fizycznych, na przykład wszystkich komputerów zainstalowanych w budynku przy ul. Reymonta 4 w Krakowie lub zbiór wszystkich gwiazd w naszej Galaktyce itp.

Zbiory mogą być skończone i nieskończone. Jeżeli element a należy do zbioru A, zapisujemy to $a \in A$. Zbiór, do którego nie nalezy żaden element, nazywamy zbiorem pustym i oznaczamy $\emptyset$.

Jeżeli zbiór jest skończony, możemy zdefiniować go poprzez podanie jego wszystkich elementów: na przykład $A = \{1, 2, 4, 5\}$ jest pewnym zbiorem czteroelementowym. Jeżeli zbiór jest nieskończony, niekiedy możemy go zdefiniować poprzez podanie kryterium określającego, czy dany element należy do tego zbioru. Jeżeli zdefiniujemy "D to zbiór wszystkich naturalnych potęg liczby 2", łatwo sprawdzimy, że zbiór ten jest nieskończony, że $64 \in D$, ale że $66 \notin D$; symbol $\notin$ odczytujemy "nie należy do".

Zdefiniowany powyżej zbiór B możemy formalnie zapisać jako $D = \{y \in \mathbb{N} : \exists n \in \mathbb{N} \colon y = 2^n\}$, co czytamy "ogół takich naturalnych y, że istnieje naturalne n takie, że y jest n-tą potęgą 2".

W zbiorach, w ogólności, nie jest zdefiniowana kolejność elementów, w związku z czym zbiory o takich samych elementach, ale podanych w różnej kolejności, uważamy za równe: $\{1, 2, 4, 5\} = \{5, 1, 2, 4\} = \{4, 2, 5, 1\}$ itd. Patrz niżej, definicja równości zbiorów.

Podzbiór. Mówimy, że zbiór B jest podzbiorem zbioru A, jeżeli każdy element zbioru B jest jednocześnie elementem zbioru A. Zbiór B jest nadzbiorem zbioru A. Każdy zbiór jest swoim własnym podzbiorem. Zbiór pusty jest podzbiorem każdego zbioru. To ostatnie stwierdzenie wynika z rozważenia implikacji $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$. Poprzednik tej implikacji jest zawsze fałszywy, więc implikacja jest prawdziwa dla każdego zbioru A. Podzbiory, które są różne od całego zbioru i od zbioru pustego, nazywamy podzbiorami właściwymi.

Jeżeli B jest podzbiorem A, piszemy $A \subseteq B$. Jeżeli B jest podzbiorem A i jednocześnie A zawiera elementy nienależące do B, piszemy $B \subset A$.

Suma zbiorów. Zbiór elementów, które należą do zbioru A <u>lub</u> do zbioru B, nazywamy sumą (sumą mnogościową) tych zbiorów: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$.

Przykład: Niech $A = \{1, 2, 4, 5\}$, $B = \{5, 7, 9\}$. Wówczas $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 7, 9\}$.

Iloczyn zbiorów. Zbiór elementów, które należą do zbioru A <u>oraz</u> do zbioru B, nazywamy iloczynem (iloczynem mnogościowym, przecięciem) tych zbiorów: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$.

Przykład: Dla zbiorów A, B zdefiniowanych powyżej, $A \cap B = \{5\}$. Zwróćmy uwagę, że liczba 5 występuje w zbiorze $A \cap B$ tylko raz.

Różnica zbiorów. Różnicą zbiorów A, B nazywamy zbiór takich elementów, które należą do A i nie należą do B. $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$. Zauważmy, że $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Przykład: Dla zbiorów A, B zdefiniowanych powyżej, $A \backslash B = \{1, 2, 4\}$, $B \backslash A = \{7, 9\}$.

Równość zbiorów. Mówimy, że dwa zbiory A, B są równe, $A = B$, jeżeli <u>jednocześnie</u> zachodzi $A \subseteq B$ oraz $B \subseteq A$.

Dopełnienie. Niech $A \subseteq U$. Zbiór $A' = U \backslash A$ nazywamy dopełnieniem zbioru A do zbioru U. Zbiór U niekiedy nazywa się w tym kontekscie "uniwersum". Gdy mowa o dopełnieniach zbiorów, zawsze należy określić względem jakiego zbioru obliczamy dopełnienia.