

Funkcja potęgowa, wykładnicza i logarytmiczna

P. F. Góra

rok akademicki 2009-10

1 Potęgi

1.1 Potęgi o wykładniku naturalnym.

Zapis a^n , gdzie $a > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$, interpretujemy jako skrócony zapis mnożenia:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ razy}}. \quad (1)$$

Liczbę a nazywamy *podstawą* potęgi, liczbę n nazywamy *wykładnikiem*. Na przykład $2^2 = 2 \cdot 2$, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$, $13^4 = 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$. Przyjmujemy, że $a^1 \equiv a$.

1.2 Potęgi o wykładniku postaci $1/n$.

Przyjmujemy, że

$$b = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow a = b^n, \quad (2)$$

gdzie $a, b > 0$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Potęgi tej postaci nazywa się także *pierwiastkami arytmetycznymi*: $b = \sqrt[n]{a}$. Na przykład $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

1.3 Potęgi o wykładniku postaci m/n .

Przyjmujemy, że

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}, \quad (3)$$

gdzie $a > 0$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Na przykład $6^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{6})^2 = \sqrt[3]{6^2} = \sqrt[3]{36}$.

1.4 Potęgi o wykładniku ujemnym.

Przyjmujemy, że

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}, \quad (4)$$

gdzie $a > 0$, $m, n = 1, 2, 3, \dots$. Zasadę tę można uogólnić, przyjmując, że dla $a > 0$ zachodzi $\forall \alpha: a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$. Na przykład $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$, $5^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{25}}$.

1.5 Potęgi zera.

Przyjmujemy, że $\forall \alpha > 0: 0^\alpha = 0$. Proszę zwrócić uwagę, że zapis 0^0 jest tak zwanym *symbolem nieoznaczonym*, którego wartość nie jest z góry znana.

1.6 Potęgi o wykładniku zerowym.

Przyjmujemy, że $\forall a > 0: a^0 = 1$. Ponownie zwracamy uwagę, że zapis 0^0 jest symbolem nieoznaczonym.

1.7 Potęgi o wykładniku rzeczywistym.

Powyższe zasady pozwalają prawidłowo zinterpretować dowolną potęgę o wykładniku wymiernym, $a^{\frac{p}{q}}$, gdzie $a > 0$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mając zdefiniowane potęgi o wykładnikach wymiernych, możemy zdefiniować potęgi o dowolnych wykładnikach rzeczywistych. Mianowicie, niech $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\{w_n\}_{n=1}^\infty$ będzie dowolnym ciągiem *wymiernym*, takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha$. Wówczas

$$a^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{w_n}, \quad (5)$$

gdzie $a > 0$.

1.8 Potęgowanie liczb ujemnych.

Podkreślamy, że potęgować można tylko i wyłącznie liczby nieujemne. **Jedyny wyjątek** czynimy dla potęg o wykładnikach całkowitych, gdzie można zastosować zasady (1) i (4). Na przykład $(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$, $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$.

W ogólności potęgowanie liczb ujemnych prowadzi do niejednoznaczności, które można prawidłowo zinterpretować dopiero w ramach teorii liczb zespolonych.

2 Działania na potęgach

Z powyższych definicji wynikają następujące zasady działań na potęgach: Dla dowolnego $a > 0$ i dla dowolnych $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (6a)$$

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta} \quad (6b)$$

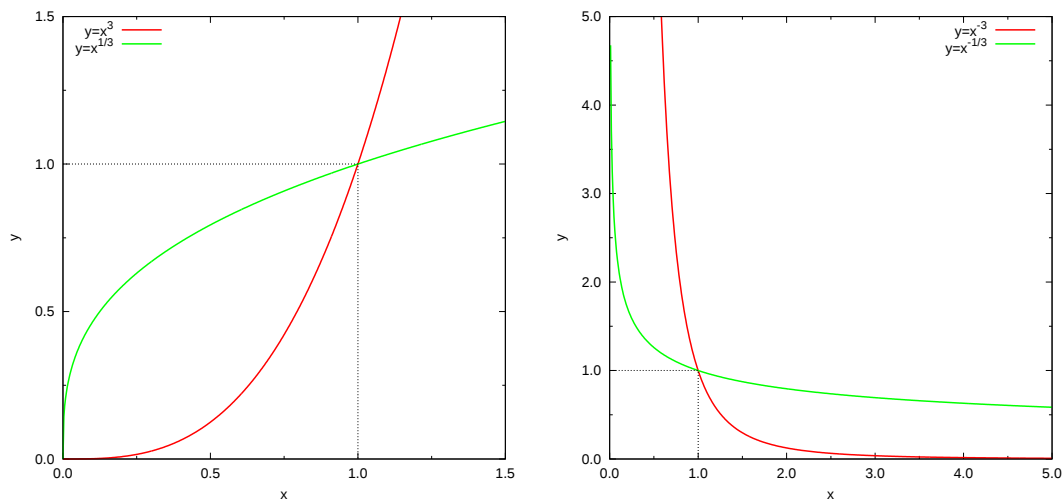
$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} \quad (6c)$$

Przykład: $(5^3)^2 = (5^3) \cdot (5^3) = (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 5^{2 \cdot 3} = 15\,625$.

Zasada (6c) wynika z zasady (6a), gdyż ($a > 0$)

$$1 = a^0 = a^{\alpha-\alpha} = a^\alpha \cdot a^{-\alpha} \Rightarrow a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha}$$

ale ponieważ jest ona bardzo ważna, zdecydowaliśmy się wypisać ją osobno.



Rysunek 1: Przykładowe wykresy funkcji potęgowej dla dodatnich (lewy panel) i ujemnych (prawy panel) wykładników.

3 Funkcja potęgowa

Korzystając z powyższych własności, dla $x \in \mathbb{R}^+$ możemy zdefiniować *funkcję potęgową* $x \rightarrow x^\alpha$. Dla $\alpha > 0$ funkcja ta jest rosnąca, dla $\alpha < 0$ malejąca, dla $\alpha = 0$ jest to funkcja stała. Wykresy funkcji potęgowej dla przykładowych wartości α przedstawia Rysunek 1.

Dla wykładników całkowitych funkcję potęgową można także zdefiniować dla argumentów ujemnych.

4 Funkcja wykładnicza

Dla liczb $a > 0$ definiujemy *funkcję wykładniczą* $x \rightarrow a^x$. Z własności potęg wynika, że $a^x \cdot a^{-x} = 1$. Dla $a > 1$ funkcja a^x jest ściśle rosnąca, funkcja a^{-x} ściśle malejąca. Szczególne znaczenie ma funkcja wykładnicza e^x , której podstawą jest liczba

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Funkcję e^x oznacza się także $\exp x$. Rysunek 2 przedstawia wykresy funkcji e^x i e^{-x} .

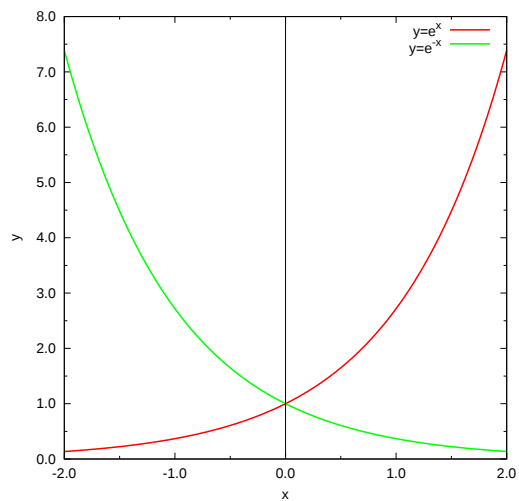
5 Logarytmy

Logarytmowanie jest operacją odwrotną do potęgowania. Jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, *logarytm o podstawie a z liczby $x > 0$* , oznaczany $\log_a x$, mówi nam do jakiej potęgi należy podnieść podaną podstawę, aby otrzymać liczbę x .

$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y, \quad a, x > 0. \quad (7)$$

Przykłady: $\log_2 8 = 3$, gdyż $8 = 2^3$. $\log_{10} 1000 = 4$, gdyż $1000 = 10^4$. $\log_2 \frac{1}{16} = -4$, gdyż $\frac{1}{16} = 2^{-4}$. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$, gdyż $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$. $\log_8 1 = 0$, gdyż $1 = 8^0$.

Logarytm o podstawie e nazywamy *logarytmem naturalnym* i oznaczamy $\ln x = \log_e x$.



Rysunek 2: Funkcja wykładnicza.

5.1 Własności logarytmów

Zachodzą następujące własności ($a, x, y, z > 0$):

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (8a)$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \quad (8b)$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \cdot \log_a x \quad (8c)$$

$$(\log_x y) \cdot (\log_y z) = \log_x z \quad (8d)$$

Z ostatniego z powyższych wzorów wynika następujący wzór na zamianę podstaw logarytmów:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a, b, x > 0. \quad (9)$$

Przykład: $\log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}$.