



1. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1a)$$

Odpowiedź: Dla  $n = 1$  mamy  $L = \sum_{k=1}^1 k = 1$ ,  $P = 1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1 = L$ .

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego  $n \geq 1$ . Obliczamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

co kończy dowód, gdyż otrzymaliśmy wyrażenie postaci (1a) z  $n$  zastąpionym przez  $n+1$ .

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (1b)$$

Odpowiedź: Dla  $n = 1$  mamy  $L = \sum_{k=1}^1 k^2 = 1^2 = 1$ ,  $P = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 2 \cdot 3/6 = 6/6 = 1 = L$ .

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego  $n \geq 1$ . Obliczamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \dots \end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że ostatnie wyrażenie w nawiasie  $(2n^2 + 7n + 6) = (n+2)(2n+3) = (n+2)(2(n+1)+1)$ .  
Zatem

$$\dots = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},$$

co kończy dowód.

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k = -n \quad (1c)$$

Odpowiedź: Dla  $n = 1$   $L = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k+1} k = (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$ , a więc się zgadza.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego  $n \geq 1$ . Obliczamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2(n+1)} (-1)^{k+1} k &= \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} k + (-1)^{2n+1+1} (2n+1) + (-1)^{2n+2+1} (2n+1+1) \\ &= -n + (2n+1) - (2n+2) = -n + 2n+1 - 2n - 2 = -n - 1 = -(n+1). \end{aligned}$$

2. Niech ciąg  $\{a_n\}$  będzie określony następująco:  $a_0$  jest znane,  $\forall k > 0: a_k = q a_{k-1}$ , gdzie  $q \neq 1$ . Ile wynosi suma

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad (2)$$

Jak nazywa się taki ciąg?

Odpowiedź: Twierdzymy, iż

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dla  $n = 0$  lewa i prawa strona powyższego wyrażenia są równe  $a_0$ . Krok indukcyjny: zakładamy, że teza zachodzi dla pewnego  $n \geq 0$ . Teraz zauważamy, że  $a_k = a_0 q^k$  dla  $k \geq 0$  (formalnie rzecz biorąc, tego też trzeba dowieść indukcyjnie, ale dowód jest oczywisty). Obliczamy

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^n a_k + a_{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + a_0 q^{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1} + (1 - q)q^{n+1}}{1 - q} \\ &= a_0 \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = a_0 \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}, \end{aligned}$$

co kończy dowód. Ciąg, o jakim mowa w zadaniu, nosi nazwę *ciągu geometrycznego*.

3. Udowodnij, że dla  $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad (3a)$$

Odpowiedź:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad (3b)$$

Odpowiedź: Zauważmy przede wszystkim, że wyrażenie (3b) ma sens tylko wówczas, gdy  $k < n$  (**nie**  $k \leq n$ ). Przy tym założeniu

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \left( \frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\ &= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \frac{k+1}{n+1} \quad (3c)$$

Odpowiedź:

$$\binom{n+1}{k+1} \frac{k+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \cdot \frac{k+1}{n+1} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} \cdot \frac{k+1}{n+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

4. Udowodnij, że jeżeli  $p$  jest liczbą pierwszą oraz  $k < p$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , to  $\binom{p}{k}$  jest podzielne przez  $p$ .

Odpowiedź:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1) \cdots (p-k+1)}{2 \cdot 3 \cdots k}$$

Ponieważ  $p$  jest liczbą pierwszą,  $p$  jest nieskracalne z mianownikiem powyższego ułamka. Wiadomo zarazem, że wartość symbolu Newtona jest liczbą naturalną. W takim wypadku mianownik musi się skrócić z licznikiem, a wobec tego  $\binom{p}{k} = p \cdot (\text{liczba naturalna})$ .

5. Udowodnij, że dla  $n \in \mathbb{N}$

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (4)$$

(wzór dwumianowy Newtona).

Odpowiedź: Udowodnimy tylko pierwszą z powyższych nierówności; dowód drugiej będzie w tej sytuacji trywialny. Dodówd przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla  $n = 0$ , lewa i prawa strona dają jeden, a więc teza zachodzi. Przyjmujemy założenie indukcyjne, iż teza (4) zachodzi dla pewnego  $n \geq 1$ . Przekształcamy wyrażenie

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \dots \end{aligned}$$

Jak widać, wydzieliśmy początkowy (zerowy) i ostatni  $(n+1)$  wyraz przekształcanej sumy. W pozostałej części “niepokoi” nas człon  $n+1$  w górnym poziomie symbolu Newtona. Aby można się go było pozbyć, zaczniemy od *przenumerowania* wyrazów szeregu: zamiast sumować po  $k$  od 1 do  $n$ , możemy sumować po zmiennej  $l$  od 0 do  $n-1$ . Innymi słowy, przyjmujemy, że  $k = l + 1$ , oraz  $l$  przebiega zakres od 0 do  $n-1$ . **Zmiana górnej granicy sumowania nie zmienia wyrażen zawierających  $n$  w sumowanym wyrażeniu!** Otrzymujemy

$$\begin{aligned} \dots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} a^{l+1} b^{n+1-(l+1)} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \binom{n}{l} + \binom{n}{l+1} \right] a^{l+1} b^{n-l} = \dots \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z już udowodnionej tożsamości (3b). Otrzymujemy dalej

$$\dots = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} a^{l+1} b^{n-l}$$

W drugiej z powyższych sum ponownie zmieniamy sposób numerowania wyrazów — przyjmujemy, że  $l = k - 1$ , gdzie  $k$  przebiega zakres od 0 do  $n$  (jest to powrót do pierwotnego sposobu numerowania). Zatem

$$\begin{aligned} \dots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-(k-1)} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \underbrace{\left( \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + a^n \right)} + b \underbrace{\left( b^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)} = \dots \end{aligned}$$

gdzie najpierw wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed znaki sumy, a później wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed nawias. Zauważmy, że wyraz  $a^n$  jest “brakującym”,  $n$ -tym wyrazem pierwszej sumy. Podobnie  $b^n$  jest “brakującym”, zerowym wyrazem drugiej sumy. Zatem

$$\dots = a \cdot \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \cdot (a+b)^n + b \cdot (a+b)^n = (a+b)^{n+1}$$

co kończy dowód.

6. Udowodnij indukcyjnie, że

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (5a)$$

Odpowiedź: Dowody tego i następnych dwu zadań przebiegają z wykorzystaniem tych samych technik (zmiana numeracji wyrazów, wykorzystanie tożsamości (3b)), co dowód wzoru Newtona. Nie będziemy zatem omawiać poszczególnych kroków, a tylko przedstawimy przekształcenia.

Dla  $n = 0$   $L = \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 = P$ . Przyjmujemy, że dla pewnego  $n \geq 0$  teza zachodzi. Przekształcamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} &= 1 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \left[ \binom{n}{l} + \binom{n}{l+1} \right] + 1 \\ &= 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} + 1 = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^{n+1} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad (5b)$$

Odpowiedź: To twierdzenie zachodzi dla  $n \geq 1$ . I tak, dla  $n = 1$ , mamy  $L = \sum_{k=0}^1 (-1)^k \binom{1}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 = P$ . Po wykonaniu założenia indukcyjnego, przekształcamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} &= (-1)^0 \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n+1}{l+1} + (-1)^{n+1} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l+1} + (-1)^{n+1} \\ &= - \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} - (-1)^n + 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \\ &= - \sum_{l=0}^n (-1)^{l+1} \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = -0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1} \quad (5c)$$

Odpowiedź: Dla  $n = 1$  mamy  $L = \sum_{k=0}^1 k \binom{1}{k} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$ ,  $P = 1 \cdot 2^{1-1} = 1 = L$ . Po dokonaniu założenia indukcyjnego przekształcamy

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} k \binom{n+1}{k} &= 0 \cdot \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^n k \binom{n+1}{k} + (n+1) \cdot \binom{n+1}{n+1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n+1}{l+1} + n+1 \\ &= \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n}{l+1} + n+1 = \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1} (l+1) \binom{n}{l}}_{= n2^{n-1}} + \underbrace{\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}}_{= n2^{n-1}} \\ &= \sum_{l=0}^n (l+1) \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{l=0}^n l \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \\ &= n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} = 2n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1)2^{(n+1)-1} \end{aligned}$$

gdzie do przekształcenia środkowej z trzech ostatnich sum skorzystaliśmy z już udowodnionego wzoru (5b).

7. Wykonaj dowody (5a), (5c) bez jawnego korzystania z zasady indukcji matematycznej.

Odpowiedź: Wzór (5a) uzyskujemy z wzoru Newtona (4) podstawiając  $a = b = 1$ . Podobnie wzór (5b) uzyskujemy z wzoru Newtona podstawiając  $a = -1$ ,  $b = 1$ .

W celu udowodnienia wzoru (5c) zauważmy, że na podstawie wzoru Newtona,

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (6)$$

Zróżniczkujmy powyższe wyrażenie obustronnie po  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x+1)^n &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \\ n(x+1)^{n-1} &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^{k-1} \end{aligned}$$

Podstawiając w ostatnim wyrażeniu  $x = 1$  otrzymamy poszukiwaną tezę.

8. Niech symbol  $a|b$  oznacza, że liczba całkowita  $a$  jest dzielnikiem liczby całkowitej  $b$ . Udowodnij, że dla  $n \geq 0$

$$2 | (n^2 - n) \quad (7a)$$

Odpowiedź: Dla  $n = 1$ ,  $n^2 - n = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ , co jest podzielne przez 2. Przyjmijmy, że dla pewnego  $n \geq 1$ ,  $n^2 - n = 2s$ , gdzie  $s$  jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 - n + 2n = 2s + 2n = 2(s+n)$$

co jest podzielne przez 2.

$$3 \mid (n^3 - n) \quad (7b)$$

Odpowiedź: W tym i w następnych zadaniach pierwszy krok dowodu indukcyjnego wygląda tak samo, jak w zadaniu poprzednim, więc będziemy go pomijać. Przyjmujemy, że dla pewnego  $n \geq 1$ ,  $n^3 - n = 3s$ , gdzie  $s$  jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3(s + n^2 + n)$$

$$9 \mid (10^n - 1) \quad (7c)$$

Odpowiedź: Po sprawdzeniu pierwszego kroku i po przyjęciu założenia indukcyjnego  $10^n - 1 = 9s$ , sprawdzamy

$$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot (10^n - 1 + 1) - 1 = 10 \cdot (10^n - 1) + 10 - 1 = 10 \cdot 9s + 9 = 9(10s + 1)$$

9.  $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  (ciąg Fibonacciego). Udowodnij, że

$$2 \mid a_{3n} \quad (8a)$$

Odpowiedź: Jak łatwo wyliczyć,  $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$ , a więc teza dla  $n = 1$  zachodzi. Zakładamy, że zachodzi ona dla jakiegoś  $n \geq 1$ ,  $a_{3n} = 2s$ . Wówczas

$$a_{3(n+1)} = a_{3n+3} = a_{3n+2} + a_{3n+1} = \underbrace{a_{3n+1} + a_{3n}}_{a_{3n+2}} + a_{3n+1} = 2a_{3n+1} + a_{3n} = 2a_{3n+1} + 2s = 2(a_{3n+1} + s)$$

$$3 \mid a_{4n} \quad (8b)$$

Odpowiedź: Wykorzystując poprzednie zadanie widzimy, że  $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ , a więc teza zachodzi dla  $n = 1$ . Niech  $a_{4n} = 3s$ . Mamy

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} &= a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = \underbrace{a_{4n+2} + a_{4n+1}}_{a_{4n+3}} + a_{4n+2} = 2(a_{4n+1} + a_{4n}) + a_{4n+1} \\ &= 3a_{4n+1} + 2a_{4n} = 3(a_{4n+1} + 2s) \end{aligned}$$

$$5 \mid a_{5n} \quad (8c)$$

Odpowiedź:  $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$ , a więc teza zachodzi dla  $n = 1$ . Niech  $a_{5n} = 5s$ .

$$\begin{aligned} a_{5(n+1)} &= a_{5n+5} = a_{5n+4} + a_{5n+3} = 2a_{5n+3} + a_{5n+2} = 2(a_{5n+2} + a_{5n+1}) + a_{5n+2} = 3a_{5n+2} + 2a_{5n+1} \\ &= 3(a_{5n+1} + a_{5n}) + 2a_{5n+1} = 5a_{5n+1} + 3a_{5n} = 5(a_{5n+1} + 3s) \end{aligned}$$

10. Udowodnij, że dla  $a > -1, n \geq 0$

$$(1 + a)^n \geq 1 + na \quad (9)$$

(nierówność Bernoulli'ego).

Odpowiedź: Teza jest oczywista dla  $n = 0$  i  $n = 1$ . Przyjmujemy, że jest ona spełniona dla jakiegoś  $n \geq 1$ .  
Zauważmy, że ponieważ  $a > -1, 1 + a > 0$ , a zatem mnożąc obustronnie nierówność przez tę wielkość, nie zmieniamy zwrotu nierówności. Wobec tego

$$\begin{aligned} (1 + a)^n &\geq 1 + na \\ (1 + a)^{n+1} &\geq (1 + a)(1 + na) = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

gdyż  $na^2 \geq 0$ .