Materiały do zajęć wyrównawczych z matematyki dla studentów informatyki, rok akademicki 2013/14
Zestaw zadań 5 — odpowiedzi
uwaga: nieco inna kolejność zadań

1. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1a}$$

Odpowiedź: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k = 1$, $P = 1 \cdot (1+1)/2 = 2/2 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

co kończy dowód, gdyż otrzymaliśmy wyrażenie postaci (1a) z n zastąpionym przez $n+1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1b}$$

Odpowiedź: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum\limits_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$, $P = 1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1 + 1)/6 = 2 \cdot 3/6 = 6/6 = 1 = L$.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n+1}{6} \cdot (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + 7n + 6) = \ldots\end{aligned}$$

Łatwo sprawdzić, że ostatnie wyrażenie w nawiasie $(2n^2+7n+6) = (n+2)(2n+3) = (n+2)(2(n+1)+1)$. Zatem

$$\ldots = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},$$

co kończy dowód.

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k = -n \tag{1c}$$

Odpowiedź: Dla $n = 1$ $L = \sum\limits_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}k = (-1)^2 \cdot 1 + (-1)^3 \cdot 2 = 1 - 2 = -1$, a więc się zgadza.

Krok indukcyjny. Przyjmujemy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Obliczamy

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2(n+1)}(-1)^{k+1}k = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^{k+1}k = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}k + (-1)^{2n+1+1}(2n+1) + (-1)^{2n+2+1}(2n+1+1)\\ = -n + (2n+1) - (2n+2) = -n + 2n + 1 - 2n - 2 = -n - 1 = -(n+1).\end{aligned}$$

---

2. Niech ciąg $\{a_n\}$ będzie określony następująco: a_0 jest znane, $\forall k > 0\colon a_k = q\, a_{k-1}$, gdzie $q \neq 1$. Ile wynosi suma

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \tag{2}$$

Jak nazywa się taki ciąg?

Odpowiedź: Twierdzimy, iż

$$S_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Dla $n = 0$ lewa i prawa strona powyższego wyrażenia są równe a_0. Krok indukcyjny: zakładamy, że teza zachodzi dla pewnego $n \geqslant 0$. Teraz zauważamy, że $a_k = a_0 q^k$ dla $k \geqslant 0$ (formalnie rzecz biorąc, tego też trzeba dowieść indukcyjnie, ale dowód jest oczywisty). Obliczamy

$$\begin{aligned}S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n+1} a_k + a_{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + a_0 q^{n+1} = a_0 \frac{1 - q^{n+1} + (1-q)q^{n+1}}{1 - q}\\ = a_0 \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = a_0 \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q},\end{aligned}$$

co kończy dowód. Ciąg, o jakim mowa w zadaniu, nosi nazwę *ciągu geometrycznego*.

---

3. Udowodnij, że dla $n, k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \tag{3a}$$

Odpowiedź:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \tag{3b}$$

Odpowiedź: Zauważmy przede wszystkim, że wyrażenie (3b) ma sens tylko wówczas, gdy $k < n$ (**nie** $k \leqslant n$). Przy tym założeniu

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{n!}{k!(k+1)(n-(k+1))!} = \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{k+1+n-k}{(k+1)(n-k)} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k-1)!(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} = \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1} \tag{3c}$$

Odpowiedź:

$$\binom{n+1}{k+1}\frac{k+1}{n+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)! - (k+1))!} \cdot \frac{k+1}{n+1} = \frac{n!(n+1)}{k!(k+1)(n-k)!} \cdot \frac{k+1}{n+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

---

4. Udowodnij, że jeżeli p jest liczbą pierwszą oraz $k < p$, $k \in \mathbb{N}$, to $\binom{p}{k}$ jest podzielne przez p.

   Odpowiedź:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)\cdot\cdots\cdot(p-k+1)}{2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k}$$

   Ponieważ p jest liczbą pierwszą, p jest nieskracalne z mianownikiem powyższego ułamka. Wiadomo zarazem, że wartość symbolu Newtona jest liczbą naturalną. W takim wypadku mianownik musi się skracać z licznikiem, a wobec tego $\binom{p}{k} = p \cdot$ (liczba naturalna).

5. Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \tag{4}$$

(wzór dwumianowy Newtona).

Odpowiedź: Udowodnimy tylko pierwszą z powyższych nierówności; dowód drugiej będzie w tej sytuacji trywialny. Dodówd przeprowadzimy indukcyjnie.

Dla $n = 0$, lewa i prawa strona dają jeden, a więc teza zachodzi. Przyjmujemy założenie indukcyjne, iż teza (4) zachodzi dla pewnego $n \geqslant 1$. Przekształcamy wyrażenie

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} &= \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \dots\end{aligned}$$

Jak widać, wydzieliliśmy początkowy (zerowy) i ostatni (n+1) wyraz przekształcanej sumy. W pozostałej części "niepokoi" nas człon $n+1$ w górnym poziomie symbolu Newtona. Aby można się go było pozbyć, zaczniemy od *przenumerowania* wyrazów szeregu: zamiast sumować po k od 1 do n, możemy sumować po zmiennej l od 0 do $n-1$. Innymi słowy, przyjmujemy, że $k = l+1$, oraz l przebiega zakres od 0 do $n-1$. **Zmiana górnej granicy sumowania nie zmienia wyrażeń zawierających n w sumowanym wyrażeniu!** Otrzymujemy

$$\begin{aligned}\dots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} a^{l+1} b^{n+1-(l+1)} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \left[\binom{n}{l} + \binom{n}{l+1} \right] a^{l+1} b^{n-l} = \dots\end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z już udowodnionej tożsamości (3b). Otrzymujemy dalej

$$\dots = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} a^{l+1} b^{n-l}$$

W drugiej z powyższych sum ponownie zmieniamy sposób numerowania wyrazów — przyjmujemy, że $l = k-1$, gdzie k przebiega zakres od 0 do n (jest to powrót do pierwotnego sposobu numerowania). Zatem

$$\begin{aligned}\dots &= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^{l+1} b^{n-l} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-(k-1)} \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + a \cdot \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\ &= a \underbrace{\left(\sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + a^n \right)}_{} + b \underbrace{\left(b^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right)}_{} = \dots\end{aligned}$$

gdzie najpierw wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed znaki sumy, a później wyciągnęliśmy wspólne czynniki przed nawias. Zauważmy, że wyraz a^n jest "brakującym", n-tym wyrazem pierwszej sumy. Podobnie b^n jest "brakującym", zerowym wyrazem drugiej sumy. Zatem

$$\ldots = a \cdot \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} a^l b^{n-l} + b \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = a \cdot (a+b)^n + b \cdot (a+b)^n = (a+b)^{n+1}$$

co kończy dowód.

---

6. Udowodnij indukcyjnie, że

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \tag{5a}$$

Odpowiedź: Dowody tego i następnych dwu zadań przebiegają z wykorzystaniem tych samych technik (zmiana numeracji wyrazów, wykorzystanie tożsamości (3b)), co dowód wzoru Newtona. Nie będziemy zatem omawiać poszczególnych kroków, a tylko przedstawimy przekształcenia.

Dla $n = 0$ $L = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} = \binom{0}{0} = 1 = 2^0 = P$. Przyjmujemy, że dla pewnego $n \geqslant 0$ teza zachodzi. Przekształcamy

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n+1}{l+1} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \left[\binom{n}{l} + \binom{n}{l+1} \right] + 1$$
$$= 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l+1} + 1 = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + 1 = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \tag{5b}$$

Odpowiedź: To twierdzenie zachodzi dla $n \geqslant 1$. I tak, dla $n = 1$, mamy $L = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \binom{1}{k} = (-1)^0 \binom{1}{0} + (-1)^1 \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0 = P$. Po wykonaniu założenia indukcyjnego, przekształcamy

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = (-1)^0 \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1}$$
$$= 1 + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n+1}{l+1} + (-1)^{n+1} = 1 + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l+1} + (-1)^{n+1}$$
$$= -\sum_{l=0}^{n-1} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} - (-1)^n + 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$
$$= -\sum_{l=0}^{n} (-1)^{l+1} \binom{n}{l} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = -0 + 0 = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1} \tag{5c}$$

Odpowiedź: Dla $n = 1$ mamy $L = \sum_{k=0}^{1} k\binom{1}{k} = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1$, $P = 1 \cdot 2^{1-1} = 1 = L$. Po dokonaniu założenia indukcyjnego przekształcamy

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k\binom{n+1}{k} &= 0 \cdot \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n+1}{k} + (n+1) \cdot \binom{n+1}{n+1} = \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\binom{n+1}{l+1} + n + 1 \\
&= \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\binom{n}{l+1} + n + 1 = \underbrace{\sum_{l=0}^{n-1}(l+1)\binom{n}{l} + n + 1}\underbrace{+ 0 + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}} \\
&= \sum_{l=0}^{n}(l+1)\binom{n}{l} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{l=0}^{n} l\binom{n}{l} + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} \\
&= n2^{n-1} + 2^n + n2^{n-1} = 2n \cdot 2^{n-1} + 2^n = (n+1)2^{(n+1)-1}
\end{aligned}$$

gdzie do przekształcenia środkowej z trzech ostatnich sum skorzystaliśmy z już udowodnionego wzoru (5b).

---

7. Wykonaj dowody (5a), (5c) bez jawnego korzystania z zasady indukcji matematycznej.

   Odpowiedź: Wzór (5a) uzyskujemy z wzoru Newtona (4) podstawiając $a = b = 1$. Podobnie wzór (5b) uzyskujemy z wzoru Newtona podstawiając $a = -1$, $b = 1$.

   W celu udowodnienia wzoru (5c) zauważmy, że na podstawie wzoru Newtona,

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \tag{6}$$

   Zróżniczkujmy powyższe wyrażenie obustronnie po x:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x+1)^n &= \frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \\
n(x+1)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1}
\end{aligned}$$

   Podstawiając w ostatnim wyrażeniu $x = 1$ otrzymamy poszukiwaną tezę.

---

8. Niech symbol $a|b$ oznacza, że liczba całkowita a jest podzielnikiem liczby całkowitej b. Udowodnij, że dla $n \geqslant 0$

$$2|\left(n^2 - n\right) \tag{7a}$$

   Odpowiedź: Dla $n = 1$, $n^2 - n = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, co jest podzielne przez 2. Przyjmijmy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^2 - n = 2s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 = n^2 - n + 2n = 2s + 2n = 2(s+n)$$

   co jest podzielne przez 2.

$$3|\left(n^3 - n\right) \tag{7b}$$

Odpowiedź: W tym i w następnych zadaniach pierwszy krok dowodu indukcyjnego wygląda tak samo, jak w zadaniu poprzednim, więc będziemy go pomijać. Przyjmujemy, że dla pewnego $n \geqslant 1$, $n^3 - n = 3s$, gdzie s jest jakąś liczbą naturalną.

$$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = n^3 - n + 3n^2 + 3n = 3(s + n^2 + n)$$

$$9|(10^n - 1) \tag{7c}$$

Odpowiedź: Po sprawdzeniu pierwszego kroku i po przyjęciu założenia indukcyjnego $10^n - 1 = 9s$, sprawdzamy

$$10^{n+1} - 1 = 10 \cdot (10^n - 1 + 1) - 1 = 10 \cdot (10^n - 1) + 10 - 1 = 10 \cdot 9s + 9 = 9(10s + 1)$$

---

9. $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (ciąg Fibonacciego). Udowodnij, że

$$2|a_{3n} \tag{8a}$$

Odpowiedź: Jak łatwo wyliczyć, $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, a więc teza dla $n = 1$ zachodzi. Zakładamy, że zachodzi ona dla jakiegoś $n \geqslant 1$, $a_{3n} = 2s$. Wówczas

$$a_{3(n+1)} = a_{3n+3} = a_{3n+2} + a_{3n+1} = \underbrace{a_{3n+1} + a_{3n}}_{a_{3n+2}} + a_{3n+1} = 2a_{3n+1} + a_{3n} = 2a_{3n+1} + 2s = 2(a_{3n+1} + s)$$

$$3|a_{4n} \tag{8b}$$

Odpowiedź: Wykorzystując poprzednie zadanie widzimy, że $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, a więc teza zachodzi dla $n = 1$. Niech $a_{4n} = 3s$. Mamy

$$\begin{aligned} a_{4(n+1)} = a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = \underbrace{a_{4n+2} + a_{4n+1}}_{a_{4n+3}} + a_{4n+2} = 2(a_{4n+1} + a_{4n}) + a_{4n+1} \\ = 3a_{4n+1} + 2a_{4n} = 3(a_{4n+1} + 2s) \end{aligned}$$

$$5|a_{5n} \tag{8c}$$

Odpowiedź: $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$, a więc teza zachodzi dla $n + 1$. Niech $a_{5n} = 5s$.

$$\begin{aligned} a_{5(n+1)} = a_{5n+5} = a_{5n+4} + a_{5n+3} = 2a_{5n+3} + a_{5n+2} = 2(a_{5n+2} + a_{5n+1}) + a_{5n+2} = 3a_{5n+2} + 2a_{5n+1} \\ = 3(a_{5n+1} + a_{5n}) + 2a_{5n+1} = 5a_{5n+1} + 3a_{5n} = 5(a_{5n+1} + 3s) \end{aligned}$$

---

10. Udowodnij, że dla $a > -1$, $n \geqslant 0$

$$(1+a)^n \geqslant 1 + na \tag{9}$$

(nierówność Bernoulli'ego).

Odpowiedź: Teza jest oczywista dla $n = 0$ i $n = 1$. Przyjmujemy, że jest ona spełniona dla jakiegoś $n \geqslant 1$. Zauważmy, że ponieważ $a > -1$, $1 + a > 0$, a zatem mnożąc obustronnie nierówność przez tę wielkość, nie zmieniamy zwrotu nierówności. Wobec tego

$$\begin{aligned} (1+a)^n &\geqslant 1 + na \\ (1+a)^{n+1} &\geqslant (1+a)(1+na) = 1 + (n+1)a + na^2 \geqslant 1 + (n+1)a \end{aligned}$$

gdyż $na^2 \geqslant 0$.