1.

$$\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{18}{2}\right) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\,, \tag{1a}$$

$$\left(4^{\ln 12}\right)^{\log_2 e} = 4^{\ln 12\cdot\log_2 e} = 4^{\log_2 12} = (2^2)^{\log_2 12} = 2^{2\log_2 12} = 2^{\log_2 12^2} = 144 \tag{1b}$$

2.

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 3x + \sin 5x &= 0\\
\sin(3x-2x) + \sin 3x + \sin(3x+2x) &= 0\\
\sin 3x\cos 2x - \cos 3x \sin 2x + \sin 3x + \sin 3x \cos 2x + \cos 3x \sin 2x &= 0\\
\sin 3x\,(2\cos 2x + 1) &= 0
\end{aligned} \tag{2a}$$

Oznacza to, że $\sin 3x = 0$ lub $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Pierwsza z tych możliwości daje $x = n\pi/3$, druga $x = \pm\pi/3 + 2k\pi$, co się zawiera w pierwszej serii. Ostatecznie $x = n\pi/3$.

$$\begin{aligned}
\sin^4 8x + \cos^4 8x &= 1\\
\sin^4 8x + 2\sin^2 8x\cos^2 8x + \cos^4 8x - 2\sin^2 8x \cos^2 8x &= 1\\
\left(\sin^2 8x + \cos^2 8x\right)^2 - 2\sin^2 8x\cos^2 8x &= 1\\
-2\sin^2 8x\cos^2 8x &= 0 \mid \cdot(-2)\\
(2\sin 8x\cos 8x)^2 &= 0\\
(\sin 16x)^2 &= 0\\
\sin 16x &= 0\\
x &= \frac{k\pi}{16}
\end{aligned} \tag{2b}$$

$$\begin{aligned}
2\sin^3 x &= -\sqrt{3}\sin^2 x\\
\sin^2 x(2\sin x + \sqrt{3}) &= 0\\
\sin^2 x = 0 \quad \text{lub} \quad 2\sin x + \sqrt{3} &= 0\\
x = k\pi \quad \text{lub} \quad \sin x &= -\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

$$x = k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{4\pi}{3} + k\pi \quad \text{lub} \quad x = \frac{5\pi}{3} + k\pi\,. \tag{2c}$$

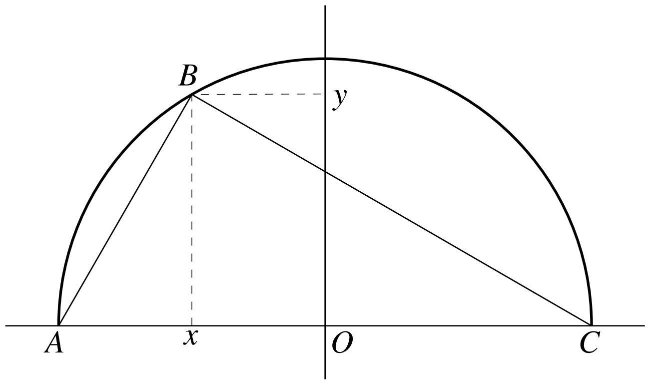
3. Dowód przeprowadzamy indukcyjnie. Dla $n = 1$, $10^n - 1 = 10 - 1 = 9$, $9|9$.
Zakładamy, że teza zachodzi dla pewnego n, to znaczy, że dla tego n zachodzi $9|\,(10^n - 1)$.
Zatem $\exists s \in \mathbb{N}$: $10^n - 1 = 9s$. Wówczas $10^{n+1} - 1 = 10\cdot 10^n - 1 = 10\cdot(10^n - 1 + 1) - 1 = 10\cdot(9s+1) - 1 = 90s + 10 - 1 = 9(10s+1)$. Jest to liczba podzielna przez 9, gdyż $10s + 1 \in \mathbb{N}$. Ostatecznie pokazaliśmy zatem, że $9|\,(10^n - 1) \Rightarrow 9|\,(10^{n+1} - 1)$, co kończy dowód.

4. Obliczamy $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$, a zatem teza zachodzi dla $n = 1$. Niech dla pewnego $n \quad \exists s \in \mathbb{N} : a_{4n} = 3s$. Mamy

$$a_{4(n+1)} = a_{4n+4} = a_{4n+3} + a_{4n+2} = \underbrace{a_{4n+2} + a_{4n+1}}_{a_{4n+3}} + a_{4n+2} = 2a_{4n+2} + a_{4n+1} =$$
$$2(\underbrace{a_{4n+1} + a_{4n}}_{a_{4n+2}}) + a_{4n+1} = 3a_{4n+1} + 2a_{4n} = 3(a_{4n+1} + 2s)\,, \tag{3}$$

co jest podzielne przez 3, gdyż $a_{4n+1} + 2s \in \mathbb{N}$. Pokazaliśmy zatem, że $3\,|a_{4n} \Rightarrow 3|\, a_{4(n+1)}$, co kończy dowód.

5. Rozważmy okrąg o promieniu r i trójkąt ABC wpisany w ten okrąg i oparty na jego średnicy. Niech średnicą będzie odcinek AC. Wprowadzam kartezjański układ współrzędnych, którego początek leży w środku okręgu a oś OX zawiera rozważaną średnicę AC. W tym układzie współrzędnych punkt A ma współrzędne $(-r, 0)$, punkt C ma współrzędne $(r, 0)$. Oznaczmy współrzędne punktu B przez (x, y). Ponieważ punkt ten leży na rozważanym okręgu, musi zachodzić $x^2 + y^2 = r^2$.



Widać, że wektor $\vec{AB} = [x - (-r), y] = [r + x, y]$. Podobnie $\vec{BC} = [r - x, -y]$. Obliczmy iloczyn skalarny $\vec{AB} \circ \vec{BC} = (r + x)(r - x) + y(-y) = r^2 - x^2 - y^2 = r^2 - (x^2 + y^2) = r^2 - r^2 = 0$. Zatem wektory $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ są prostopadłe, a zatem trójkąt ABC jest prostokątny.