

Indukcja matematyczna, symbol Newtona i symbol sumy

P. F. Góra

rok akademicki 2009-10

1 Indukcja matematyczna

Jednym z bardzo ważnych twierdzeń teorii liczb naturalnych, a zarazem ważnym narzędziem dowodzenia wielu niezwykle użytecznych twierdzeń, jest *zasada indukcji*. Na tym etapie edukacji wystarcza jej najbardziej podstawowe sformułowanie:

Niech $T(n)$ będzie pewną formułą (wyrażeniem) jakiegoś języka, gdzie n jest zmienną wolną, dziedziną zaś obejmuje wszystkie liczby naturalne (\mathbb{N}). Wówczas

1. Jeżeli prawdziwe jest $T(1)$, oraz
2. Jeżeli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ zachodzi implikacja $T(n) \Rightarrow T(n+1)$,

to $T(n)$ jest prawdziwe dla każdego $n \in \mathbb{N}$.

Mówiąc niezbyt ściśle, zasada indukcji jest jak drabina: Jeżeli umiemy wejść na najniższy szczebel drabiny (pierwszy krok) i jeżeli zakładając, że stoimy na *dowolnym* szczeblu drabiny umiemy przejść na szczebel *następny* (krok indukcyjny), wnioskujemy, że potrafimy przejść przez całą drabinę.

Przykład: Udowodnij, że dla $n \geq 1$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

Dowód przebiega dwuetapowo.

1°, Sprawdzamy, czy teza zachodzi dla $n = 1$. Suma po lewej stronie jest jednoelementowa i równa 1. Po prawej stronie $\frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$, a więc teza dla $n = 1$ zachodzi.

2°, *krok indukcyjny*. Zakładamy, że teza zachodzi na pewnego n . Niczego specjalnego o tej liczbie nie zakładamy, ma ona być "dowolna"; w ten sposób spełniamy wymóg twierdzenia o indukcji, wymagający aby wynikanie można było pokazać "dla każdego n ". Mamy zatem

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\text{teza}} + n + 1 = \dots \quad (2)$$

Do podkreślonej części stosujemy założenie indukcyjne: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\dots = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1) \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \quad (3)$$

Zrekapitulujmy osiągnięty wynik: Zakładając, że (1) zachodzi dla pewnego, dowolnego n , pokazaliśmy, że zachodzi

$$1 + 2 + \dots + n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Jest to (1) z n zamienionym na $n+1$. Pokazaliśmy więc, że jeżeli teza zachodzi dla dowolnego n , zachodzi także dla $n+1$. W tej sytuacji, na mocy zasady indukcji, dyskutowane twierdzenie uważamy za udowodnione.

Dowody indukcyjne, choć są koncepcyjnie proste, bywają niekiedy dosyć skomplikowane i wymagają znajomości rozmaitych chwytów technicznych. Zadania do tego rozdziału mają na celu zapoznać studentów z tego typu chwytami.

2 Symbol Newtona

Symbolem Newtona nazywamy

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (4)$$

Symbol $\binom{n}{k}$ czytamy “ n po k ”. Symbol $n!$ (silnia) definiowany jest następująco ($n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$):

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & n \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

Tożsamość, popularnie zwana *dwumianem Newtona*, jest bardzo ważnym wzorem, w którym pojawia się symbol Newtona:

$$\forall a, b \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}: (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \quad (6)$$

3 Symbol sumy

We wzorze (6) pojawia się *symbol sumy*. W ogólności, jeżeli mamy ciąg $\{a_k\}$, zapis ($n \geq n_0$)

$$\sum_{k=n_0}^n a_k \quad (7)$$

czytamy “suma po k od n_0 do n z a_k ”. Zapis ten oznacza sumę wszystkich wyrazów ciągu $\{a_k\}$, poczynając od wyrazu a_{n_0} aż do wyrazu a_n .

Przykłady:

$$\sum_{k=1}^5 k! = 1! + 2! + 3! + 4! + 5! \quad (8a)$$

$$\sum_{k=0}^6 2^{-k} = 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} \quad (8b)$$

$$\sum_{k=3}^n k^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \quad (8c)$$

W ostatnim przykładzie zakładamy, że $n \geq 3$.

Indeks sumowania, który w powyższych przykładach oznaczono przez k , jest tak zwanym *wskaznikiem marnym*. Można go dowolnie zmieniać bez zmiany wartości sumy. Na przykład

$$\sum_{k=n_0}^n a_k \equiv \sum_{l=n_0}^n a_l. \quad (9)$$

Zauważmy, że

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=n_0}^n a_k \right) + a_{n+1} = \sum_{k=n_0}^n a_k + a_{n+1}. \quad (10a)$$

Nawiasy pojawiły się tylko dla łatwiejszego odczytania wzoru. Nie mają one znaczenia “merytorycznego” (dodawanie jest łączne) i dlatego zostały pominięte w dalszej części.

Zwróćmy uwagę, że

$$\sum_{k=n_0}^{2(n+1)} b_k = \sum_{k=n_0}^{2n+2} b_k = \sum_{k=n_0}^{2n} b_k + b_{2n+1} + b_{2n+2}. \quad (10b)$$

Przekształcanie wzorów zawierających symbol sumy jest ważną umiejętnością. Zagadnieniu temu poświęcone będzie szereg zadań z tego działu.