Zjawiska wywoływane szumem

P. F. Góra

Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Jagielloński

13 grudnia 2006

Szum przeszkadza ☹

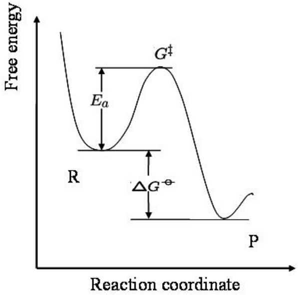
Ale czy zawsze?!

Szum przeszkadza ☹

Ale czy zawsze?!

Zagadnienie Kramersa

H. A. Kramers, Physica **7**, 284 (1940).
Teoria reakcji chemicznych aktywowanych termicznie.



$$k_f = \frac{M\omega_b}{\gamma}\,\frac{\omega_w}{2\pi}\,e^{-\beta E_a}$$

k_f — stała szybkości reakcji "do przodu"

$\longrightarrow$ Teoria szybkości reakcji

P. Hänggi, P. Talkner, and M. Borkovec, Rev. Mod. Phys. **62**, 251 (1990)
E. Pollak and P. Talkner, Chaos **15**, 026116 (2005)

Rezonans stochastyczny — szum może wzmacniać sygnał!

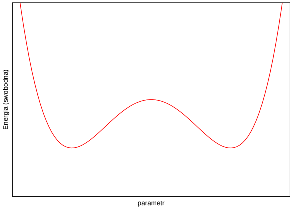
Odkrycie rezonansu stochastycznego:

- związane jest z badaniami nad periodycznością pojawiania się epok lodowcowych (1981)
- hipoteza: ziemski klimat reprezentowany jest przez dwudołkowy potencjał. Jedna ze studni reprezentuje stan o niskiej temperaturze (zlodowacenie), druga stan, w którym znajdujemy się obecnie.
- zlodowacenia następują średnio co 10000 lat – jedynym znanym zjawiskiem astronomicznym w tej skali czasowej są zmiany promienia orbity Ziemi w związku z pewnymi zaburzeniami grawitacyjnymi
- wynikające z tego oscylacje w natężeniu promieniowania Słońca dochodzącego do Ziemi są rzędu 0.1% (słaba periodyczna "siła" zewnętrzna) **i są za słabe** aby przerzucić klimat Ziemi z jednego stanu do drugiego
- w układzie występuje także szum — przypadkowe, wynikające z innych czynników zmiany nasłonecznienia; modelujemy poprzez biały szum gaussowski.
- hipoteza: szum jest dostrojony tak, że poprawia odpowiedź klimatu na słabe zaburzenie związane ze zmianami orbity $\longrightarrow$ periodyczność zlodowaceń.

Przykład kanoniczny

Rezonans stochastyczny — *wzrost* stosunku wyjściowego sygnału do szumu przy *zwiększeniu* poziomu szumu.

$$\dot{x} = -U'(x) + A\sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \tag{1}$$

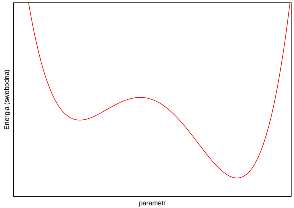


Pierwsze pełne opracowanie teoretyczne: B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).

Przykład kanoniczny

Rezonans stochastyczny — *wzrost* stosunku wyjściowego sygnału do szumu przy *zwiększeniu* poziomu szumu.

$$\dot{x} = -U'(x) + A\sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \tag{1}$$

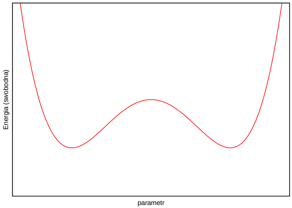


Pierwsze pełne opracowanie teoretyczne: B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).

Przykład kanoniczny

Rezonans stochastyczny — *wzrost* stosunku wyjściowego sygnału do szumu przy *zwiększeniu* poziomu szumu.

$$\dot{x} = -U'(x) + A\sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \tag{1}$$

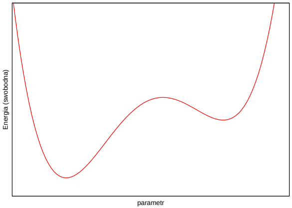


Pierwsze pełne opracowanie teoretyczne: B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).

Przykład kanoniczny

Rezonans stochastyczny — *wzrost* stosunku wyjściowego sygnału do szumu przy *zwiększeniu* poziomu szumu.

$$\dot{x} = -U'(x) + A\sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \tag{1}$$

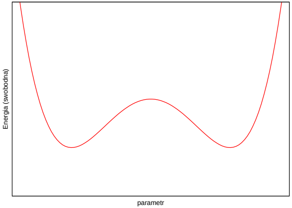


Pierwsze pełne opracowanie teoretyczne: B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).

Przykład kanoniczny

Rezonans stochastyczny — *wzrost* stosunku wyjściowego sygnału do szumu przy *zwiększeniu* poziomu szumu.

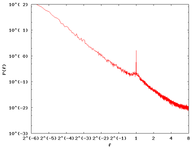
$$\dot{x} = -U'(x) + A\sin(\omega t + \phi) + \xi(t) \tag{1}$$



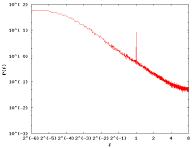
Pierwsze pełne opracowanie teoretyczne: B. McNamara and K. Wiesenfeld, Phys. Rev. A **39**, 4854 (1989).

Widmo mocy i SNR

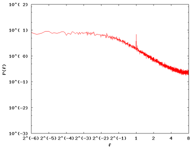
$$P(\omega) = P_{\text{back}}(\omega) + P_\Omega \, \delta(\omega - \Omega) \tag{2}$$



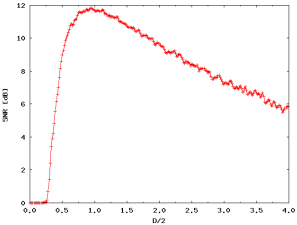
$D/2 = 0.5$



$D/2 = 1.0$



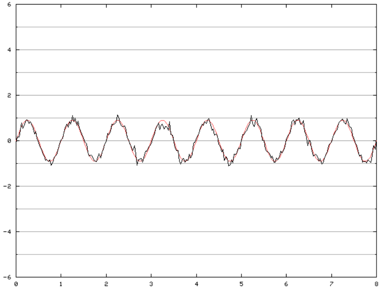
$D/2 = 4.0$

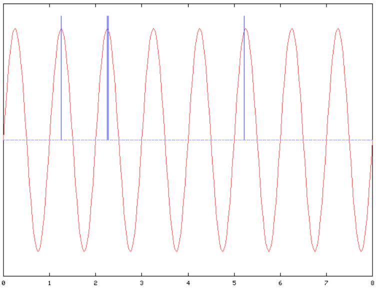


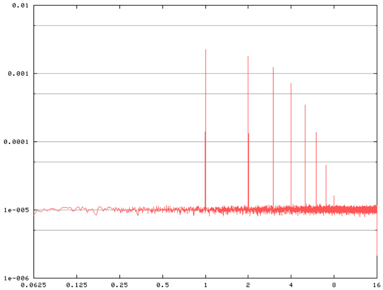
$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{P_\Omega}{P_{\text{back}}(\omega = \Omega)}$$

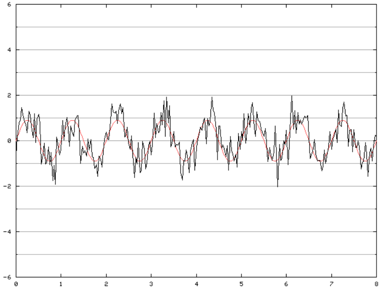
Niedynamiczny rezonans stochastyczny

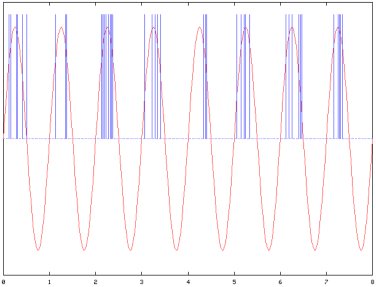
$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\sin(\omega t) + \sigma\,\xi(t)\,, \quad |A| < 1 \\
y(t) &= \begin{cases} 1 & x \geqslant 1\,, \\ 0 & x < 1\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

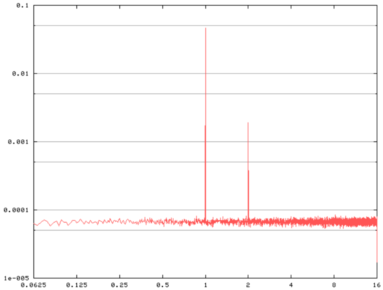

6
4
2
0
-2
-4
-6
0
1
2
3
4
5
6
7
8

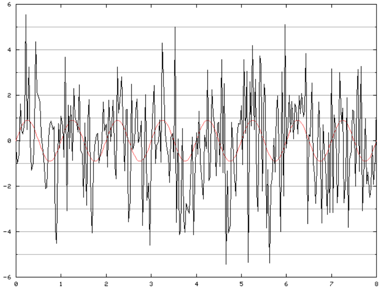

0
1
2
3
4
5
6
7
8

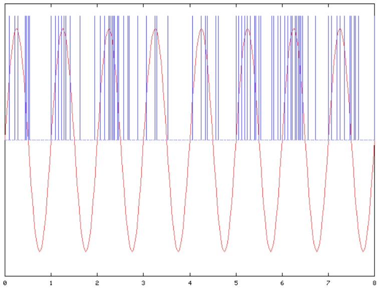

0.01
0.001
0.0001
1e-005
1e-006
0.0625
0.125
0.25
0.5
1
2
4
8
16

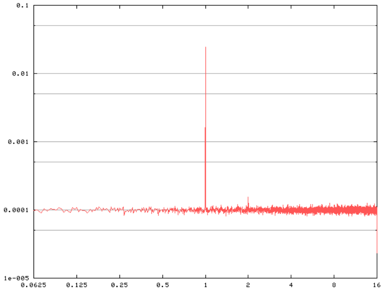

6
4
2
0
-2
-4
-6
0 1 2 3 4 5 6 7 8

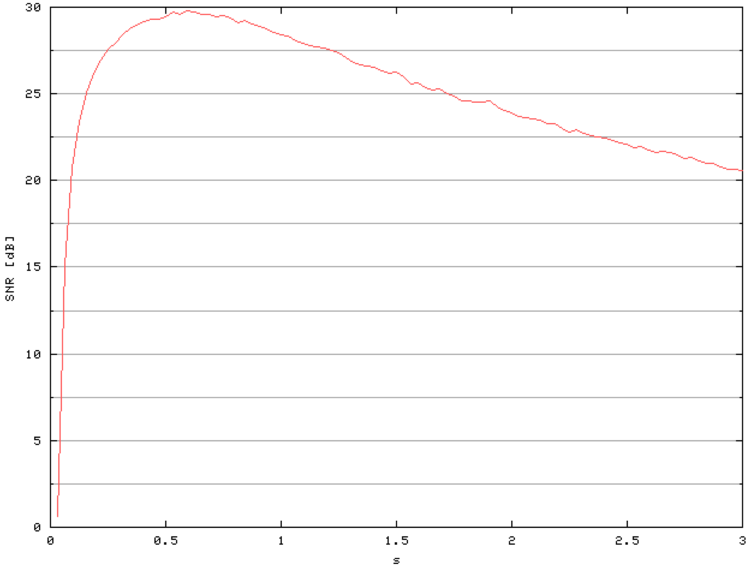

0 1 2 3 4 5 6 7 8


0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-005
0.0625 0.125 0.25 0.5 1 2 4 8 16


6
4
2
0
-2
-4
-6
0 1 2 3 4 5 6 7 8


0 1 2 3 4 5 6 7 8


0.1
0.01
0.001
0.0001
1e-005
0.0625 0.125 0.25 0.5 1 2 4 8 16

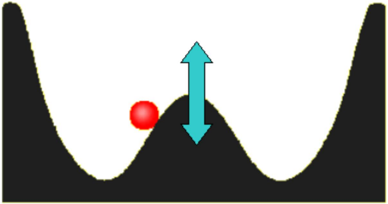


30
25
20
15
10
5
0
SNR [dB]
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
s

Rezonans stochastyczny dzisiaj

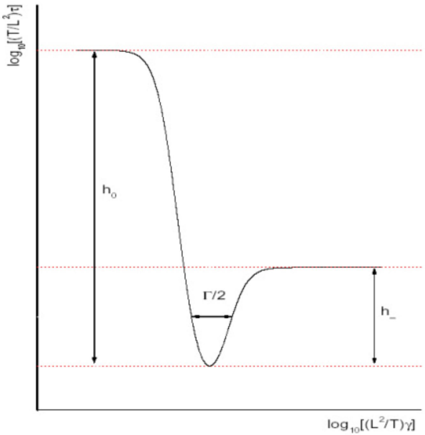
- Reakcje biochemiczne (np. ATP–aza)
- Modele klimatu (epoki lodowcowe, El Niño,. . .)
- Detektory — naturalne i sztuczne
- Zastosowania biomedyczne (korektory postawy, otoskleroza,. . .)
- Modele populacyjne i społeczne
- itd

Aktywacja rezonansowa



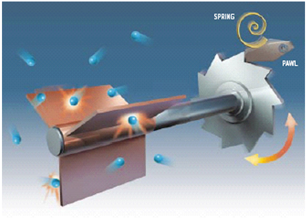
Na kulkę działa szum termiczny. Nie ma kołysania potencjałem, natomiast — okresowo lub losowo — zmienia się wysokość bariery. Dla pewnych wartości parametrów szumu transport przez barierę potencjału staje się znacznie bardziej prawdopodobny.

- wyjaśnienie zachowania pewnych typów laserów
- dynamika reakcji chemicznych
- selektywne pompy jonowe w błonach biologicznych



Zależność średniego czasu potrzebnego na pokonanie bariery od częstotliwości przełączania

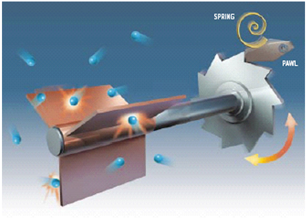
Zębatka brownowska (Brownian ratchet)



- Wariant demona Maxwella, wymyślony przez Smoluchowskiego i spopularyzowany przez Feynmanna:
- Przypadkowy ruch cieplny zostaje zamieniony na ukierunkowany ruch zębatki

- Sprężyna także fluktuuje, zwalniając zębatkę!
- Urządzenie takie może wykonać dowolnie wielką pracę, ale. . .
- . . . ponieważ czas oczekiwania na odpowiednio wielką fluktuację gwałtownie rośnie, moc takiego urządzenia dąży do zera.

Zębatka brownowska (Brownian ratchet)

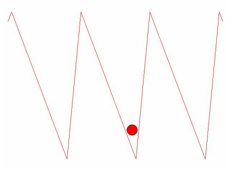


- Wariant demona Maxwella, wymyślony przez Smoluchowskiego i spopularyzowany przez Feynmanna:
- Przypadkowy ruch cieplny zostaje zamieniony na ukierunkowany ruch zębatki

- Sprężyna także fluktuuje, zwalniając zębatkę!
- Urządzenie takie może wykonać dowolnie wielką pracę, ale. . .
- . . . ponieważ czas oczekiwania na odpowiednio wielką fluktuację gwałtownie rośnie, moc takiego urządzenia dąży do zera.

Zębatka brownowska — wydanie współczesne

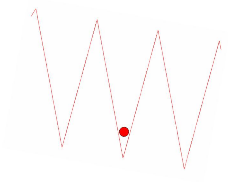
Jeśli “rozprostujemy” zębatkę, dostaniemy potencjał okresowy, ale o złamanej symetrii zwierciadlanej.
Dodajmy zewnętrzną siłę okresową, kołyszącą zebatką:



Dodajmy biały szum gaussowski i *otrzymamy transport*, mimo iż średnia siła działająca na cząstkę znika!
M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).

Zębatka brownowska — wydanie współczesne

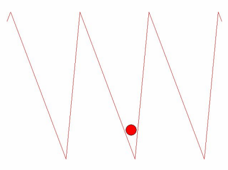
Jeśli "rozprostujemy" zębatkę, dostaniemy potencjał okresowy, ale o złamanej symetrii zwierciadlanej.
Dodajmy zewnętrzną siłę okresową, kołyszącą zebatką:



Dodajmy biały szum gaussowski i *otrzymamy transport*, mimo iż średnia siła działająca na cząstkę znika!
M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).

Zębatka brownowska — wydanie współczesne

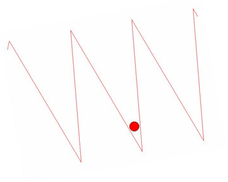
Jeśli “rozprostujemy” zębatkę, dostaniemy potencjał okresowy, ale o złamanej symetrii zwierciadlanej.
Dodajmy zewnętrzną siłę okresową, kołyszącą zebatką:



Dodajmy biały szum gaussowski i *otrzymamy transport*, mimo iż średnia siła działająca na cząstkę znika!
M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).

Zębatka brownowska — wydanie współczesne

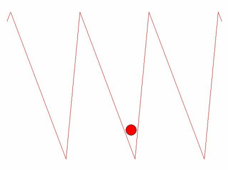
Jeśli “rozprostujemy” zębatkę, dostaniemy potencjał okresowy, ale o złamanej symetrii zwierciadlanej.
Dodajmy zewnętrzną siłę okresową, kołyszącą zebatką:



Dodajmy biały szum gaussowski i *otrzymamy transport*, mimo iż średnia siła działająca na cząstkę znika!
M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).

Zębatka brownowska — wydanie współczesne

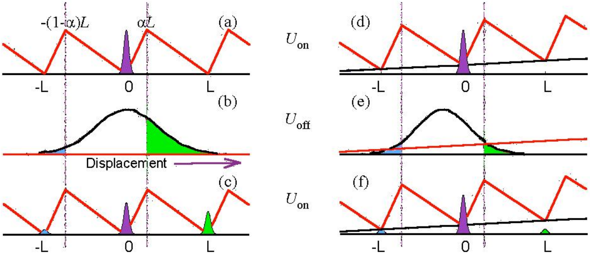
Jeśli “rozprostujemy” zębatkę, dostaniemy potencjał okresowy, ale o złamanej symetrii zwierciadlanej.
Dodajmy zewnętrzną siłę okresową, kołyszącą zebatką:



Dodajmy biały szum gaussowski i *otrzymamy transport*, mimo iż średnia siła działająca na cząstkę znika!
M. O. Magnasco, Phys. Rev. Lett. **71**, 1477 (1993).

Flashing ratchet

Zamiast “kołysać” potencjałem, możemy włączać i wyłączać potencjał.



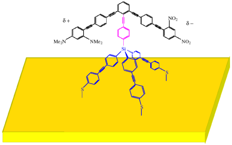
- Swobodna dyfuzja przy wyłączonym potencjale
- Dzięki asymetrii potencjału, więcej cząstek zostaje przerzuconych “do przodu” niż “do tyłu”
- Działa nawet przy pewnym nachyleniu w “złą” stronę

Jeszcze o zębatkach

- Obecność szumu jest konieczna do tego, aby zębatka działała
- Zębatka nie łamie II zasady termodynamiki — energia *jest* dostarczana z zewnątrz, większość jest rozpraszana
- Największy transport odpowiada rezonansowi stochastycznemu

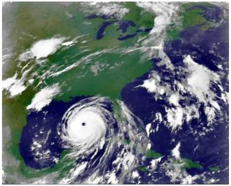
Motory molekularne

- Nanotechnologia i biotechnologia opierają się na możliwości kontrolowania i *wytwarzania* niezwykle małych mechanizmów.



- Marzenie: Zbudujmy nanoroboty, które będą naprawiać mikrouszkodzenia w ludzkim ciele “od wewnątrz”.

- Wielu marzycieli i projektantów zapomina, iż na poziomie molekularnym fluktuacje termiczne odgrywają ogromną rolę.
- Na poziomie molekularnym siłę fluktuacji można porównać do siły huraganu na poziomie makro.



Motory molekularne (c.d.)

A jednak natura jakoś sobie z tym radzi...

Bardzo dobrym modelem działania wielu naturalnych motorów molekularnych są zębratki brownowskie!

Np. kinezyny, pompy molekularne itp.

R. Dean Astumian, *Making Molecules Into Motors*, Sci. Am., July 2001, 51

Pracę motoru molekularnego można porównać do wpychania samochodu pod górę w czasie huraganu, bez użycia silnika

1. Samochód ma koła zablokowane cegłą, którą mocno dociskamy do podłoża
2. Czekamy aż wiatr popchnie samochód pod górę
3. Szybko przesuwamy cegłę
4. *GOTO 1*

Motory molekularne (c.d.)

A jednak natura jakoś sobie z tym radzi. . .

Bardzo dobrym modelem działania wielu naturalnych motorów molekularnych są zębratki brownowskie!

Np. kinezyny, pompy molekularne itp.

R. Dean Astumian, *Making Molecules Into Motors*, Sci. Am., July 2001, 51
Pracę motoru molekularnego można porównać do wpychania samochodu pod górę w czasie huraganu, bez użycia silnika

1. Samochód ma koła zablokowane cegłą, którą mocno dociskamy do podłoża
2. Czekamy aż wiatr popchnie samochód pod górę
3. Szybko przesuwamy cegłę
4. *GOTO 1*

Zjawiska paradoksalne wywołane szumem

Statystyka matematyczna i teoria procesów stochastycznych prowadzą do wielu zjawisk "paradoksalnych" — wyników ścisłych matematycznie, ale sprzecznych z intuicją.

Nie inaczej jest z procesami fizycznymi, w których szumy odgrywają istotną rolę.

Paradoksalne gry Parrondo

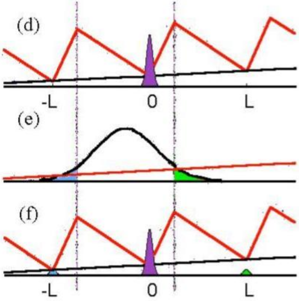
Rozważmy dwie "gry" *nierzetelnymi* monetami. Podane liczby oznaczają prawdopodobieństwa zwycięstwa i przegranej; kto zwycięża, dostaje złotówkę, kto przegrywa, płaci złotówkę.

Gra A	
Zwycięstwo	Przegrana
$1/2 - \varepsilon$	$1/2 + \varepsilon$

Gra B (używamy dwu rodzajów monet)			
Czy bieżący kapitał jest wielokrotnością 3?			
Nie		Tak	
Zwycięstwo	Przegrana	Zwycięstwo	Przegrana
$3/4 - \varepsilon$	$1/4 + \varepsilon$	$1/10 - \varepsilon$	$9/10 + \varepsilon$

Paradoksalne gry Parrondo

Każda z tych gier prowadzi na dłuższą metę do przegranej. Jeśli jednak będziemy losowo — lub w pewnym regularnym cyklu — zmieniać gry, na dłuższą metę wygramy!



- Potencjał stale wyłączony — cząstka się stacza
- Potencjał stale włączony — cząstka się *stacza*
- Potencjał naprzemiennie włącza się i wyłącza — cząstka wspina się do góry

Juan Parrondo wymyślił swoje “gry” jako ilustrację efektu zębatkowego!

Paradoks orzechów brazylijskich

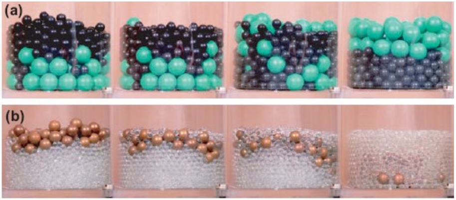
W czasie długich transportów morskich z Ameryki Południowej do Europy, skrzynie, w których transportowano orzechy, były bardzo mocno wstrząsane. Intuicja podpowiada, iż w rezultacie różne rodzaje orzechów powinny być równo wymieszane, jednak w rzeczywistości po otwarciu skrzyni na wierzchu znajdowano największe i najcięższe orzechy brazylijskie.

Paradoks orzechów brazylijskich

Szczegółowe wytłumaczenie tego paradoksu jest bardzo złożone:

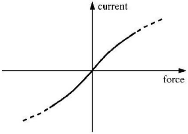
A. Kudrolli, Rep. Prog. Phys. **67**, 57 (2004)

Niewielkie różnice pomiędzy różnymi rodzajami "orzechów" powodują, iż jedne toną, inne wydobywają się na powierzchnię.

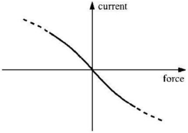


$\longrightarrow$ Fizyka układów ziarnistych

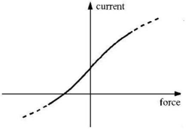
Ujemna ruchliwość



Zwykła odpowiedź — układ w równowadze



Ujemna ruchliwość — układ nierównowagowy



Efekt zębatkowy

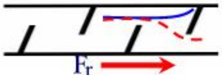
Siła oznaczać może *średnią* siłę

R. Eichhorn, P. Reimann, P. Hänggi, Physica A **325**, 101 (2003)
A. Ros, R. Eichhorn, J. Regtmeier, T. T. Duong, P. Reimann and D. Anselmetti, Nature **436**, 928 (2005)
R. Eichhorn, P. Reimann, B. Cleuren and C. Van den Broeck, Chaos **15**, 026113 (2005)

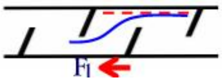
Ujemna ruchliwość

Co jest potrzebne do zrealizowania ujemnej ruchliwości?

- “Pułapki” na cząstki ($\rightarrow$ asymetria)
- Dyfuzja ($\rightarrow$ ruchy Browna)



Duża siła działa w prawo — większość cząsteczek nie zdąży dyfuzyjnie uciec do wyjścia — zostają uwięzione



Przełączamy siłę — słabsza siła działa w lewo — większość cząsteczek zdoła uciec na lewo

Niewielkie zmiany w parametrach cząsteczek (masa, lepkość) mogą spowodować, iż niektóre będą wykazywać ruchliwość dodatnią, inne ujemną — orzechy brazylijskie!