1 O. Dobierając odpowiednie algorytmy (wybór trzeba uzasadnić!), rozwiązać następujące układy równań:

(a)

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{2}$$

2 O. Dane jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128\times 128}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Rozwiązać równanie $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą (3), natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) metody Gaussa-Seidela,

(b) metody gradientów sprzężonych.

Algorytmy **muszą** uwzględniać strukturę macierzy (3)!
Proszę porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, to znaczy jak zmieniaję się normy $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$, gdzie $\mathbf{x}_k$ oznacza k-ty iterat. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy.

3. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Przy użyciu metody potęgowej znajdź jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

4. Sprowadź macierz z zadania 3 do postaci trójdiagonalnej, a następnie znajdź jej wszystkie wartości własne.

5. Konstruując odpowiednią macierz symetryczną, rzeczywistą, znajdź wartości własne i unormowane wektory własne poniższej macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Wskazówka: Wektory własne tej macierzy mogą być zespolone. Normę wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ obliczamy jako $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$.

6. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Znajdź jej (przybliżony) wektor własny do wartości własnej $\lambda \simeq 0.38197$.
Uwaga: w zadaniu **nie** chodzi o to, aby znaleźć **wszystkie** wartości własne powyższej macierzy, a następnie wskazać wektor własny odpowiadający podanej przybliżonej wartości własnej. Prawidłowe rozwiązanie nie obejmuje szukania żadnych wartości własnych, a **jedynie** konstrukcję (przybliżonego) wektora własnego odpowiadającego podanej (przybliżonej) wartości własnej.

7 O. Znajdź, z dokładnością do czterech cyfr dziesiętnych, wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego opartego na następującej tabelce (ze względów typograficznych tabelka ma orientację pionową, a nie, jak to jest zwyczajowo, poziomą; x oznacza węzeł, $f(x)$ wartość funkcji w węźle):

x	$f(x)$
-0.75	1.1309204101562500
-0.50	2.3203125000000000
-0.25	1.9284057617187500
0.00	1.0000000000000000
0.25	0.0554809570312500
0.50	-0.6015625000000000
0.75	-0.7525024414062500
1.00	0.0000000000000000

Sporządź wykres uzyskanego wielomianu w przedziale $-1.25 \leqslant x \leqslant 1.25$ i zaznacz na nim punkty, które posłużyły do jego konstrukcji.
Uwaga: Jeśli zadanie to zostanie wykonane prawidłowo, obliczone współczynniki wielomianu interpolacyjnego będą "ładne".

8. Znaleźć wartości funkcji

$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{7}$$

w punktach $-7/8, -5/8, -3/8, -1/8, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ a następnie skonstruować wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (7) w tych węzłach. Narysować wykres wielomianu interpolacyjnego. Punkt dodatkowy: znajdź *współczynniki* wielomianu interpolacyjnego.

9 O. Skonstruować naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządzić jego wykres.

10. Skonstruować interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządzić odpowiedni wykres.

11 O. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę

$$I = \int\limits_0^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx \tag{8}$$

z dokładnością do 10^{-7}.
Wskazówka:

$$I = \underbrace{\int\limits_0^A \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_A^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right) e^{-x}\, dx}_{I_{\text{ogon}}} \tag{9}$$

przy czym

$$|I_{\text{ogon}}| \leqslant \int\limits_A^\infty \left|\sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\right| e^{-x}\, dx \leqslant \int\limits_A^\infty e^{-x}\, dx = e^{-A}\,. \tag{10}$$

Znajdź A takie, że $e^{-A} < 10^{-7}$, a następnie znajdź numerycznie wartość I_1 z odpowiednią dokładnością.

12. Niech

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right) e^{-t^2}\, dt \tag{11}$$

Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim_{x\to\infty} F(x)$ z dokładnością 10^{-8}.

13 O. Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań

$$243z^7 - 486z^6 + 783z^5 - 990z^4 + 558z^3 - 28z^2 - 72z + 16 = 0 \tag{12a}$$

$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \tag{12b}$$

$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \tag{12c}$$

14. Rozwiąż układ równań

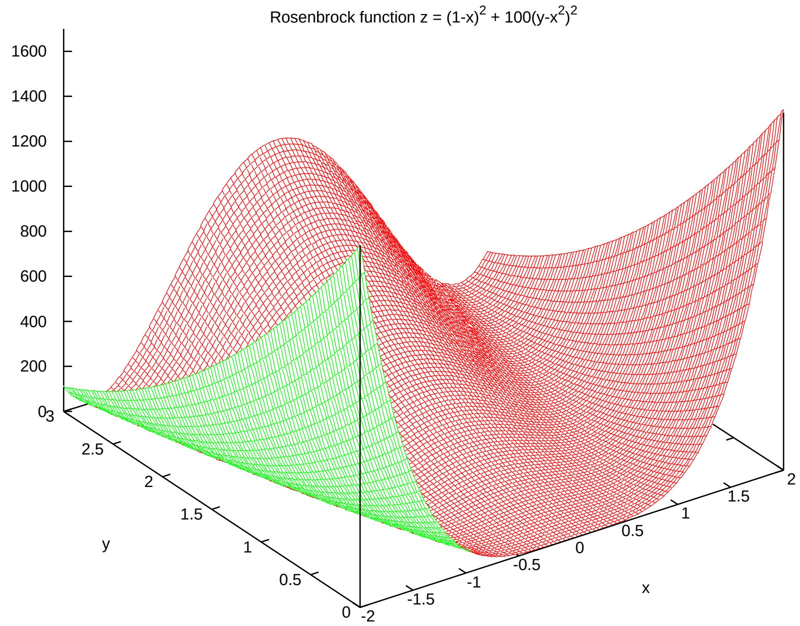
$$2x^2 + y^2 = 2 \tag{13a}$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \tag{13b}$$

15. Sporządź naturalny splajn kubiczny na podstawie danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/dane.txt`. Przedstaw graficznie punkty danych i znaleziony splajn.

16. Stosując metodę Brenta znajdź minimum funkcji skonstruowanej w poprzednim zadaniu (znalezionego splajnu!), startując z losowo wybranej pary bliskoleżących punktów z przedziału $[-1.5 : 1.5]$; użyj tej pary to znalezienia trójki punktów wstępnie otaczających minimum. Powtórz zadanie dla kilkunastu różnych par punktów początkowych.

17 O. Znajdź numerycznie (analitycznie zrobić można to bardzo łatwo) minimum funkcji Rosenbrocka (zobacz rysunek)



$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2 \,. \tag{14}$$

Rozpocznij poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacuj, ile trzeba kroków aby zbliżyć się do minimum narozsądną odległość. Przedstaw graficznie drogę, jaką przebywa algorytm poszukujący minimum (to znaczy pokaż położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

18*. Startując z kilku losowo wybranych punktów poczatkowych, spróbuj numerycznie znaleźć minima *czterowymiarowej* funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1,x_2,x_2,x_4) = (1-x_1)^2 + 100(x_2-x_1^2)^2 + 100(x_3-x_2^2)^2 + 100(x_4-x_3^2)^2 \,. \tag{15}$$

19. Startując ze 128 punktów początkowych, rozmieszczonych losowo w kwadracie $[-3,3] \times [-3,3]$, znajdź minima funkcji

$$f(x,y) = 0.25x^4 + y^2 - 0.5x^2 + 0.125x + 0.0625(x-y) \tag{16}$$

20 O. Dopasuj wielomiany niskich stopni do danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/w.txt`, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike, jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - w(x_i))^2 \,, \tag{17}$$

gdzie (x_i, y_i) oznaczają punkty pomiarowe, N jest liczbą pomiarów, $w(x)$ dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów (czyli współczynników dopasowanego wielomianu).

Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicite znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.

21. Znajdź przybliżenia Padé R_{40}, R_{22}, R_{04} funkcji

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - x^2 \sin\theta^2}\, d\theta\,, \quad x \in (-1, 1) \tag{18}$$

Sporządź ich wykresy, oraz wykres samej funkcji (18), w przedziale $[-0.5, 0.5]$. Czy przybliżenia R_{31}, R_{13} istnieją?

PFG